高等学校教材

线性代数

◎ 主编 吴健荣 谷建胜

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

主　编　吴健荣　谷建胜
副主编　沈建华　乔占科　苏郇立

高等教育出版社

内容提要

本书根据线性代数课程的教学基本要求编写而成。本着“以应用为目的、以必需和够用为尺度”的原则，全书在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面内容上尽量做出合理安排，力求培养学生的逻辑思维能力和数学应用能力，从而提高学生的综合素质。

本书内容包括：线性方程组与矩阵的概念、矩阵的运算与矩阵的秩、行列式、n 维向量、矩阵的对角化、二次型及线性空间与线性变换等七章，每章内容均包括应用举例和习题，书末附习题参考答案。前六章为本课程教学的基本要求内容，教学时数约为 36 学时，第七章可供教学要求较高的专业选用。

本书可供高等学校理工、经管等专业学生使用，也可作为自学者和工程技术人员的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/吴健荣，谷建胜主编．—北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027257-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①吴…②谷… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 090019 号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 李 茜 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 余 杨 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	煤炭工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×960 1/16	版　次	2009年7月第1版
印　张	10	印　次	2009年7月第1次印刷
字　数	180 000	定　价	11.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　27257-00

前　言

线性代数是研究线性空间及其线性变换以及与之相关问题的一个数学分支，它在现代科学技术的许多领域都有十分重要的应用。特别是随着计算机及其应用技术的飞速发展，很多实际问题得以离散化而得到定量的解决。作为离散化和数值计算理论基础的线性代数，为解决实际问题提供了强有力的数学工具。

为适应新的要求，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的线性代数课程的基本要求，在“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究的基础上，我们编写了本书。

在编写过程中，我们本着“以应用为目的、以必需和够用为尺度”的原则，对教材在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面内容上尽量做出合理安排，使学生通过学习，既能掌握线性代数的基本理论和技能，又能培养抽象思维、逻辑推理和数学应用的能力。另一方面，我们力图使本教材体现以下主要特点：

1. 在保证科学性的前提下，充分考虑高等教育大众化的新形势，按照由浅入深、从具体到抽象的原则，全面落实课程教学基本要求，构建易教易学的线性代数内容体系。

（1）首先从学生较为熟悉的问题——线性方程组入手，用它来引入矩阵及其初等变换这两个重要的数学工具，然后深入展开讨论，逐步进入抽象性较强的内容。

（2）在介绍矩阵的运算、可逆矩阵及秩等内容之后，再介绍行列式，将矩阵的逆和矩阵的秩等内容与行列式脱钩。一方面突出矩阵在线性代数中的基础地位；另一方面使学生能更直接地理解矩阵的秩等概念。

（3）利用学生易于理解的归纳方法给出了 n 阶行列式的定义，使用较为初等的方法完整地证明了行列式的全部性质，并应用行列式给出了矩阵可逆和矩阵秩的刻画，以及解方程组的克拉默法则，在淡化行列式计算技巧的同时，强化了行列式的应用背景。

（4）利用向量的线性表示来定义向量组的线性相关性，而将通常教材中的线性相关性定义作为定理，这样的处理既保证了理论的完整性又降低了教学

的难度。

2. 突出培养应用型人才的宗旨，注意重要概念的实际背景，强化线性代数理论知识的应用。在本书前六章的每章中都安排一节应用举例，展示本章理论与方法在实践中的应用，提高学生应用数学的能力和学习数学的兴趣。

3. 强调线性代数的思想与方法。线性方程组既是线性代数的重要组成部分，也是线性代数理论的重要来源，本教材在一些重要概念的引入、理论的阐述和方法的应用方面始终以线性方程组为背景。矩阵，特别是矩阵初等变换的前置，不仅使有关问题的表示和计算变得简洁，更重要的是有利于学生牢固树立数学中的“变换”思想。

4. 为使学生对线性代数的理论和方法有比较全面深入的了解和掌握，书中的定理、推论一般都给出了证明。但考虑到应用型人才培养的目标和特点，我们将个别较繁琐或只要求学生了解其结论的证明标注了“*”，供教学中选用。

本教材兼顾了理工、经管等非数学类专业的教学要求。前六章为本课程教学的基本要求内容，教学时数约为36学时，第七章可供教学要求较高的专业选用。

高等学校教学名师奖获得者、苏州大学游宏教授仔细审阅了全部书稿，提出了宝贵的修改意见，全体编写人员在此向游宏教授表示衷心的感谢！

感谢课题组织者全国高等学校教学研究中心为我们提供的机会，促使我们对线性代数教学改革的经验和趋势进行了系统的分析、总结。

感谢高等教育出版社，本书的出版离不开他们的热忱指导和辛勤工作。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编　者

2009年5月

目　　录

第一章　线性方程组与矩阵的概念

线性方程组是解决众多实际问题的有效工具，也是线性代数的重要组成部分. 本章我们将介绍线性方程组的基本概念以及解线性方程组的高斯消元法，在此基础上引入矩阵的概念.

§1.1　n 元线性方程组

本节我们介绍线性方程组的基本概念和解线性方程组的高斯消元法.

一、线性方程组的概念

一般地，含有 m 个方程的 n 元线性方程组可表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_j 为未知数，a_{ij}为系数，b_i 为常数项$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

特别地，常数项全为 0 的线性方程组称为**齐次线性方程组**；否则称为**非齐次线性方程组**. 在本书中，线性方程组常简称为**方程组**.

定义 1.1　对于给定的 n 元线性方程组(1.1)，若存在一个数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，将 $x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$ 代入方程组后，能使每个方程都成为恒等式，则称该方程组**有解**，并称这个数组(或这 n 个数)为该方程组的一个**解**. 若这样的数组不存在，则称该方程组**无解**. 方程组的所有解构成的集合就称为该方程组的**解集**. 规定无解方程组的解集为空集. 两个解集相同的方程组称为**同解方程组**.

显然，任意一个齐次线性方程组必有解(至少有零解). 研究一个方程组是否有解，以及在有解情况下如何求出其解是方程组理论的两大基本问题，我们将在后面章节中对此作详细讨论.

二、高斯消元法

解线性方程组最基本的方法是高斯(Gauss)消元法. 我们通过一个例子来

说明这种方法.

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} x+\ y-\ z=\ \ 1, \\ x-\ y+\ z=-1, \\ x-2y-2z=-6. \end{cases} \qquad ①$$

解 将第一个方程乘(-1)分别加到第二个和第三个方程，得

$$\begin{cases} x+\ \ y-\ z=\ \ 1, \\ \quad -2y+2z=-2, \\ \quad -3y-\ z=-7. \end{cases} \qquad ②$$

将第二个方程乘$\left(-\frac{1}{2}\right)$，得

$$\begin{cases} x+\ \ y-z=\ \ 1, \\ \qquad y-z=\ \ 1, \\ \quad -3y-z=-7. \end{cases} \qquad ③$$

将第二个方程乘 3 后加到第三个方程，得

$$\begin{cases} x+y-\ z=\ \ 1, \\ \qquad y-\ z=\ \ 1, \\ \qquad\ -4z=-4. \end{cases} \qquad ④$$

将第三个方程乘$\left(-\frac{1}{4}\right)$，得

$$\begin{cases} x+y-z=1, \\ \qquad y-z=1, \\ \qquad\quad z=1. \end{cases} \qquad ⑤$$

将第三个方程加到第一、二个方程，得

$$\begin{cases} x+y\ \ =2, \\ \qquad y\ \ =2, \\ \qquad\ z=1. \end{cases} \qquad ⑥$$

将第二个方程乘(-1)后加到第一个方程，得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2, \\ z=1, \end{cases} \qquad ⑦$$

此即为原方程组的解.

上述求解过程可以分成两个阶段：②～④的“消元”阶段和⑤～⑦的“回代”（本质上也是“消元”）阶段，所采用的办法就是反复利用“同解变换”对方程组进行“消元”，直至得出方程组的解.

三、方程组的初等变换

为了进一步说明高斯消元法的本质，我们引入方程组初等变换的概念.

定义 1.2　对线性方程组所作的下述三种变换，统称为方程组的**初等变换**：

（1）交换方程组中某两个方程的位置；

（2）用一个非零常数乘某个方程；

（3）用一个非零常数乘某个方程后加到另一个方程.

方程组初等变换的重要特点在于它不改变方程组的解.

定理 1.1　经初等变换后所得的方程组与原方程组同解.

证　（1）、（2）两种变换不改变方程组的解是显然的，这里只讨论变换（3）的情形.

对方程组（1.1）作初等变换（3），比如用非零常数 k 乘第 i 个方程后加到第 j 个方程（不妨假定 $i<j$），可得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{j1}+ka_{i1})x_1+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})x_n=b_j+kb_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.2}$$

设方程组（1.1）有解：$x_1=\gamma_1,\cdots,x_n=\gamma_n$，即

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1+\cdots+a_{1n}\gamma_n=b_1, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\gamma_1+\cdots+a_{in}\gamma_n=b_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}\gamma_1+\cdots+a_{jn}\gamma_n=b_j, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\gamma_1+\cdots+a_{mn}\gamma_n=b_m. \end{cases}$$

由 $a_{i1}\gamma_1+\cdots+a_{in}\gamma_n=b_i$ 及 $a_{j1}\gamma_1+\cdots+a_{jn}\gamma_n=b_j$ 可得

$$(a_{j1}+ka_{i1})\gamma_1+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})\gamma_n=b_j+kb_i,$$

因此 $x_1=\gamma_1,\cdots,x_n=\gamma_n$ 也是方程组（1.2）的解.

反之，若方程组（1.2）有解，设为 $x_1=v_1,\cdots,x_n=v_n$，代入（1.2）得

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = b_1, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = b_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{j1} + ka_{i1})v_1 + \cdots + (a_{jn} + ka_{in})v_n = b_j + kb_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n = b_m. \end{cases}$$

由 $(a_{j1} + ka_{i1})v_1 + \cdots + (a_{jn} + ka_{in})v_n = b_j + kb_i$ 得

$$(a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \cdots + a_{jn}v_n) + k(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n) = b_j + kb_i,$$

由于 $a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = b_i$，所以

$$a_{j1}v_1 + \cdots + a_{jn}v_n = b_j.$$

即 $x = v_1, \cdots, x_n = v_n$ 也是方程组(1.1)的解.

综上可知方程组(1.1)与(1.2)同解.

高斯消元法的本质就是对方程组进行适当的初等变换，将原方程组转换为相对简单的同解方程组，从而比较容易地判断出原方程组是否有解以及解是什么.

例 1.2 解方程组

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5, \\ 2x + y + 2z = 4, \\ x + y - 3z = 1. \end{cases}$$

解 交换第一个与第三个方程的位置，得

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1, \\ 2x + y + 2z = 4, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

将第一个方程分别乘(-2)，(-3)后加到第二个和第三个方程，得

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1, \\ -y + 8z = 2, \\ -y + 8z = 2. \end{cases}$$

将第二个方程乘(-1)后加到第三个方程，得

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1, \\ -y + 8z = 2, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1, \\ -y + 8z = 2. \end{cases}$$

将第二个方程加到第一个方程，并移项得

$$\begin{cases} x=3-5z, \\ y=-2+8z. \end{cases}$$

对 z 的任意取值，可确定相应的 x，y 值，它们构成原方程组的解. 可见此方程组有无穷多组解，且可表示为

$$\begin{cases} x=3-5k, \\ y=-2+8k, \\ z=k, \end{cases}$$

其中 k 为任意常数.

例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解 将第一个和第二个方程都加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 0=3. \end{cases}$$

由于所得的方程组无解，所以原方程组无解.

§1.2 矩阵的定义及其初等变换

一个线性方程组与其未知数所用的符号无关，而仅与其系数和常数项有关. 也就是说，一个线性方程组与它的系数和常数项之间是一一对应的. 因此，我们可以通过对方程组的系数和常数项的讨论来研究方程组. 为此，我们需要引进矩阵这个重要的概念.

一、矩阵的定义

定义 1.3 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ **矩阵**. 其中，数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵第 i 行第 j 列的**元素**. 每个元素都为实数的矩阵称为**实矩阵**，元素中含有复数的矩阵

称为**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外，均指实矩阵.

上述矩阵还可简记为$(a_{ij})_{m\times n}$或(a_{ij}).

特别地，行数与列数都为 n 的矩阵称为 n 阶**方阵**. 只有一列的矩阵$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为**列矩阵**；只有一行的矩阵$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$称为**行矩阵**，行矩阵$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$有时也写作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

矩阵通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示.

如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$的对应位置上的元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

对已知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

由系数 a_{ij}与常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$组成的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

与

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

分别称为方程组的**系数矩阵**和**增广矩阵**.

可见，一个线性方程组可由其增广矩阵唯一确定，或者说方程组与其增广矩阵之间存在一一对应关系. 因此，我们可以通过对增广矩阵的讨论来研究方程组. 特别地，齐次线性方程组由它的系数矩阵唯一确定.

二、几种特殊的矩阵

1. 零矩阵　每个元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$.

2. 三角阵　**主对角线**(从左上角到右下角的直线)下侧(上侧)的所有元素全为零的方阵称为**上(下)三角阵**. 上、下三角阵的一般形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

上、下三角阵统称为**三角阵**.

3. 对角矩阵　主对角线以外的元素全为零的方阵称为**对角矩阵**. 其一般形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

有时也记作 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

特别地，主对角线上的元素全为 1 的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

称为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$.

4. 行阶梯形矩阵　若一个矩阵满足如下条件:

(1) 如果存在零行(元素全为 0 的行)，则零行全在非零行的下方;

(2) 当非零行的非零首元(第一个不为零的元素)位于第 j 列时，则该行以下每一行(若存在)的前 j 个元素全为零.

则称这样的矩阵为**行阶梯形矩阵**. 本书中，行阶梯形矩阵常简称为**阶梯阵**.

满足如下条件的行阶梯形矩阵称为**行最简型矩阵**：非零行的非零首元为 1，且它所在列的其他元素均为 0.

例如，下列矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1&3&4&5\\0&4&3&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

中，A，B，C，E 四个矩阵都是阶梯阵，且 A 和 E 为行最简型矩阵，而 D 则不是阶梯阵.

三、矩阵的初等变换

由于方程组可由其增广矩阵来表示，用高斯消元法求方程组解的过程（对方程组实施初等变换）也就可以通过变换它的增广矩阵来进行. 比如，例 1.1 中的高斯消元法的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\1&-2&-2&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{分别加到第二、三行}]{\text{将第一行乘}(-1)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&-3&-1&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{将第二行乘}\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-3&-1&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第三行}]{\text{将第二行乘 }3}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{将第三行乘 }-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一、二行}]{\text{将第三行分别}}\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{第二行乘}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

上述最后一个矩阵即为例 1.1 中方程组⑦的增广矩阵.

相应于方程组的三种初等变换，我们定义矩阵的三种初等变换.

定义 1.4　对矩阵的行所实施的下述三种变换，称为矩阵的**行初等变换**：

（1）交换矩阵的第 i 行与第 j 行（记作 $r_i\leftrightarrow r_j$）；

（2）用非零常数 k 乘矩阵的第 i 行的所有元素（记作 kr_i）；

（3）用非零常数 k 乘矩阵第 i 行的所有元素后加到第 j 行的对应元素上

（记作 r_j+kr_i）.

若将定义中的“行”换成“列”，即得矩阵的**列初等变换**，相应地记为：$c_i\leftrightarrow c_j$，kc_i 和 c_j+kc_i.

矩阵的行初等变换和列初等变换统称为矩阵的**初等变换**.

可见，对方程组作初等变换就相当于对其增广矩阵作相应的行初等变换. 于是，定理 1.1 可改述为

定理 1.2 对一个线性方程组的增广矩阵作一系列行初等变换，以所得的矩阵作为增广矩阵的线性方程组与原方程组同解.

由此，我们可以通过对方程组的增广矩阵作行初等变换来解方程组. 事实上，从矩阵变换的角度来看，高斯消元法中的“消元”过程实际上就是将原方程组的增广矩阵经一系列行初等变换化为阶梯阵的过程，而“回代”过程就是进一步将所得到的阶梯阵经一系列行初等变换化为行最简型矩阵的过程.

例 1.4 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=5, \\ 2x_1+4x_2-x_4=-3, \\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=8, \\ x_1+2x_2-9x_3-5x_4=-21. \end{cases}$$

解 方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -9 & -5 & -21 \end{pmatrix}$，将它化为行最简型矩阵：

$$\overline{A}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1,\,r_3+r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & -26 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

于是原方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - \dfrac{1}{2}x_4 = -\dfrac{3}{2}, \\ \qquad\qquad x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{13}{6}. \end{cases}$$

将 x_2，x_4 移至方程右端得

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + \dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{3}{2}, \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{13}{6}. \end{cases}$$

可见，当 x_2，x_4 任取一组数时，可唯一地确定 x_1，x_3 的一组值，它们一起构成了方程组的一组解，因此原方程组有无穷多个解，它们可以表达为

$$\begin{cases} x_1 = -2k_1 + \dfrac{1}{2}k_2 - \dfrac{3}{2}, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}k_2 + \dfrac{13}{6}, \\ x_4 = k_2, \end{cases}$$

其中 k_1、k_2 为任意常数.

定理 1.3 关于行阶梯形矩阵和行最简型矩阵，有下述结论：

（1）任一矩阵都可经过若干次行初等变换化为行阶梯形矩阵；

（2）任一行阶梯形矩阵都可经过若干次行初等变换化为行最简型矩阵，且二者的非零行行数相等.

证 （1）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是任一 $m\times n$ 矩阵. 不妨假定 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵（否则它已经是阶梯阵）. 我们对行数 m 应用数学归纳法.

当 $m=1$ 时 $\boldsymbol{A}$ 已经是阶梯阵. 假设 $m=k$ 时结论成立，当 $m=k+1$ 时，取 $\boldsymbol{A}$ 的最左边的非零列，比如说第一列，且不失一般性，可假定 $a_{11}\neq 0$（否则可通过第一种行初等变换把第一列中的非零元素换到第一行），则

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[i=2,\cdots,k+1]{r_i+\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)r_1} \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{k,1} & \cdots & b_{k,n-1} \end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}_1$ 右下角的 $k\times(n-1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,n-1} \end{pmatrix},$$