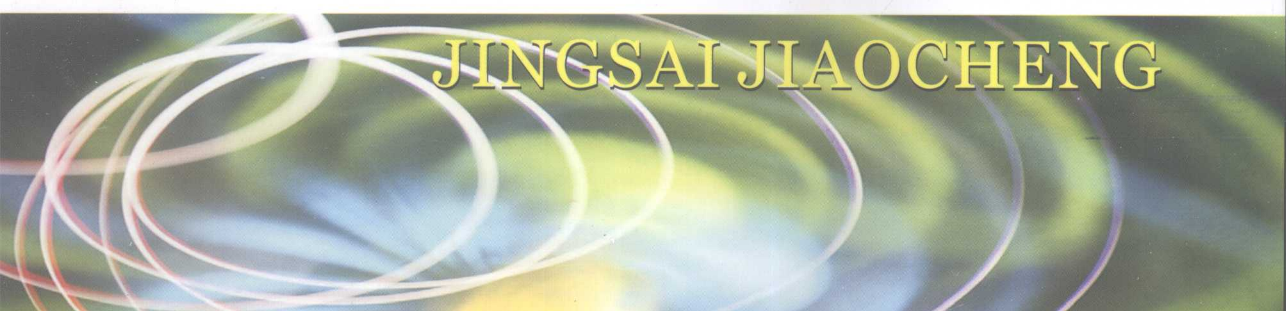
21世纪高职高专课程改革新教材

高等数学竞赛教程

GAODENG SHUXUE

张瑜　主编



苏州大学出版社

21 世纪高职高专课程改革新教材

高等数学竞赛教程

张　瑜　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛教程/张瑜主编．—苏州：苏州大学出版社，2009.6
21世纪高职高专课程改革新教材
ISBN 978-7-81137-237-3

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第082692号

高等数学竞赛教程
张 瑜 主编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号 邮编：215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址：宜兴市南漕镇 邮编：214217)

开本 787mm×960mm 1/16 印张 12 字数 227千
2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-237-3 定价：21.00元

苏州大学出版社营销部 电话：0512-67258835
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

《高等数学竞赛教程》
编 委 会

前言

江苏省非理科专业大学生高等数学竞赛至今已举办了九届，部分地级市也每年举办一次大学生高等数学竞赛．为了给教学、科研任务繁重的教师提供一本辅导学生参加高等数学竞赛的教材，为了给学生和广大数学爱好者提供一本提高数学素质（特别是解题能力）的有益读物，我们组织多年从事高等数学竞赛辅导的教师，参考国内出版的一些相关资料，总结多次指导学生参加高等数学竞赛的经验，编写了这本书．

在内容上，本书以江苏省非理科专业大学生高等数学竞赛（大专组）考纲为要求，在课内教学内容的基础上，对相关内容进行了适当加深和拓宽．我们希望通过对一些典型例题的分析，使学生快速掌握一些常用的基本方法，提高解题能力．

本书由张瑜主编，第 1—3 章由李艳丽编写，第 4—7 章由郑雪芳编写，第 8 章由张瑜编写．

限于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正．

编者

2009 年 5 月

目录

第一章

函数、极限与连续

主要内容

一、函数

1. 函数的概念

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则总有唯一确定的值 y 与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

注　函数定义中的两个要素.

(1) 定义域 D：它表示 x 的取值范围.

(2) 对应法则 f：它表示由给定 x 值求 y 的方法.

例 1　下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　(1) 不相同，因为两函数的定义域不同.

(2) 相同，因为两函数的定义域、对应法则均相同.

例 2　已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，且 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi(x)<\frac{\pi}{2}$. 试求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

解　由于

$$1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x),$$

且

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi(x)\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故 $$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2),$$

于是 $$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,$$

即 $$0\leqslant x^2\leqslant 2.$$

于是函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

注 函数 $y=f(x)$ 是由函数表达式给出时，其定义域是使函数表达式有意义的自变量取值范围的全体. 使函数表达式有意义的条件：

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 负数不能开偶次方；

(3) 对数的真数部分必须为正数；

(4) $\arcsin x,\arccos x$ 要求 $|x|\leqslant 1$；

(5) $\tan x,\sec x$ 要求 $x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}$，$k$ 为整数；

(6) $\cot x,\csc x$ 要求 $x\neq k\pi$，k 为整数.

2. 函数的性质——有界性、单调性、周期性、奇偶性

(1) 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若存在正数 M，对 $\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

几个常见的有界函数：

在 $(-\infty,+\infty)$ 上，有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，$|\operatorname{arccot} x|<\pi$；

在区间 $[-1,1]$ 上，有 $|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant\pi$.

注 ① 函数 $y=f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的.

例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,2)$ 内有界.

② 正确区分无界函数和无穷大量.

函数有界性的判别方法：

① 直接法　用定义.

② 间接法　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减小)的.

函数单调性的判别方法：

① 利用定义.

② 利用导数，对可导函数 $y=f(x)$，若 $y'>0$，则 $y=f(x)$ 单调增加；若 $y'<0$，则 $y=f(x)$ 单调减小.

(3) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个不为零的常数 T，使得对 $\forall x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，且周期为 T.

函数的周期性的判别方法：

① 利用定义，计算 $f(x+T)=f(x)$.

② 利用常见周期函数的周期进行判别和计算.

例如：由 $\sin x$，$\cos x$ 的周期为 2π，推知 $|\sin x|$，$|\cos x|$，$\sin 2x$，$\cos 2x$ 的周期为 π；由 $\tan x$，$\cot x$ 的周期为 π，推知 $|\tan x|$，$|\cot x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$，$\tan\frac{x}{2}$，$\cot\frac{x}{2}$ 的周期为 2π.

(4) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$(或 $-f(x)$)，则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

注　① 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

② 若函数的定义域关于原点不对称，则此函数为非奇非偶函数.

③ 若 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数和偶函数的和，即 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$.

函数奇偶性的判别方法：

① 利用定义，计算 $f(-x)=f(x)$(或 $-f(x)$).

② 利用运算性质.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 为两个函数，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集，则由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，u 为中间变量.

复合函数的分解是求复合函数导数的基础.

4. 基本初等函数与初等函数

掌握基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)的

定义域、值域、图形特征.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围中,对应于不同的解析式来表示函数,称为分段函数.

例如:$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1, \\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x+e^x, & x<-1. \end{cases}$

注 (1) 掌握分段函数在分段点的极限、连续性、可导性.

(2) 分段函数一般不是初等函数.

二、极限

(一) 数列的极限

1. 数列极限的定义

若当数列$\{x_n\}$的项数n无限增大时,它的一般项x_n无限接近于某个确定的常数a,则称a为数列$\{x_n\}$的极限或称数列$\{x_n\}$收敛于a,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 否则,极限不存在,或称数列$\{x_n\}$发散.

2. 收敛数列的基本性质

(1) 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$的极限是唯一的.

(2) 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$一定有界.

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),则存在正数整数$N$,使得当$n>N$时,都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

(4) 若数列$\{x_n\}$收敛于a,则它的任一子数列也收敛于a.

3. 数列收敛准则

(1) 数列收敛的夹逼准则

若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足下列条件:

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$,

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 单调有界收敛准则

① 若数列$\{x_n\}$单调增加且有上界，即存在数M，使得$x_n\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且不大于$M$；

② 若数列$\{x_n\}$单调减小且有下界，即存在数m，使得$x_n\geqslant m(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且不小于$m$.

（二）函数的极限

1. 函数在无穷大处的极限

设函数$f(x)$在$|x|>a$时有定义. 若当$|x|$无限增大时，对应的函数值$f(x)$无限趋近于某个确定的常数A，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

类似地可以定义$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

注　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

同样$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$不存在，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=1$.

2. 函数在有限点处的极限

若函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，当x趋近于x_0（但不等于x_0）时，函数$f(x)$无限趋近于某个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

同样地可定义$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

注　(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x)$在$x_0$处有无定义无关.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 3　设函数$f(x)$在点$x=0$处的左、右极限均存在，则下列等式中不正确的是　（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(-x)$　　(B) $\lim\limits_{x\to0}f(x^2)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(|x|)$　　(D) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

解　由左、右极限的定义知(A)，(B)，(C)三个等式的两边均为函数$f(x)$的右极限，故正确. 而$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不一定存在，故(D)错.

3. 函数极限的性质

(1) 函数极限的唯一性

若函数 $f(x)$ 的极限存在，则极限唯一.

(2) 局部有界性、保号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，则有

① 局部有界性：在 x_0 的某个去心邻域内，函数 $f(x)$ 有界.

② 局部保号性：当 $A>0$（或 $A<0$）时，在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

4. 极限的运算法则

(1) 极限的四则运算法则

定理 1 如果 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，那么

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

③ 当 $B\neq 0$ 时，有 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

(2) 复合函数的极限法则

定理 2 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 满足下列两个条件：

① $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$，

② 当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x_0)\neq a$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a} f(u)=A.$$

5. 两个重要极限

(1) 重要极限一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) 重要极限二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

注 两个重要极限的一般形式：

(1) $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$；　　(2) $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

例 4 下列结论中正确的是　　(　　)

(A) 若两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散，则数列 $\{a_n+b_n\}$ 必发散

(B) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，对任意数列 $\{b_n\}$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$

(C) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都发散，则数列 $\{a_n b_n\}$ 发散

(D) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 必存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

解 (D) 正确.(A)、(B)、(C) 不正确，可举例说明.

例 5　设$\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}-y_n)=0$，若(　　)，则数列$\{y_n\}$收敛.

(A) $\{y_n\}$是单调数列　　(B) $\{y_n\}$是有界数列

(C) $\{y_{2n}\}$与$\{y_{2n+1}\}$都是单调数列　　(D) $\{y_{2n}\}$与$\{y_{2n+1}\}$收敛

解　若取 $y_n=\sqrt{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

$\{y_n\}$，$\{y_{2n}\}$，$\{y_{2n+1}\}$都是单调的，但 $\lim\sqrt{n}=x$，故否定(A)、(C).

若取 $y_n=\sin\sqrt{n}$，显然$\{y_n\}$有界，且

$$\lim_{n\to\infty}(y_{n+1}-y_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right)=0,$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n}$不存在，故否定(B).

因此应选择(D). 事实上，设$\{y_{2n}\}$收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}y_{2n}=A,$$

又 $$\lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}[(y_{2n+1}-y_{2n})+y_{2n}]=0+A=A,$$

所以 $$\lim y_n=A.$$

注　数列$\{y_n\}$收敛的充要条件是$\{y_{2n}\}$与$\{y_{2n+1}\}$均收敛且极限相同.

例 6　设 $x_0=1,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=0,1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

解　由 $x_0=1,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{1+x_n}<2$，知$\{x_n\}$有上界.

又　$x_n>0(n=0,1,2,\cdots)$，

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})},$$

这表明 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1}同号.

已知 $x_1-x_0=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x_{n+1}-x_n>0$，即$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界收敛准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则在 $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$两边取极限得 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$，即 $a^2-a-1=0$，解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 又 a 非负，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

（三）无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

若当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，$\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量.

2. 无穷大量

若当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，$\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量.

注 不要将无穷小量与很小的数混为一谈. 0 可以作为无穷小量.

3. 无穷小量的性质

(1) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的代数和、乘积仍为无穷小量.

(3) 无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量.

4. 无穷小量的比较

设 α, β 是在自变量的同一变化过程中的无穷小量，且 $\alpha \neq 0$.

(1) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 为 α 的高阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$，也称 α 为 β 的低阶无穷小.

(2) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c$（$c$ 为常数，$c \neq 0$），则称 β 与 α 是同阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

特别地，若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 α 与 β 为等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

5. 等价无穷小的替换原理

在自变量的同一变化过程中，$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 均为无穷小，且 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$（α, α' 均不为 0）. 若 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

常用的等价无穷小代换有：

$\varphi(x) \to 0$ 时，

$$\varphi(x) \sim \sin\varphi(x) \sim \tan\varphi(x) \sim \arcsin\varphi(x) \sim \arctan\varphi(x) \sim \ln[1+\varphi(x)] \sim e^{\varphi(x)}-1,$$

$$1-\cos\varphi(x) \sim \frac{1}{2}[\varphi(x)]^2, \qquad \sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1 \sim \frac{1}{n}\varphi(x),$$

$$a^{\varphi(x)}-1 \sim \varphi(x)\ln a \ (a>0, a \neq 1).$$

三、函数的连续性

1. 函数在点 x_0 处连续的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在且等于它在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

注　(1) $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 左、右均连续.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 连续表示以下三条同时满足：

① $f(x)$ 在点 x_0 有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，即出现下列三种情况中的至少一种情况：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处没有定义，

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

3. 间断点的分类

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 并且

(1) 当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$ 时，x_0 为可去间断点.

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x_0)$ 时，x_0 为跳跃间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

4. 连续函数的运算

(1) 连续函数的四则运算法则

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)$

$\neq 0$)在点 x_0 处仍连续.

(2) 复合函数的连续性

设函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续,函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续.

(3) 反函数的连续性

在区间 (a,b) 内的单调连续函数,其反函数在其相应区间内仍是单调连续函数.

(4) 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内都是连续的.一切初等函数在其定义区间内都是连续的.所谓定义区间,是指包含在定义域内的区间.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值.

(2) 有界性定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(3) 介值定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且在此区间的端点处取不同的函数值 $f(a)=A$,$f(b)=B$,则对于 A,B 之间任意一个数 c,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=c(a<\xi<b)$.

(4) 零点定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在开区间 (a,b) 内至少存在函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少有一点 ξ,$\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

例 7 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则下列极限一定存在的是 ( )

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\alpha$($\alpha$ 为实数) (B) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$ (D) $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan f(x)$

解 选择(B),其他都不一定存在.

例 8 讨论 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点的类型.

分析 在 $x=1$,$x=0$ 处,函数 $f(x)$ 无定义.

解 在 $x=0$ 处,因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=+\infty,$$