高等学校数学学习辅导教材

微积分

全程学习指导

第二版

国家理科基地创名牌课程课题组组编

（人民大学·微积分修订版）

王丽燕 秦禹春/编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

微积分

·全程学习指导·

（第二版）

（人大·微积分修订版）

国家理科基地创名牌课程课题组组编

王丽燕 秦禹春 编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分全程学习指导 / 王丽燕,秦禹春编著 .—2 版 .—大连：大连理工大学出版社，2003.9（2003.12 重印）
（高等学校数学学习辅导教材）
ISBN 7-5611-1907-0

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①王…　②秦…　Ⅲ. 微积分—高等学校—数学参考资料　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 19465 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:16.75　字数:530 千字
印数:70 001 ~ 80 000
2001 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 2 版
2003 年 12 月第 8 次印刷

责任编辑:吴孝东　刘　杰　责任校对:郭玉玮
封面设计:王福刚

定　价:22.00 元

编者的话

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

本书自2001年出版以来，发行已经突破数万册，想到此书帮助了数以万计的同学学习《微积分》，作为教师，我们感到无比欣慰。同时，也督促我们进一步修订此书，使其日臻完善。

本次修订，订正了原书中的少量笔误及排版错误，并根据近年来考研题型的变化趋势，增加了与此相近的典型题及2003年考研真题。将原书中的“典型题真题精解”部分所选例题作了少量增减，以便照顾到不同基础的同学能迅速找出自己学习的盲点，巩固已经掌握的内容，最终全面掌握《微积分》的要点及真谛，以便在期末考试、考研，乃至工作中灵活运用。

为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”标注方式，如“990406”，说明此题是1999年数学四的考题，分值6分。

从初次接触“高等数学”至今已经20余年，执教也已经10多年。在此过程中，我深深感受到了数学的理性之美，力量之美，乃至清柔之美，它远不只是工具，更像是一位哲人，启发你，熏陶你，伴你追寻人生的理想。我走上讲台后，自然地，将这种境界传染给了学生，使得他们在学习高等数学的过程中以新的角度体味“数学”，体味学习。

学习是一个过程，而过程由环节组成。注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果。学习高等数学，课堂听讲和课后复习就是两个重要环节。我深信本书会成为补充课堂听讲、辅助课后复习的好帮手。

我希望通过我们的努力，能使得同学您能够喜欢上“微积分”课，更希望这门课成为您成长道路上的助推器。最后，祝您学习进步，学业有成。

王丽燕

2003年9月

前言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

《微积分》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好《高等数学》、扩大课堂信息量、提高应试能力,我们根据原国家教委审订的普通高等学校"高等数学课程教学基本要求"(教学大纲)及教育部制定的"2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求,编写了理工和经济、管理两大类辅导教材,融学习指导和考研为一体。

本书按照被全国许多院校采用的赵树嫄主编的《微积分》(修订本)(中国人民大学出版社)的章节顺序,分为九章,每章的陈述方式均以四个板块形式出现,即

一、知识点考点精要 列出基本概念、重要定理和主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心知识。

二、典型题真题精解 我们从有关书籍和历年研究生入学考试试题中精选了有代表性的例题进行详尽的分析和解析,部分例题还给出了有别于常规思路和解法以活跃思路。这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强,旨在提高分析能力,掌握基本概念和

理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

三、教材习题同步解析　我们针对《微积分》(人大版)书中的习题A，几乎给出了全部的解，它无非方便于读者对照和分析。值得提醒一下，解题能力需要亲自动手，通过本身的实践，积累经验，才能逐步锻炼出来，从而不断提高水平。

四、模拟试题自测　自测旨在进一步强化解题训练，反映考试的重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果。

值得强调的，本书部分复习内容的深广度要高于《微积分》的要求，所选例题更接近、吻合考题。第二版块中的知识综合应用、解题思路和方法，也是对教科书极为难得的补充。

书中包含了1987年～2003年研究生入学考试数学三、数学四的全部试题。虽然每年的试题都有变化，但是知识的范围和结构基本类同。同时我们还可看出：试题与科学的思维方式，熟练的技巧，涉及知识的使用意识等密切相关。因此，深入掌握基本概念、基础理论、常用方法是至关重要的，精读、学会解决一定数量的范例不失为应试的有效途径。

本书得到了**“国家理科基地创建名牌课程”**项目经费的资助，还得到国家理科基地国内访问学者：沈阳工业学院沙萍、长春大学敬石心副教授的热情帮助，浙江万里学院徐园芬老师提供了部分习题解答。柳扬、张金利、李海燕同志做了大量的校对工作。本书还得到了大连大学教务处徐晓鹏同志和数学系赵植武同志、浙江万里学院教务处的关怀，大连理工大学出版社给予有力的支持，编著者在此向他们一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，错漏不当在所难免，诚恳期望同行和读者不吝批评指正。

编　者
浙江大学数学系
2001年6月

目 录

第一章 函数

知识点考点精要

函数的概念及其表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数、隐函数、分段函数、基本初等函数的性质及其图形，初等函数。

一元函数的概念，函数的单调性、奇偶性、周期性以及基本初等函数的性质及其图形在中学数学中早已熟悉了，这里不再赘述。但是，希望读者务必理解和掌握。下面我们仅对值得提醒的内容作一复述。

1. 函数的有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在数 k，对于所有 $x \in X$，恒有

$$f(x) \leqslant k \qquad (f(x) \geqslant k)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界（下界）。数 k 称为函数 f 在 X 上的一个上界（下界）。如果存在一个数 $M > 0$，对于任何 $x \in X$，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数 f 在 X 上有界，数 M 称为函数 f 在 X 上的一个界。否则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界。注意，如果 M 是函数 f 在 X 上的一个界，则任何比 M 更大的正数也是它在 X 上的界，所以一个有界函数必有无穷多个界。易知，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z。如果对于每个 $y \in Z$，存在惟一的 $x \in D$ 满足 $f(x) = y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y \in Z$ 上的函数，记此函数为 $x = f^{-1}(y) \quad (y \in Z)$
并称之为 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的反函数。

习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的反函数表示成 $\qquad y = f^{-1}(x)$ $(x \in Z)$

它与 $x=f^{-1}(y)\ (y\in Z)$ 表示同一个函数，因为二者具有相同的定义域和相同的对应规则。因而，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)\ (x\in Z)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有反函数。如果考虑函数 $y=f_1(x)=x^2, x\in D_1=[0,+\infty)$ 或函数 $y=f_2(x)=x^2, x\in D_2=(-\infty,0]$。这时常使用术语：称函数 $f_1(x)$（或 $f_2(x)$）为"函数 f 在 D_1（或 D_2）上的限制"或"函数 f 限制在 D_1（或 D_2）上"，且记作 $f\Big|_{D_1}$（或 $f\Big|_{D_2}$），其本质是一个新的函数。于是，就本例 $y=f(x)=x^2$ 在 $D_2=(-\infty,0]$ 上的限制 $f\Big|_{D_2}$ 就具有反函数 $y=f^{-1}\Big|_{D_2}(x)=-\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$。同样，反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的限制的反函数，所以 $\tan(\arctan x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g。如果 $Z_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数

$$y=f[g(x)],\qquad x\in D=\{x|g(x)\in D_f\}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，变量 u 称为中间变量。

4. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数是研究其它各种函数的基础，统称为基本初等函数。基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数。

初等函数有很多好的性质，它们是微积分的重要研究对象。

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应规则用不同的式子来表示的函数称为分段函数。

一般来说，分段函数不是初等函数。

6. 隐函数

设 $F(x,y)$ 是一个已知二元函数，I 是一个区间，如果对于每个 $x\in I$，都存在惟一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$，则称这个函数 $y=f(x)$ 为由 $F(x,y)=$

0 在区间 I 上确定的隐函数。因此，如果把隐函数 $y=f(x)$ 代入方程 $F(x,y)=0$，便得到在区间 I 上成立的恒等式：

$$F(x,f(x))\equiv 0,\quad x\in I。$$

在大多数情况下，不能从方程 $F(x,y)=0$ 中解出隐函数 $y=f(x)$ 的显式表达式。但是，却可利用上述恒等式来研究隐函数的许多性质。

典型题真题精解

本章主要是对中学数学知识的复习和充实，为以后学习微积分奠定基础，因此，它在考研数学试题中所占分值极小。但是，值得强调的是，分段函数和第六章的积分上限的函数在考研数学试题中还是会经常出现的，必须引起重视。

【例 1】 确定函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

解 由于 $y(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-y(x)$$

所以函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数。

【例 2】 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$，求 $f(x)$。

解 令 $\frac{1}{x}=t$，则 $f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$

所以 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\quad(x>0)$

【例 3】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

解 由 $f(x)=e^{x^2}$ 及 $f[\varphi(x)]=1-x$，有 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，所以 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$。又 $\varphi(x)\geqslant 0$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$。令 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-$

$x \geqslant 1$，从而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x \leqslant 0$。

【例 4】 证明定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证明 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的函数，显然

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

则 $\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x)$$

说明 $\varphi(x)$ 是偶函数，$\psi(x)$ 是奇函数。

故 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ 是一个偶函数与一个奇函数之和。

教材习题同步解析

1. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合。

解 $A=\{x|x$ 为太阳系九大行星$\}$。

(2) 一个无限集合。

解 $B=\{x|x$ 为自然数$\}$。

(3) 一个空集。

解 $C=\{x|x>0$ 且 $x<-1\}$。

(4) 一个集合是另一个集合的子集。

解 $D_1=\{x|x$ 为整数$\}$，$D_2=\{x|x$ 为奇数$\}$，则 $D_2 \subset D_1$。

2. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 大于 5 的所有实数集合。

解 $A=\{x|x>5,x\in R\}$。

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部（不包含圆周）一切点的集合。

解　$B=\{(x,y)|x^2+y^2<25,x\in R,y\in R\}$。

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合。

解　$C=\{(x,y)|y=x^2$ 且 $x-y=0,x,y\in R\}$。

---

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合。

解　$A=\{3,4\}$。

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合。

解　$B=\{(1,1),(0,0)\}$。

(3) 集合 $\{x||x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$。

解　$C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$。

---

4. 下列哪些集合是空集？

$A=\{x|x+1=0\}$，$B=\{x|x^2+1=0,x$ 为实数$\}$，$C=\{x|x>1$ 且 $x<0\}$，$D=\{x|x>0$ 且 $x<1\}$，$E=\{(x,y)|x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3$，x,y 均为实数$\}$。

解　$A=\{x|x=-1\}\neq\varnothing$

$B=\{x|x^2+1=0,x$ 为实数$\}=\varnothing$

$C=\{x|x>1$ 且 $x<0\}=\varnothing$

$D=\{x|x>0$ 且 $x<1\}=\{x|0<x<1\}\neq\varnothing$

对于集合 E

由 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y=3\end{cases}$　得 $y^2-3y+4=0,\Delta=-7<0$

所以 $y^2-3y+4=0$ 无实数解，即 $E=\varnothing$。

---

5. 写出 $A=\{0,1,2\}$ 的一切子集。

答：$\{0\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{0,1,2\},\varnothing$ 为 $\{0,1,2\}$ 的子集。

---

6. 如果 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2\}$ 下列各种写法哪些是对的，哪些不对？

$1\in A,0\overline{\in}B,\{1\}\in A,1\subset A,\{1\}\subset A,0\subset A,\{0\}\subset A,\{0\}\subset B,A=$

$B, A \supset B, \varnothing \subset A, A \subset A$。

答：正确的有：$1 \in A, 0 \overline{\in} B, \{1\} \subset A, \{0\} \subset A, A \supset B, \varnothing \subset A, A \subset A$。

错误的有：$\{1\} \in A, 1 \subset A, 0 \subset A, \{0\} \subset B, A = B$。

因元素对集合的关系是属于和不属于，集合对集合的关系是包含和不包含。

---

7. 设 $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4,6\}$ 求：(1)$A \cup B$；(2)$A \cap B$；(3)$A \cup B \cup C$；(4)$A \cap B \cap C$；(5)$A - B$。

解 (1)$A \cup B = \{1,2,3,5\}$

(2)$A \cap B = \{1,3\}$

(3)$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$

(4)$A \cap B \cap C = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} \cap (2,4,6) = \varnothing$

(5)$A - B = \{1,2,3\} - \{1,3,5\} = \{2\}$

---

9. 如果 $A = \{x | 3 < x < 5\}, B = \{x | x > 4\}$，求：

(1)$A \cup B$；(2)$A \cap B$；(3)$A - B$。

解 (1)$A \cup B = \{x | x > 3\}$ (2)$A \cap B = \{x | 4 < x < 5\}$

(3)$A - B = \{x | 3 < x \leqslant 4\}$

---

10. 如果 $A = \{(x,y) | x - y + 2 \geqslant 0\}$，

$B = \{(x,y) | 2x + 3y - 6 \geqslant 0\}$，

$C = \{(x,y) | x - 4 \leqslant 0\}$，

在坐标平面上标出 $A \cap B \cap C$ 的区域。

解 $x - y + 2 \geqslant 0$， 即 $y \leqslant x + 2$

$2x + 3y - 6 \geqslant 0$， 即 $y \geqslant \dfrac{6 - 2x}{3}$

$x - 4 \leqslant 0$， 即 $x \leqslant 4$

所以 $A \cap B \cap C$ 为图 1-1 中阴影部分的三角形区域。

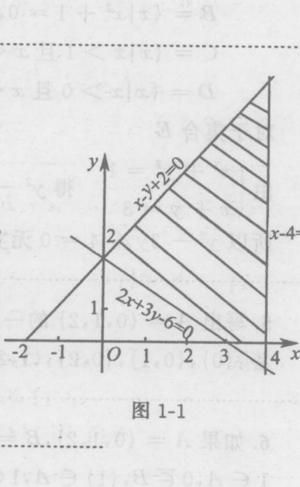

图 1-1

---

11. 如果 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，求(1)A'；(2)B'；(3)$A'\cup B'$；(4)$A'\cap B'$。

解　(1)$A'=\{4,5,6\}$　(2)$B'=\{1,3,5\}$　(3)$A'\cup B'=\{1,3,4,5,6\}$

(4)$A'\cap B'=\{5\}$

---

12. U,A,B 同第 11 题，验证 $A-B=A\cap B'$。

解　$A-B=\{1,2,3\}-\{2,4,6\}=\{1,3\}$

又因　$A\cap B'=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$

所以　$A-B=A\cap B'$

---

13. 如果 A 是非空集合，下列各式哪些是对的，哪些不对？

$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，$A\cap A=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup\varnothing=\varnothing$，$A\cup U=U$，$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A-A=A$，$A-A=\varnothing$。

答：正确的有：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，$A\cup\varnothing=A$，

$A\cup U=U$，$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A-A=\varnothing$。

错误的有：$A\cap A=\varnothing$，$A\cup\varnothing=\varnothing$，$A\cap\varnothing=A$，$A-A=A$

---

14. 已知集合 $A=\{a,3,2,4\}$，$B=\{1,3,5,b\}$。若 $A\cap B=\{1,2,3\}$，求 a,b。

解　因　$A\cap B=\{a,3,b\}=\{1,2,3\}$

所以 A 和 B 中必包括 1,2,3 三个元素。所以 $a=1,b=2$

---

16. 如果 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{d,e,f\}$，验证：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

证明　由 $B\cup C=\{c,d,e,f\}$，得

$$A\cap(B\cup C)=\{c,d\}$$

又因　$A\cap B=\{c,d\}$，$A\cap C=\{d\}$

所以　$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{c,d\}$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

---

18. 用集合运算律证明：$X \cup (X \cap Y)' \cup Y = U$。

证明 $X \cup (X \cap Y)' \cup Y = X \cup (X' \cup Y') \cup Y$

$= [(X \cup X') \cup Y'] \cup Y = [U \cup Y'] \cup Y = U \cup Y = U$

19. 如果 $A = \{a,b,c,d\}$，$B = \{a,b,c\}$，求 $A \times B$。

解 $A \times B = \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c\}$

$= \{(a,a),(b,a),(c,a),(d,a),(a,b),(b,b),(c,b),(d,b),(a,c),(b,c),(c,c),(d,c)\}$

20. 如果 $X = Y = \{3,0,2\}$，求 $X \times Y$。

解 $X \times Y = \{(3,3),(0,3),(2,3),(3,0),(0,0),(2,0),(3,2),(0,2),(2,2)\}$

21. 设集合 $A = \{$北京，上海$\}$，$B = \{$南京，广州，深圳$\}$。求 $A \times B$ 与 $B \times A$。

解 $A \times B = \{$(北京，南京)，(北京，广州)，(北京，深圳)，(上海，南京)，(上海，广州)，(上海，深圳)$\}$

$B \times A = \{$(南京，北京)，(南京，上海)，(广州，北京)，(广州，上海)，(深圳，北京)，(深圳，上海)$\}$

22. 设集合 $X = \{x_1,x_2,x_3\}$，$Y = \{y_1,y_2\}$，$Z = \{z_1,z_2\}$，求 $X \times Y \times Z$。

解 $X \times Y \times Z = \{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_1,z_1),(x_3,y_1,z_1),(x_1,y_2,z_1),(x_2,y_2,z_1),(x_3,y_2,z_1),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_2),(x_2,y_1,z_2),(x_3,y_1,z_2)\}$

23. 解下列不等式：

(1) $x^2 < 9$

解 $-3 < x < 3$

(2) $|x-4| < 7$

解 $-7 < x-4 < 7$，从而 $-3 < x < 11$