21世纪高等院校教材

高等数学

方桂英　崔克俭　主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

高等数学

方桂英　崔克俭　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是编者在教育大众化的新形势下，根据多年的教学实践编写的高等数学教材. 内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、微分方程与差分方程、无穷级数. 每节后附有习题，每章后附有总习题，书末附有部分习题答案与提示. 本书在编写过程中力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂.

本书可供高等农林院校非数学类各专业的学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/方桂英，崔克俭主编. —北京：科学出版社，2009
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-025037-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①方…②崔… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 121990 号

责任编辑：李鹏奇 李晓鹏 唐保军 / 责任校对：赵桂芬
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：19 1/4
印数：1—5 000 字数：373 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《高等数学》编委会

主　编　方桂英　崔克俭

副主编　吴　坚　曾海福　韩忠海

参　编　胡菊华　程国华　赵喜梅　岳超慧

前　言

本书紧紧围绕全国高等农林院校高等数学教学大纲，以极限理论为工具，以微积分为核心，全面系统地介绍了高等数学的基本理论、方法及其在农业科学和经济管理科学等领域中的应用.

在本书的编写过程中，我们几所学校结合各自多年的教学经验，通力合作，广泛交换意见，使本书能充分体现以下特点：

第一，加强基础，注重应用. 在讲清基本理论的基础上突出数学在实际问题中的应用，把数学建模这根主线贯穿全书的始终. 设置了较多的农业科学、经济管理科学等方面的应用性例题，注重提高学生的数学素质，培养学生应用数学解决实际问题的能力，同时培养学生的创新思维能力.

第二，传授方法，培养能力. 在教材结构的安排和设计上，通过对数学问题的论证和求解，向学生灌输高等数学的基本思想和方法，培养他们分析问题和解决问题的能力. 同时，我们尽量简化繁琐复杂的论证和计算，通过生动形象的描述使抽象理论具体化，使学生在掌握数学方法的基础上，不断增强学习的主动性.

第三，体系完整，结构严谨. 在教材内容的安排上，我们既考虑了初等数学与高等数学的衔接，又照顾到高等数学与后续课程的联系，力求做到承上启下、平稳过渡. 内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，一方面能使学生把握高等数学的思想方法，另一方面又可培养学生严密的逻辑思维能力.

例题和习题是教材的重要组成部分，在编写本书的过程中，我们力求例题和习题具有典型性、多样性，使它们既能提炼方法，又具有巩固理论和训练应用的双重价值. 希望学生深刻体会例题的思想和方法，尽量独立地做好每一道习题. 这对于加深基本理论的理解和掌握高等数学的方法无疑具有重要的意义. 书中每章后的总习题参照了历年的考研题型，旨在提高学生的应试能力和综合能力.

本书是高等农林院校非数学类各专业高等数学通用教材，也可作为其他高等院校非数学类各专业学生的参考书，还可作为科学技术与管理人员的自学及参考用书.

参加本书编写的有江西农业大学方桂英、曾海福、胡菊华、程国华老师，山西农

业大学崔克俭、韩忠海、赵喜梅老师，以及安徽农业大学吴坚、岳超慧老师. 全书由方桂英、崔克俭老师审阅并负责统稿. 编审工作得到江西农业大学胡建根、高晓波、孙爱珍、吴志远、邓梦薇、刘华明等教师的协助，在此表示衷心的感谢.

编者十分感谢科学出版社对本书出版给予的关心与大力支持.

限于编者的水平，本书难免有不妥之处，敬请广大读者和授课教师批评指正.

编　者

2009 年 3 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

函数是数学中最重要的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，连续性是函数的一个重要性质. 本章将介绍函数的概念与性质，函数极限的概念及其性质与运算，并运用函数的极限讨论函数的连续性.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

首先看几个例子.

例 1.1.1（自由落体问题）　一个自由落体，从开始下落时算起，经过的时间设为 t(s)，在这段时间中落体的路程设为 s(m). 由于只考虑重力对落体的作用，而忽略空气阻力等其他外力的影响，如果落体从开始到着地所需的时间为 T，那么从物理学知道，s 与 t 之间有如下的依赖关系（其中 g 为重力加速度）：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

例 1.1.2　某化工公司统计去年农用化肥月生产量如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量/万吨	5.1	5.2	5.6	6.2	5.9	5.5	5.8	5.0	6.1	5.4	4.2	4.1

从上表可以看出过去一年该公司月产量 x（万吨）与时间 t（月）之间有着确定的对应关系.

例 1.1.3　图 1.1.1 是气温自动记录仪描出的某地一天的温度变化曲线，它给出了气温 T(℃)与时间 t(h)之间的依赖关系.

时间 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$，当 t 在这范围内任取一值时，从图 1.1.1 中的曲线可找出气温的对应值.

上述几个例子所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系，当一个变量在它的定义域中任意取定一值时，另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之对应. 把这种确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念.

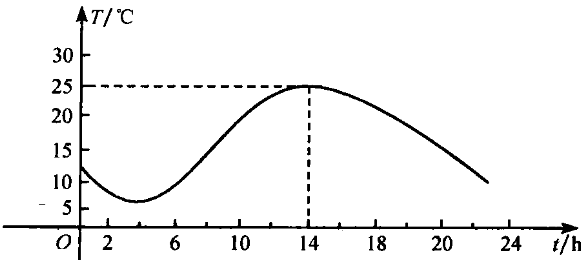

图 1.1.1

定义 1.1.1　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，f 是一个对应法则. 如果对于 D 中的每一个 x，按照对应法则 f，都有确定的唯一实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数**. 集合 D 称为函数 f 的**定义域**，与 D 中 x 相对应的 y 称为 f 在 x 处的**函数值**，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

称全体函数值构成的集合为函数 f 的**值域**，一般记为 $f(D)$.

如果把 x,y 分别看成 $D,\mathbf{R}$ 中的变量，则称 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

函数的定义中有两个**基本要素**，就是定义域与对应法则. 两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域相同，对应法则也相同.

函数关系表示法通常有三种：**解析式法**、**列表法**和**图示法**.

下面再看几个函数例子.

例 1.1.4　根据《中华人民共和国个人所得税法》(2007 年 12 月 29 日第五次修正)，工资、薪金所得缴纳个人所得税的税率如表 1.1.2 所示.

表 1.1.2

级　数	月工资/x	税率/%
0	$0\leqslant x\leqslant 2000$	0
1	$2000<x\leqslant 2500$	5
2	$2500<x\leqslant 4000$	10
3	$4000<x\leqslant 7000$	15
4	$7000<x\leqslant 22000$	20
5	$22000<x\leqslant 42000$	25
6	$42000<x\leqslant 62000$	30
7	$62000<x\leqslant 82000$	35
8	$82000<x\leqslant 102000$	40
9	$x>102000$	45

采用超额累进计算税费的方法. 若记月工资为 x(元)，应缴纳的税款为 y(元)，则 y 是 x 的函数. 根据超额累进计算税费的方法，该函数为

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000,\\ 0.05(x-2000), & 2000<x\leqslant 2500,\\ 25+0.1(x-2500), & 2500<x\leqslant 4000,\\ 175+0.15(x-4000), & 4000<x\leqslant 7000,\\ 625+0.2(x-7000), & 7000<x\leqslant 22000,\\ 3625+0.25(x-22000), & 22000<x\leqslant 42000,\\ 8625+0.3(x-42000), & 42000<x\leqslant 62000,\\ 14625+0.35(x-62000), & 62000<x\leqslant 82000,\\ 21625+0.4(x-82000), & 82000<x\leqslant 102000,\\ 29625+0.45(x-102000), & x>102000.\end{cases}$$

例 1.1.4 中，函数有时需要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同的式子表示的函数称为**分段函数**.

下面介绍几个常见的分段函数.

例 1.1.5 绝对值函数(图 1.1.2)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例 1.1.6 符号函数(图 1.1.3)

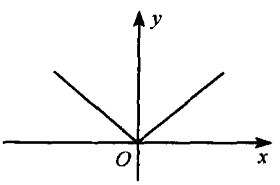

图 1.1.2

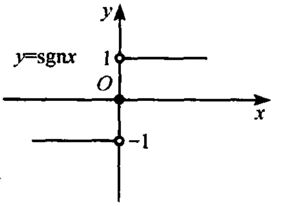

图 1.1.3

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

对任意实数 x，满足关系

$$x=|x|\,\mathrm{sgn}x.$$

例 1.1.7 取整函数(图 1.1.4)

$$y=[x],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

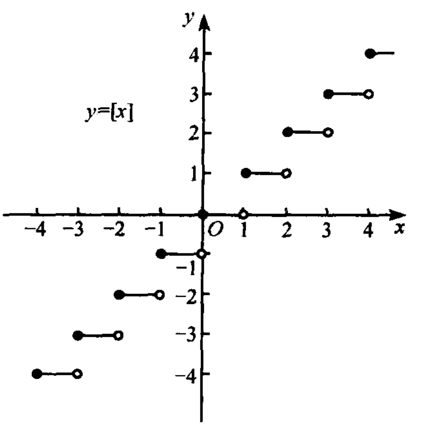

图 1.1.4

1.1.2 函数的基本性质

1. *有界性*

设函数 $f(x)$在 D 上有定义，若存在常数

k_1(或 k_2),使对一切 $x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant k_1 \quad (\text{或 } f(x)\geqslant k_2),$$

则称 $f(x)$在 D 上**有上界**(或**有下界**),称 k_1(或 k_2)为 $f(x)$在 D 上的**上界**(或**下界**).若存在正数 M,使对一切 $x\in D$,有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$在 D 上**有界**,这时也称 $f(x)$在 D 上是**有界函数**.如果对任给的正数 M,总存在 $x_1\in D$,使 $|f(x_1)|>M$,就称 $f(x)$在 D 上**无界**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在它的定义域$(-\infty,+\infty)$内有界;函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[1,+\infty)$上有界,在$(0,1)$内却是无界的,因为对任给的正数 $M>1$,总存在 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,使

$$|f(x_1)|=\left|\frac{1}{x_1}\right|=2M>M.$$

容易证明,函数 $f(x)$在 D 上有界的充分必要条件是:它在 D 上既有上界又有下界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$在 D 上有定义,如果对 D 中任意两个数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在 D 上**单调增加**(或**单调减少**).

单调增加或单调减少函数统称为**单调函数**.

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的;函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上单调减少,而在区间$[0,+\infty)$上单调增加,但在整个区间$(-\infty,+\infty)$内却不是单调的.

3. 奇偶性

设 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 D 关于原点对称,如果对任意 $x\in D$,总有

$$f(-x)=-f(x) \quad (\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**(或**偶函数**).

例如,函数 $y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 都是奇函数,函数 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 都是偶函数,而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

在坐标平面上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$在 D 上有定义,若存在常数 $l\neq 0$,使对任意 $x\in D$,总有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的一个**周期**. 显然，若 l 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $kl(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也都是它的周期，所以，一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**.

如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，$\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

注意 并非任何周期函数都有最小正周期. 例如，常量函数 $f(x)=C$ 是周期函数，任何实数都是它的周期，因而不存在最小正周期.

1.1.3 反函数与复合函数

1. *反函数*

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 若对 $f(D)$ 中每一值 y，D 中有唯一值 x 与之相对应，且 $y=f(x)$，这样便得到 $f(D)$ 上一个新函数，称此函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

一般地，$y=f(x)(x\in D)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)(x\in f(D))$. 在同一坐标平面上，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例如，函数 $y=x^3$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上反函数是 $y=-\sqrt{x}$.

注意 并不是任何一个函数都有反函数. 可以证明，单调增加(减少)函数必有反函数，且反函数也是单调增加(减少)的.

2. *复合函数*

定义 1.1.3 已知函数 $y=f(u)$ 的定义域为 E，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 $\varphi(D)$. 如果 $E\cap\varphi(D)\neq\varnothing$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**.

注意 习惯上称 $y=f(u)$ 为**外函数**，$u=\varphi(x)$ 为**内函数**. 定义 1.1.3 表明只有当内函数的值域与外函数的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合.

例如，函数 $y=\cos u$ 与 $u=x^2+1$ 可以复合成函数

$$y=\cos(x^2+1),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

又如，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 可以复合成函数

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1,1].$$

但函数 $y=\sqrt{u-2}$ 与 $u=\sin x$ 就不能进行复合，因为 $y=\sqrt{u-2}$ 的定义域 $[2,+\infty)$