

中央人民政府高等教育部推薦  
高等學校教材試用本

# 高等數學簡明教程

С. П. ВИНОВАДОВ 著  
傅 尙 民 譯



商·務 印 書 館

中央人民政府高等教育部推薦  
高等學校教材試用本



# 高等數學簡明教程

C. П. 維諾格拉陀夫著  
傅 尙 民 譯

商 務 印 書 館

本書係根據 1949 年蘇聯國營教育出版社(Учпедгиз)出版的維諾格拉陀夫(С. П. Виноградов)著庫圖佐夫(Б. В. Кутузов)改編『高等數學簡明教程』(Краткий курс высшей математики)第一版譯出。原書經蘇俄教育部審定為師範專科學校用教科書。

全書共分兩編，第一編解析幾何部分的譯文，曾經東北師範大學數學系孫福元講師校對，並經數學系主任楊春田先生復校一次，第二編數學分析部分的譯文，曾經東北人民政府教育部中教處王正旭同志校對。本書不僅可供我國師範大學教學及參考用，亦可供一般高等學校理工各科教學及參考用。

## 高等數學簡明教程

傅 尙 民 譯

---

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

中 國 圖 書 發 行 公 司 發 行

商 務 印 書 館 北 京 廠 印 刷

(50857·1)

---

1953年9月東北教育出版社出版 印數1—25,000

1953年3月本館第1版 印數1—10,000

定價¥18,000

## 中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將陸續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部



# 目 錄

## 第一篇 解 析 幾 何

### 第一章 直線上的解析幾何

|                   |   |
|-------------------|---|
| § 1. 直線上點的坐標..... | 1 |
| § 2. 兩點的距離.....   | 1 |
| § 3. 線段的定比分割..... | 4 |

### 第二章 平面上點的坐標・兩點的距離・線段的定比分割

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| ① § 4. <u>平面上點的直角坐標</u> ..... | 6  |
| § 5. 兩點的距離.....               | 7  |
| § 6. 線段的定比分割.....             | 9  |
| § 7. 質量中心.....                | 10 |
| § 8. 三角形面積.....               | 12 |
| § 9. 平面上點的斜角坐標.....           | 13 |
| § 10. 極坐標.....                | 14 |
| § 11. 射影.....                 | 15 |

### 第三章 直線方程式・關於直線的基本問題・一次函數

|                              |    |
|------------------------------|----|
| § 12. 直線的角係數和 $y$ 軸上的截距..... | 17 |
| § 13. 已知角係數的直線方程式.....       | 19 |
| § 14. 直線方程式的法線式.....         | 22 |
| § 15. 直線方程式的截距式.....         | 25 |
| § 16. 直線的一般方程式的特殊情形.....     | 25 |
| § 17. 已知方程式的直線作圖法.....       | 27 |
| § 18. 兩直線的交角.....            | 27 |

|                   |    |
|-------------------|----|
| § 19. 過已知一點的直線方程式 | 29 |
| § 20. 過已知兩點的直線方程式 | 30 |
| § 21. 兩直線的交點      | 30 |
| § 22. 點與直線的距離     | 32 |
| § 23. 一次函數        | 33 |
| 習 題               | 33 |

#### 第四章 圓・拋物線・橢圓・雙曲線

|                     |    |
|---------------------|----|
| § 24. 圓及其方程式        | 36 |
| § 25. 圓與直線的交點       | 37 |
| § 26. 拋物線及其方程式      | 38 |
| § 27. 拋物線的形狀        | 39 |
| § 28. 拋物線與直線的交點     | 41 |
| § 29. 橢圓及其方程式       | 42 |
| § 30. 橢圓的形狀         | 43 |
| § 31. 橢圓的軸和頂點       | 44 |
| § 32. 橢圓和圓的關係       | 45 |
| § 33. 橢圓與直線的交點      | 46 |
| § 34. 橢圓的中心         | 46 |
| § 35. 橢圓的離心率及其準線    | 47 |
| § 36. 雙曲線及其方程式      | 50 |
| § 37. 雙曲線的形狀        | 51 |
| § 38. 雙曲線與直線的交點     | 52 |
| § 39. 雙曲線的漸近線       | 53 |
| § 40. 雙曲線的漸近線的作圖法   | 54 |
| § 41. 雙曲線上的點至漸近線的距離 | 54 |

|                       |    |
|-----------------------|----|
| § 42. 雙曲線的中心          | 56 |
| § 43. 雙曲線的離心率及其準線     | 56 |
| § 44. 橢圓、雙曲線及拋物線的一般性質 | 58 |

## 第五章 幾種軌跡

|                   |    |
|-------------------|----|
| § 45. 關於直線及圓的幾種軌跡 | 59 |
| § 46. 一點關於圓的方幂    | 61 |
| § 47. 二圓的等幂軸      | 63 |
| § 48. 歧點蔓葉線       | 64 |

## 第六章 坐標變換・二次曲線通論

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| § 49. 坐標變換                       | 65 |
| § 50. 拋物線方程式 $y = ax^2 + bx + c$ | 67 |
| § 51. 關於漸近線的等軸雙曲線方程式             | 68 |
| § 52. 曲線的次數                      | 69 |
| § 53. 二次曲線與直線的交點                 | 71 |
| § 54. $D \neq 0$ 時曲線方程式的變換       | 72 |
| § 55. $D = 0$ 時曲線方程式的變換          | 76 |

## 第七章 空間的點的坐標・兩點的距離・線段的定比分割・

### 有向直線的方向餘弦

|                    |    |
|--------------------|----|
| § 56. 空間的點的坐標      | 79 |
| § 57. 兩點的距離        | 80 |
| § 58. 線段的定比分割      | 81 |
| § 59. 空間的射影        | 82 |
| § 60. 直線與三坐標軸交角的關係 | 83 |

## 第八章 平面方程式及其各種型・關於平面的問題

|                 |    |
|-----------------|----|
| § 61. 平面方程式的法線式 | 84 |
|-----------------|----|

|                   |    |
|-------------------|----|
| § 62. 平面方程式的截距式   | 86 |
| § 63. 平面方程式的特殊情形  | 87 |
| § 64. 二平面的交角      | 89 |
| § 65. 三平面的交點      | 90 |
| § 66. 過已知三點的平面方程式 | 91 |
| § 67. 點與平面的距離     | 91 |
| 習 題               | 92 |

### 第九章 空間的直線及其方程式・關於直線及平面的問題

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 68. 空間的直線方程式    | 93  |
| § 69. 過已知二點的直線方程式 | 95  |
| § 70. 兩直線的交角      | 97  |
| § 71. 直線與平面的交角    | 97  |
| § 72. 直線與平面的交點    | 98  |
| § 73. 空間二直線的交點    | 99  |
| 習 題               | 100 |

### 第十章 二次曲面的基礎理論

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 74. 曲面的次數       | 102 |
| § 75. 二次曲面        | 102 |
| § 76. 各種型的二次曲面方程式 | 102 |
| § 77. 橢圓面         | 104 |
| § 78. 旋轉橢圓面       | 103 |
| § 79. 球面          | 106 |
| § 80. 橢圓面的圓截口     | 107 |
| § 81. 單葉雙曲面       | 108 |
| § 82. 單葉旋轉雙曲面     | 109 |



|                 |     |
|-----------------|-----|
| § 83. 單葉雙曲面的圓截面 | 110 |
| § 84. 單葉雙曲面的母線  | 110 |
| § 85. 雙葉雙曲面     | 112 |
| § 86. 雙葉旋轉雙曲面   | 113 |
| § 87. 橢圓拋物面     | 114 |
| § 88. 旋轉拋物面     | 115 |
| § 89. 雙曲拋物面     | 115 |
| § 90. 拋物面的母線    | 116 |
| § 91. 二次錐面      | 117 |
| § 92. 雙曲面的漸近錐面  | 118 |
| § 93. 二次柱面      | 119 |

## 第二篇 數 學 解 析

### 第十一章 函 數

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| § 94. 數集              | 121 |
| § 95. 區間、節、點的鄰域       | 122 |
| § 96. 單變數函數           | 124 |
| § 97. 函數的解析表示，函數的存在區域 | 127 |
| § 98. 函數的幾何表示         | 129 |
| § 99. 關於函數的表示         | 132 |
| § 100. 單調函數與非單調函數     | 132 |
| § 101. 有界函數與無界函數      | 134 |

### 第十二章 極 限

|               |     |
|---------------|-----|
| § 102. 數集的極限點 | 135 |
| § 103. 函數的極限  | 136 |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| § 104. 當 $x \rightarrow \infty$ 時, 函數 $f(x)$ 的極限 | 141 |
| § 105. 數列・數列的極限                                  | 144 |
| § 106. 無限小函數                                     | 147 |
| § 107. 無限小函數的定理                                  | 149 |
| § 108. 和及差的極限                                    | 152 |
| § 109. 積的極限                                      | 153 |
| § 110. 商的極限                                      | 153 |
| § 111. 單調數列的極限                                   | 154 |
| § 112. 計算極限的例題                                   | 157 |
| 習 題                                              | 161 |

### 第十三章 連 續

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| § 113. 函數在點、在區間、在節的連續性        | 163 |
| § 114. 在節內的連續函數的最大值、最小值及中值的定理 | 165 |
| § 115. 連續函數的和、積及商的連續性         | 168 |
| § 116. 函數連續性之各種不同形式的定義        | 170 |

### 第十四章 導數・微分法

|                      |     |
|----------------------|-----|
| § 117. 函數的導數         | 171 |
| § 118. 導數的幾何意義       | 172 |
| § 119. 有導數的函數的連續性    | 173 |
| § 120. 定理1. 常數的導數    | 174 |
| § 121. 定理2. 和的導數     | 174 |
| § 122. 定理3. 積的導數     | 175 |
| § 123. 定理4. 分數的導數    | 176 |
| § 124. 定理5. 函數的函數的導數 | 177 |
| § 125. 冪的導數          | 178 |

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| § 126. $\sin x$ 的導數                                       | 180 |
| § 127. $\cos x$ 的導數                                       | 181 |
| § 128. $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的導數 | 182 |
| § 129. 恆等式的微分法                                            | 182 |
| § 130. 反三角函數                                              | 183 |
| § 131. $\arcsin x$ 的導數                                    | 183 |
| § 132. $\arccos x$ 的導數                                    | 184 |
| § 133. $\operatorname{arctg} x$ 的導數                       | 185 |
| § 134. $\operatorname{arccot} x$ 的導數                      | 186 |
| § 135. 指數函數                                               | 186 |
| § 136. 函數 $a^x$ 的性質                                       | 188 |
| § 137. 對數                                                 | 189 |
| § 138. 指數函數的導數                                            | 190 |
| § 139. 對數的導數                                              | 192 |
| § 140. 對數微分法                                              | 192 |
| 習 題                                                       | 193 |

### 第十五章 微分・增函數與減函數・高階導數與高階微分・一階導數與二階導數在研討函數上的應用

|                  |     |
|------------------|-----|
| § 141. 微分        | 197 |
| § 142. 高階導數及高階微分 | 198 |
| § 143. 洛爾定理      | 200 |
| § 144. 拉格郎奇定理    | 201 |
| § 145. 增函數與減函數   | 203 |
| § 146. 函數的極大與極小  | 204 |
| § 147. 例題        | 208 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| § 148. 二階導數的幾何意義・曲線的凸凹・反曲點 | 209 |
| § 149. 研討函數的例題             | 211 |
| 習 題                        | 213 |

### 第十六章 偏導數與偏微分・全微分・疊函數及隱函數的微分法

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 150. 偏導數與偏微分・全微分 | 215 |
| § 151. 疊函數的微分法     | 217 |
| § 152. 隱函數微分法      | 219 |
| § 153. 高階偏導數       | 221 |
| 習 題                | 222 |

### 第十七章 積分學的問題・不定積分與定積分・積分的幾何意義・積分和的極限・基本積分・代換積分法與部分積分法

|                     |     |
|---------------------|-----|
| § 154. 積分學的問題・不定積分  | 223 |
| § 155. 定積分是和的極限     | 225 |
| § 156. 積分是和的極限的計算例題 | 231 |
| § 157. 函數的積分法或求面積   | 232 |
| § 158. 基本積分表        | 233 |
| § 159. 代換積分法        | 234 |
| § 160. 部分積分法        | 236 |
| 習 題                 | 239 |

### 第十八章 有理函數的幾種性質・有理函數的積分法

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 161. 有理整函數的積分法   | 241 |
| § 162. 有理整函數的幾種性質  | 241 |
| § 163. 分解有理分式為部分分式 | 245 |
| § 164. 有理分式的積分法    | 250 |
| 習 題                | 254 |



## 第十九章 最簡單的無理函數及超越函數的積分法

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 165. 無理代數函數的積分法 | 255 |
| § 166. (A) 型積分    | 255 |
| § 167. (B) 型積分    | 256 |
| § 168. (C) 型積分    | 257 |
| § 169. 超越函數的積分法   | 260 |
| 習 題               | 263 |

## 第二十章 定積分 · 定積分的性質 · 積分概念的推廣 · 定積分的近似計算 · 梯形公式 · 辛普孫 (simpson) 公式

|                        |     |
|------------------------|-----|
| § 170. 定積分的性質          | 265 |
| § 171. 對數的定義和性質        | 268 |
| § 172. 積分概念的推廣         | 269 |
| § 173. 計算定積分的例題        | 271 |
| § 174. 渥里斯(wallis)公式   | 272 |
| § 175. 定積分的近似計算 · 梯形公式 | 273 |
| § 176. 辛普孫公式           | 274 |
| 習 題                    | 276 |

## 第二十一章 級數 · 無限級數的收斂性與發散性 · 收斂的條件 · 各項為單變數函數的級數 · 冪級數 · 馬克勞林級數與台勞級數 · 函數

### 展開成級數

|                  |     |
|------------------|-----|
| § 177. 收斂級數與發散級數 | 278 |
| § 178. 收斂的必要條件   | 281 |
| § 179. 比較判定法的定理  | 282 |
| § 180. 正項級數的收斂條件 | 284 |
| § 181. 交錯級數的收斂條件 | 285 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| § 182. 絕對收斂級數                      | 287 |
| § 183. 絕對收斂級數的性質                   | 288 |
| § 184. 複數項級數                       | 291 |
| § 185. 級數的運算                       | 292 |
| § 186. 冪級數                         | 293 |
| § 187. 冪級數的均勻收斂                    | 295 |
| § 188. 冪級數所決定的函數的連續性               | 297 |
| § 189. 冪級數所決定的函數的導數                | 297 |
| § 190. 冪級數所決定的函數的積分                | 301 |
| § 191. 函數展開成級數                     | 301 |
| § 192. 馬克勞林公式的另一結論                 | 304 |
| § 193. $e^x, \sin x, \cos x$ 展開成級數 | 307 |
| § 194. 用級數計算 $\sin x$ 和 $\cos x$   | 309 |
| § 195. 指數函數與三角函數間的關係               | 310 |
| § 196. 對數展開成級數                     | 311 |
| § 197. 對數的計算                       | 312 |
| § 198. $(1+x)^m$ 展開成級數             | 315 |
| § 199. 幾何說明                        | 317 |
| § 200. 台勞 (Taylor) 公式              | 310 |
| § 201. 單變數函數的極大與極小                 | 320 |
| § 202. 代數方程式的根的近似計算 (牛頓方法)         | 322 |
| § 203. 用級數積分法                      | 325 |
| 習 題                                | 328 |

## 第二十二章 微積分在幾何上的應用

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 204. 平面曲線的切線與法線 | 330 |
|-------------------|-----|

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| § 205. 切線長與法線長 · 次切距與次法距 | 331 |
| § 206. 曲線的弧長             | 332 |
| § 207. 曲線的曲率             | 333 |
| § 208. 曲率圓               | 335 |
| § 209. 漸屈線               | 336 |
| § 210. 擺線                | 337 |
| § 211. 求面積法              | 341 |
| § 212. 求體積法              | 343 |
| § 213. 旋轉體的體積            | 343 |
| 習 題                      | 344 |

### 第二十三章 微分方程式

|                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 214. 定義                                                                                                                            | 346 |
| § 215. 消去常數得常微分方程式                                                                                                                   | 347 |
| § 216. 微分方程式的解                                                                                                                       | 349 |
| § 217. 變數分離型一階微分方程式                                                                                                                  | 350 |
| § 218. 線性微分方程式                                                                                                                       | 352 |
| § 219. 方向場                                                                                                                           | 355 |
| § 220. 二階微分方程式                                                                                                                       | 357 |
| § 221. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ 型微分方程式                                                                                             | 357 |
| § 222. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ 型微分方程式                                                                                             | 359 |
| § 223. $f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ 型微分方程式                                                                   | 361 |
| § 224. $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ , 及 $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$<br>型微分方程式 | 363 |
| § 225. 二階線性微分方程式                                                                                                                     | 366 |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| § 226. 常係數二階齊次線性微分方程式.....  | 369 |
| § 227. 常係數二階非齊次線性微分方程式..... | 373 |
| § 228. 常係數高階線性微分方程式.....    | 380 |
| 本書所用符號的說明.....              | 381 |
| 希臘字母表.....                  | 382 |



# 第一篇 解析幾何

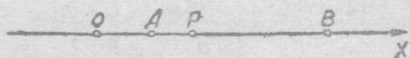
## 第一章 直線上的解析幾何

### §1. 直線上點的坐標.

爲了確定直線上點的位置，可以在此直線上任取一點 $O$ ，叫做原點(第一圖)。

若已知點 $O$ 至點 $P$ 的距離，即線段

$OP$ 的長，和它的方向，則此直線上



的點 $P$ 就可以完全確定。線段長是

第 1 圖

以某一長度單位測度所得的，而線段的方向可用 $+$ 號或 $-$ 號區分之。例如，規定自點 $O$ 向右截取的線段爲正，向左截取的線段爲負，因此，將前者長的數值冠以 $+$ 號，後者長的數值冠以 $-$ 號，但一般 $+$ 號可以省略。

由此規定，則可得與直線上任何一點必對應的一數，此數叫做該點的橫坐標或坐標，一般以 $x$ 表示之。

反之：任何一個實數也對應直線上的一點。

這樣，直線的點與實數間互相一一對應。

點 $P$ 的橫坐標爲 $x$ ，以符號 $P(x)$ 表示之。

在解析幾何上所謂：已知一點，也就是說已知該點的坐標。

點 $O$ 的坐標爲零，所以叫做計算的原點，或叫做坐標原點；有向直線 $ox$ 叫做坐標軸。

### §2. 兩點的距離.

設直線上的坐標系已確定，即已選擇了：1)坐標的原點 $O$ ；2)正向；3)長