江西省普通高校专升本招生考试大纲配套用书

指南针教育
www.znzedu.com

江西专升本
WWW.JXZSB.COM.CN

指南针教育专升本课题组 组织编写

江西专升本应试指南

高等数学

主编 叶祥企

★ 依据最新题型编写
★ 透彻剖析考试要点
★ 权威专家深度参与
★ 全面总结命题动向
★ 历年考卷全真测试
★ 模拟试题全新仿真

江西高校出版社

指南针教育
www.znzedu.com

江西专升本
WWW.JXZSB.COM.CN

江西专升本应试指南

高等数学

主编 叶祥企

江西专升本网：www.jxzsb.com.cn

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

江西专升本应试指南 高等数学/李凯，叶祥企主编.
—南昌:江西高校出版社，2009.2
ISBN 978-7-81132-502-7

Ⅰ.江… Ⅱ.李…，叶… Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料 Ⅳ.G724.4

中国版本图书馆 CIP数据核字(2009)第021489号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8529392,8504319
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	江西省方芳印刷有限公司
照　　排	江西省方芳印刷有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	55
字　　数	1367千字
版　　次	2009年2月第1版第1次印刷
印　　数	1~3000册
书　　号	ISBN 978-7-81132-502-7
定　　价	95.00元

序

普通高校专升本招生考试为广大的优秀普通专科应届毕业生进入本科阶段继续深造学习提供了一个充分证明自我、提升自我、展示自我的良好平台。

由于普通高校专升本考试是一种选拔性考试，通过近几年招生人数和报考人数的比例可以总结出：随着就业压力越来越大，考试竞争越趋激烈。我们在考试中多得一分，人生道路也许就此改变，所以选择一套高质量的辅导学习教材就十分重要。

为帮助广大参加普通高校专升本的考生顺利通过考试，《江西专升本统考英语》（第一版）出版发行后得到了考生们的热烈欢迎。为填补江西省普通高校专升本考试辅导教材的空白，今年我们组织了多所高校中长期从事专升本考试命题研究工作的专家、教授，严格按照江西省各高校最新专升本招生考试大纲要求，在认真研究分析历年来普考专升本招生考试命题的基础上，编写了这套《江西专升本应试指南》系列丛书，含《统考英语》、《高等数学》、《大学语文》、《计算机基础》四分册。

依据最新题型编写：本丛书紧扣最新考试大纲，对近几年的各类新、老考试题型进行了全面的归纳总结，使考生能够充分把握考试大纲范畴，不遗漏知识点。

透彻剖析考试要点：依据考试大纲对考试重点、难点、要点进行透彻的剖析，能让考生充分掌握各种题型的解题精要，迅速地提高考试成绩。

权威专家深度参与：本着高度负责任的态度，课题组聘请从事过命题或阅卷且深刻了解命题规律及动向的权威专家来编写、修订本套教材，以期给考生最实用的指导。

全面总结命题动向：课题组在综合各高校的考试命题规律的同时，也在全面总结命题动向，以期把握最新的考试要点、预测最新的命题趋势。

历年考卷全真测试：本套丛书收录了各科专升本考试历年真题，考生可亲自实战演练测试，全面理解考试规律，把握考试命题方向，增加考试自信心。

模拟试题全新仿真：依据考纲及历年真题，由指南针教育专升本课题组专家编写了多套预测性、实用性强的仿真模拟试题，使考生的每一次模拟都身临其境，实战高效。

一分耕耘，一分收获，相信通过本套丛书的全面复习，将会令每位考生受益匪浅。在专升本这条道路上，愿每个考生都能把握机会，考出优异成绩，成功升入自己理想的学府。

虽然我们抱着精益求精的态度来重新编写、修订本套丛书，但百密难免一疏，肯请同行及考生在使用过程中多提宝贵建议，以便再版时更正。

指南针教育专升本课题组

前　言

本书是综合了江西省各高校《专升本高等数学考试大纲》的基础上，结合各高校专升本高等数学考试题目的特点，以及各高校的一线优秀教师多年教学和辅导经验而编写的。内容包括高等数学基础知识（函数及其性质，数列极限与函数极限，函数的连续性，导数与微分，微分中值定理与泰勒公式，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量运算，多元函数微分法及其应用，二重积分及其应用，无穷级数，常微分方程）、一元函数微积分学习指导（函数，极限与连续，导数与微分，中值定理及导数应用，不定积分，定积分，定积分应用）、经济数学学习指导（数学在经济学中的应用）、线性代数（行列式，矩阵及其运算，矩阵的初等变换与线性方程组，向量组的线性相关性）四大部分。

本书的特点是全书包括了江西省各高校高等数学考试大纲中所涉及的全部内容，并将考试内容分为基础知识专题及学习指导，便于考生复习。我们在编写的过程中按照由浅入深的原则配备了大量例题，每个例题都有非常详细的解题过程，便于数学基础较差的考生自学。本书的许多例题是历年高等数学的专升本考试真题，而且还包括了近年高等数学专升本的几套真题，便于考生进行实战演练。

本书可作为普通高等学校专升本的教材，也可作为高等院校各专业的师生、成人高校专升本和自学考试人员参考。

参加本书编写工作的有江西师范大学叶祥企教授（第一部分）、华东交通大学刘二根教授（第二部分）、江西财经大学王平平副教授（第三部分）、江西农业大学曾海福副教授（第四部分）。由刘二根、汪万根、李凯对全书进行审稿和统稿。

由于编者水平有限，加上时间仓促，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编写组

目　　录

第一部分　高等数学基础知识

第二部分　一元函数微积分学习指导

第三部分　经济数学学习指导

第四部分　线性代数学习指导

第五部分　模拟试题与历年真题

第一讲 函数及其性质

一、函数概念

1、函数定义：如果对于变量 x 在其变化范围 D_f 内任取一个值，另一个变量 y 按照一定的规则 f，总有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y = f(x)\ ,\ x \in D_f$$

其中 x 叫自变量，它的变化范围 D_f 称为函数 $f(x)$ 的定义域；y 叫因变量，其变化范围 $W_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为 $f(x)$ 的值域. D_f 与 W_f 的几何意义见图 1－1。

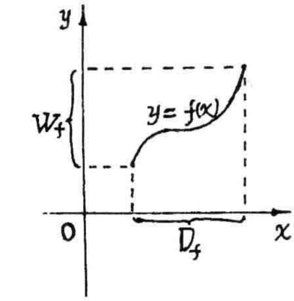

图 1-1

对于函数的定义，应注意以下几点：

(1) 定义域、对应规则和值域是函数定义中的三要素. 其中最主要的是定义域 D_f 和对应规则 f. 当 D_f 和 f 确定之后，函数 $y = f(x)$ 就完全确定了. 值域是随着定义域和对应规则的确定而确定.

解题时往往因忽视函数的定义域而产生错误.

例如：函数 $y = \log_a x^2$ 与 $y = 2\log_a x$ 是两个不同的函数，前者的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，而后者的定义域为 $(0, +\infty)$，而 $y = \log_a x^2$ 与 $y = 2\log_a |x|$ 才是两个恒等的函数.

又如，有人将 $y = x^2 (x > 0)$ 错看成了偶函数，原因是他没有注意到这个函数的定义域 $(0, +\infty)$ 关于原点不对称. 又如，“在边长为 a 的一块正方形铁皮的四个角上都截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折叠做成一个无盖的方盒. 问截掉的小正方形边长为多大时，方盒的容积最大?”对于这个问题，首先要将方盒的容积 V 表示为小正方形边长 x 的函数，显然可得

$$V = x(a - 2x)^2\ ,\ 0 < x < \frac{a}{2}$$

V 的定义域为 $(0, \frac{a}{2})$ 不能漏掉，否则求出两个驻点 $x_1 = \frac{a}{6}$，$x_2 = \frac{a}{2}$，x_2 本应舍去而没有舍去，造成解题错误. 造成这种错误的原因就是对“一个函数是由函数的定义域和对应规则两个因素决定的”没有深刻理解. 由实际问题得到的函数，确定函数的定义域时，应考虑实际意义.

(2) 一个函数与用什么字母表示自变量无关，即如果 x、t、u 均表示自变量，则 $y = f(x)$，$y = f(t)$，$y = f(u)$ 被认为是同一个函数. 例如，$y = \sin x$，$y = \sin t$，$y = \sin u$，当 x、t、u 均表示自变量（不是中间变量）时，它们是同一个函数.

(3) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$f(x)$ 不一定在 x_0 处连续. 例如 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处有定义，但不连续.（见图 1－2）

(4) 定义域与值域完全相同的两个函数不一定恒等.（见图 1－3）

[例 1] 判定下列各对函数是否恒等

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $g(x)=x-1$

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $g(x)=\sin x$

(3) $f(x)=\ln(x\sin x)$ 与 $g(x)=\ln x+\ln\sin x$

(4) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sin(\arcsin x)$

(5) $f(x)=\sqrt[4]{x^4}$ 与 $g(x)=|x|$

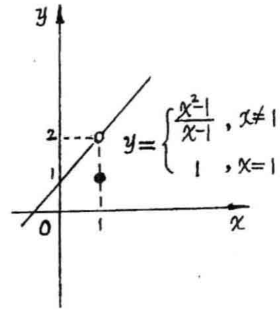

图 1-2

解:(1) $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,$D_g=(-\infty,+\infty)$,不恒等.

(2)不恒等. $f(x)=|\sin x|$,$g(x)=\sin x$,值域不同.

(3)不恒等. D_f 由不等式 $x\sin x>0$ 决定,即由 $\begin{cases}\sin x>0\\ x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin x<0\\ x<0\end{cases}$ 决定,而 D_g 只由 $\begin{cases}x>0\\ \sin x>0\end{cases}$ 确定.

(4)不恒等. $D_f=(-\infty,+\infty)$,$D_g=[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$.

(5)恒等. $f(x)=\sqrt[4]{x^4}=|x|$,$g(x)=|x|$.

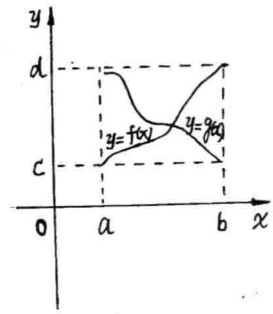

图 1-3

2、函数 $y=f(x)$ 中的对应规则 f 的具体含义

在一个具体的函数式子中,对应规则 f 是有具体含义的. 例如若 $f(x)=3x^2+\sin x+2\ln x$,这时 f 就好像下面的运算框架:

$$f(\ )=3(\ )^2+\sin(\ )+2\ln(\ )$$

即只须将函数中的 x 统统换成小括号( ),其余的不动. $f(x)$ 就是将 x 放到括号内;$f(2)$ 就是将 2 放到括号内,即为 $f(2)=3(2)^2+\sin(2)+2\ln(2)$;$f(a+1)$ 就是将 $a+1$ 放入括号内得 $f(a+1)=3(a+1)^2+\sin(a+1)+2\ln(a+1)$;同理

$f[f(x)]=3[f(x)]^2+\sin[f(x)]+2\ln[f(x)]$ 等等.

[例 2]设 $\varphi(x)=x^2$,$f(x)=2^x$,求 $\varphi[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$,$f[f(x)]$,$f[\varphi(x)]$

解:$\varphi[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=(x^2)^2=x^4$,$\varphi[f(x)]=[f(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}$

$$f[f(x)]=2^{f(x)}=2^{2^x},\ f[\varphi(x)]=2^{\varphi(x)}=2^{x^2}$$

[例 3]设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$ 及其定义域

解:$\because\ f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,$(x\neq 1)$

$\therefore\ f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}\overset{x\neq 1}{=\!=}\dfrac{1-x}{-x}=\dfrac{x-1}{x}(x\neq 1,x\neq 0)$

[例 4]设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f(f(f(x)))$

解:$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{\sqrt{1+[f(f(x))]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

注意：求复合函数$f[g[h(x)]]$在$x=a$处的函数值，只须先求$h(a)$，设$h(a)=b$，然后求$g(b)$，设$g(b)=c$，最后求出$f(c)$即为$f(g(h(a)))$，这样做比先求出函数$f[g[h(x)]]$再将$x=a$代入要简单很多.

[例5]设$f(x)=\frac{1}{1-x}$，则$f(f(f(4)))=$__________.

解：$f(4)=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$，$f(f(4))=f(-\frac{1}{3})=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$，

$$f(f(f(4)))=f(\frac{3}{4})=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

[例6]设$g(x)=1-x^2$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，则$f(\frac{1}{2})=$__________.

解：依题意$\frac{1}{2}=1-x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{2})$就是$f[g(x)]|_{x^2=\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$，$\therefore f(\frac{1}{2})=1$

3、已知以$u=g(x)$为中间变量的复合函数$f[g(x)]$，求$f(x)$

解这类问题的方法一般有两个.一个是“凑法”，将$f[g(x)]$的函数表达式凑成以$g(x)$为变量的函数，然后将u取代$g(x)$得$f(u)$，再将u换成x，即得$f(x)$（一个函数与用什么字母表示自变量无关；另一个方法是“作代换”，令$g(x)=u$，解出$x=g^{-1}(u)$代入$f[g(x)]$的表达式，即得$f(u)$，再将$f(u)$中的u换成x即为所求.采用哪一种方法，具体问题具体分析.

[例7] 设$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$

解：$\because f(x+\frac{1}{x})=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=(x+\frac{1}{x})^2-2$，　$\therefore f(x)=x^2-2$

[例8] 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}(x<0)$，则$f(x)=$__________.

解：$\because x<0$　$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=x-x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$，$\therefore f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x}}{x}$

（注：此题令$u=\frac{1}{x}$则$x=\frac{1}{u}$（$u<0$）也很容易）

[例9]设$f(\sin x)=\cos 2x+1$，则$f(\cos x)=$__________.

解：先求$f(x)$，再求$f(\cos x)$

$\because f(\sin x) = \cos 2x + 1 = 1 - 2\sin^2 x + 1 = 2(1 - \sin^2 x)$

$\therefore f(x) = 2(1 - x^2) \quad \therefore f(\cos x) = 2(1 - \cos^2 x) = 1 - \cos 2x$

4、求函数定义域的有关问题

(1)由实际问题(应用题)中建立的函数,确定函数的定义域时要符合实际意义.

例如,从50米高处自由下落的物体的路程 $S = \frac{1}{2}gt^2$,显然 $t \geqslant 0$,又由 $\frac{1}{2}gt^2 = 50 \Rightarrow t = \frac{10}{\sqrt{g}}$,

$\therefore$ 定义域 $D_s = [0, \frac{10}{\sqrt{g}}]$,如果函数 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 没有实际背景,g 表示一般常数,则这时的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2)对于没有实际背景的函数,求定义域只须考虑使这个函数本身有意义.求定义域应熟记下面的结果:

① $y = \frac{1}{f(x)}$ 必须 $f(x) \neq 0$,② $y = \sqrt[2n]{f(x)}$(n 为正整数)必须 $f(x) \geqslant 0$

③ $y = a^{f(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$,$f(x)$ 可以为任何实数

④ $y = \log_a f(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$,必须 $f(x) > 0$

⑤ $\begin{cases} y = \tan f(x) = \dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \\ y = \sec f(x) = \dfrac{1}{\cos f(x)} \end{cases}$ 必须 $\cos f(x) \neq 0$ 即 $f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$

⑥ $\begin{cases} y = \cot f(x) = \dfrac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \\ y = \csc f(x) = \dfrac{1}{\sin f(x)} \end{cases}$ 必须 $\sin f(x) \neq 0$ 即 $f(x) \neq k\pi (k \in Z)$

⑦ $\begin{cases} y = \arcsin f(x) \\ y = \arccos f(x) \end{cases}$ 必须 $|f(x)| \leqslant 1$

⑧ $y = \log_{\varphi(x)} f(x)$ 必须 $\begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$ 及 $f(x) > 0$

⑨分段函数的定义域为各段定义域的并集

⑩ $f(x) \pm g(x)$ 的定义域为 $D_f \cap D_g$

其次,要学会用图解法解下面的三角不等式

(i) $\sin x > 0$ 的解集为 $2k\pi < x < 2k\pi + \pi \ (k \in Z)$

$\sin x < 0$ 的解集为 $2k\pi - \pi < x < 2k\pi \ (k \in Z)$

(ii) $\cos x > 0$ 的解集为 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$

$\cos x < 0$ 的解集为 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \ (k \in Z)$

(iii) $\tan x > 0$ 和 $\cot x > 0$ 的解集均为 $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$

$\tan x < 0$ 和 $\cot x < 0$ 的解集均为 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi \ (k \in Z)$

注意:以上三角不等式的解集不用死记,只须用图形就很容易写出结果. 例如,对于(i)的两个结果,只须画出 $y = \sin x$ 的图形(图 1-4),从图上可以看出,在原点附近的一个周期 2π 长度的区间 $[-\pi,\pi]$ 上,当 $0 < x < \pi$ 时, $\sin x > 0$;当 $-\pi < x < 0$ 时, $\sin x < 0$,在 $0 < x < \pi$ 的两边加上 $2k\pi$,即得 $\sin x > 0$ 的解集, $2k\pi < x < 2k\pi + \pi\ (k \in Z)$;在 $-\pi < x < 0$ 两边加上 $2k\pi$,即得 $\sin x < 0$ 的解集, $2k\pi - \pi < x < 2k\pi\ (k \in Z)$. 同理(ii)、(iii)的结果可以用类似的方法获得.

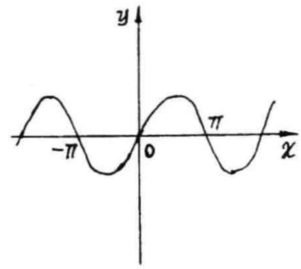

图 1-4

[例 10]求函数 $f(x) = \ln(x-1) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域

解:要使函数有意义,必须 $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>1 \text{ 或 } x<-1 \end{cases}$,

$\therefore D_f = (1, +\infty)$

[例 11] 求函数 $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域

解:要使函数有意义,必须 $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geqslant 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 1 \text{ 或 } x \leqslant -1$,

$\therefore D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

[例 12] 求函数 $y = \ln\sin x$ 的定义域

解:要使函数有意义,必须 $\sin x > 0 \Rightarrow 2k\pi < x < 2k\pi + \pi\ (k \in Z)$

故 $D_y = (2k\pi, 2k\pi + \pi)\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

[例 13]求函数 $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + \dfrac{1}{1-\ln x}$ 的定义域

解:要使函数有意义,必须 $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq e \end{cases}$,

$\therefore D_y = (0,e) \cup (e, +\infty)$

[例 14]求函数 $f(x) = \begin{cases} x+3, 2<|x| \leqslant 4 \\ 2x^2+1, |x| \leqslant 2 \end{cases}$ 的定义域,并作出其图形.

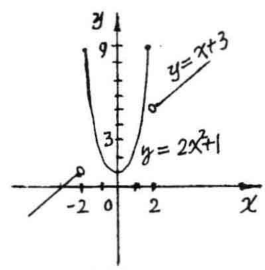

图 1-5

解:由于分段函数的定义域为各段定义域的并集,故 $D_f = \{x|2 < x \leqslant 4\} \cup \{x||x| \leqslant 2\} = [-4,4]$.

[例 15]已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$,则 $\varphi(x)$ 的定义域为__________.

解:应先求出 $\varphi(x)$,利用反函数的性质: $f^{-1}[f(x)] = x$,故由已知 $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$ 两边用 f^{-1} 作用得 $f^{-1}\{f[\varphi(x)]\} = f^{-1}(1-x^2)$ 即 $\varphi(x) = f^{-1}(1-x^2) = \arcsin(1-x^2)$

要使 $\varphi(x)$ 有意义,必须 $|1-x^2| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 2$,

故得 $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$

$\therefore D_\varphi = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

5、函数的图形

(1)应熟记基本初等函数的图形,要求能随手画出草图.

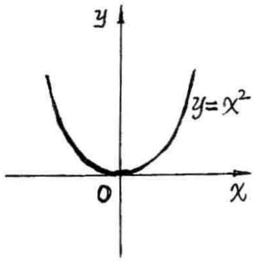

图 1–6

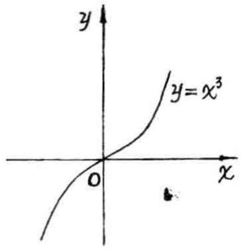

图 1–7

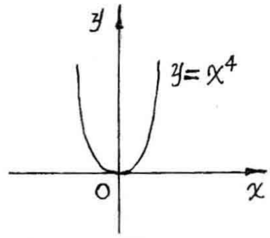

图 1–8

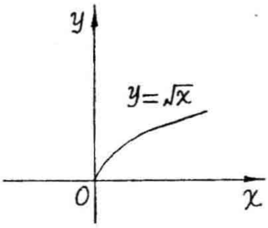

图 1–9

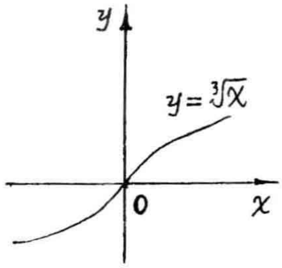

图 1–10

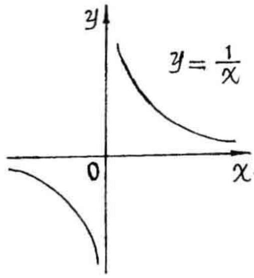

图 1–11

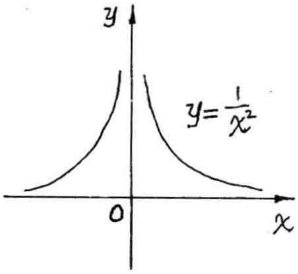

图 1–12

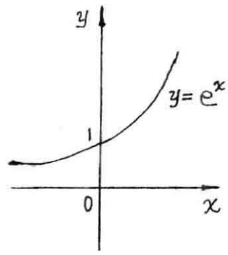

图 1–13

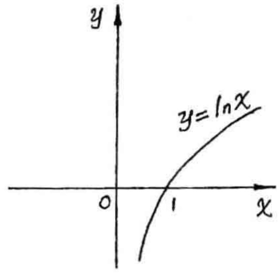

图 1–14

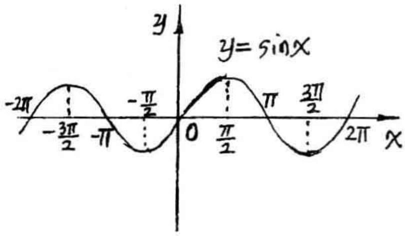

图 1–15

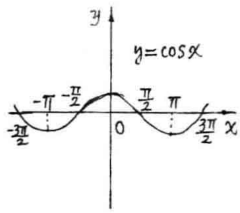

图 1–16

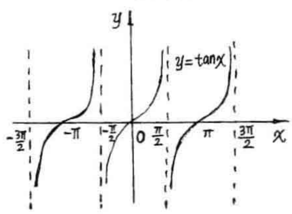

图 1–17

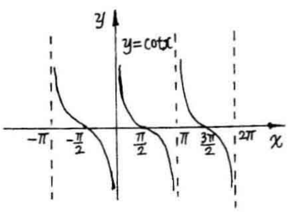

图 1–18

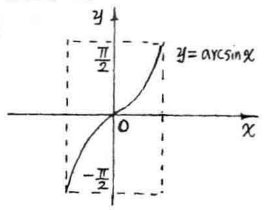

图 1–19

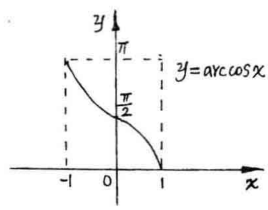

图 1–20

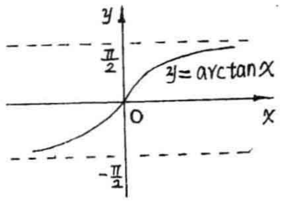

图 1-21

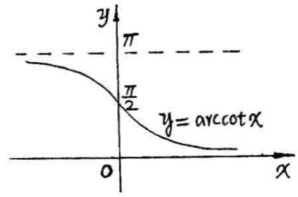

图 1-22

(2)函数 $y = f(x)$ 的图形与 $y = -f(x)$ 的图形对称于 x 轴

[例 16]作出函数 $y = -x^3$ 和 $y = -\ln x$ 的图形

解: $y = -x^3$ 与 $y = x^3$ 对称于 x 轴,其图形见(图 1-23)

　$y = \ln x$ 与 $y = -\ln x$ 对称于 x 轴,其图形见(图 1-24)

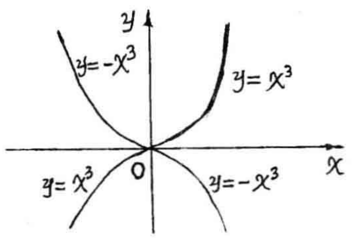

图 1-23

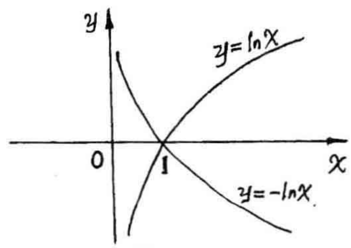

图 1-24

(3)函数 $y = f(x)$ 的图形与 $y = f(-x)$ 的图形对称于 y 轴

[例 17]作出函数 $y = e^{-x}$ 与 $y = \ln(-x)$ 的图形

解: $y = e^{-x}$ 与 $y = e^x$ 的图形对称于 y 轴,见图 1-25

　$y = \ln(-x)$ 与 $y = \ln x$ 的图形对称于 y 轴,见图 1-26

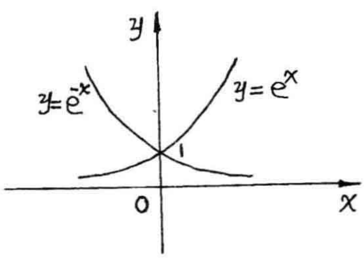

图 1-25

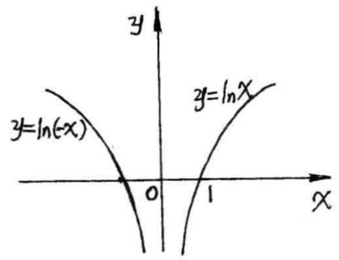

图 1-26

(4)函数 $y = f(x)$ 的图形与 $y = -f(-x)$ 的图形对称于原点

[例 18]作出 $y = -e^{-x}$ 的图形

解: $y = -e^{-x}$ 的图形与 $y = e^x$ 的图形对称于原点,见图 1-27

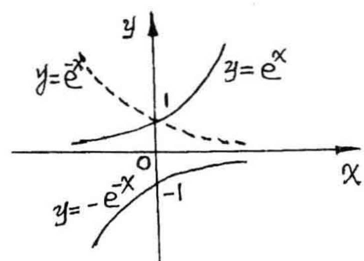

图 1-27

(5)设 $a > 0$,则 $f(x + a)$ 的图形可由 $f(x)$ 的图形右平移 a 个单位得到.

设 $a > 0$,则 $f(x - a)$ 的图形可由 $f(x)$ 的图形左平移 a 个单位得到.

[例 19]作出 $y = e^{x+2}$ 与 $y = \ln(x - 1)$ 的图形

解：$y = e^{x+2}$ 的图形可由 $y = e^{x}$ 的图形左平移 2 个单位得到.（图 1 - 28）

$y = \ln(x - 1)$ 的图形可由 $y = \ln x$ 右平移 1 个单位得到.（图 1 - 29）

(6)要作 $y = | f(x) |$ 的图象，可以先作出 $f(x)$ 的图形，然后将 x 轴下方的图形与 x 轴对称地翻到 x 上方去，即得 $y = | f(x) |$ 的图形.

[例 20]作出 $y = | \sin x |$ 和 $y = | x^{2} - 2 |$ 的图形

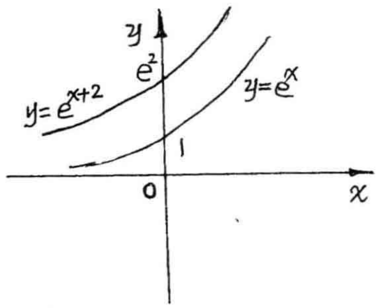

图 1–28

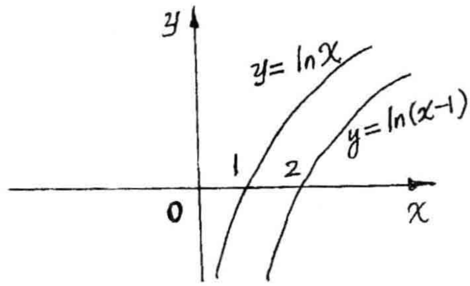

图 1–29

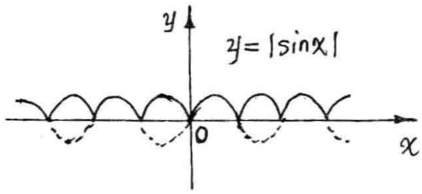

图 1–30

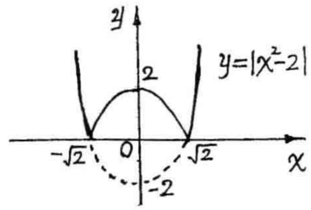

图 1–31

解：$y = | \sin x |$ 的图形见图 1 - 30；$y = | x^{2} - 2 |$ 的图形见图 1 - 31

(7)要记住下面一些常见函数的图形

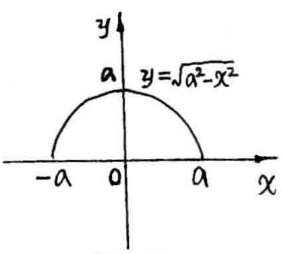

图 1–32

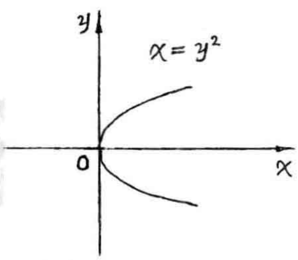

图 1–33

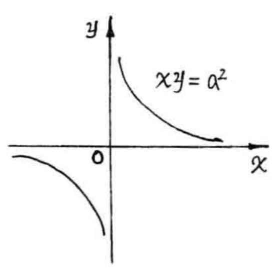

图 1–34

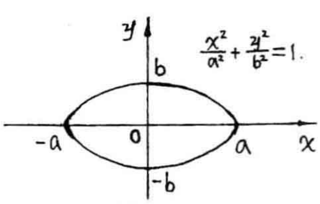

图 1–35

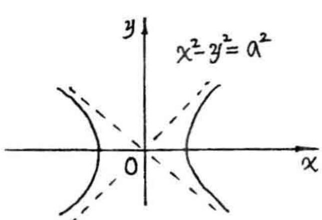

图 1–36

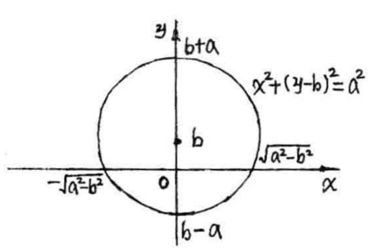

图 1–37

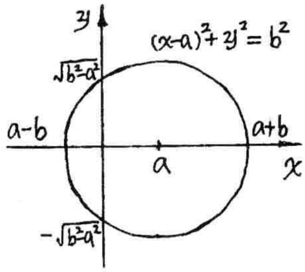

图 1-38

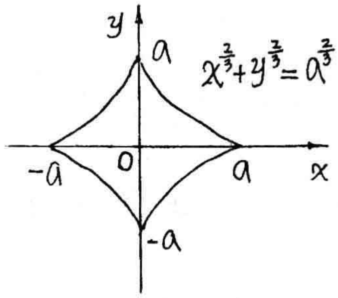

图 1-39

[例 21]作出函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的图形

解:由 $y=\sqrt{x-2}\left(\begin{cases}y\geqslant 0\\x\geqslant 2\end{cases}\right)$ 得 $y^2=x-2$

$\Rightarrow x=2+y^2\left(\begin{cases}y\geqslant 0\\x\geqslant 2\end{cases}\right)$ 其图形见图 1-40

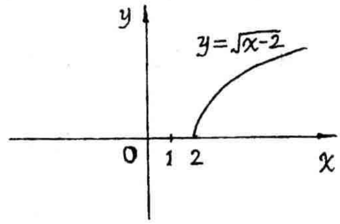

图 1-40

[例 22]作出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形

解:由 $y=ax^2+bx+c$ 配方得

$$y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$=a(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a})$$

$=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,此图形关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称,抛物线顶点在

$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$. $a>0$ 时,上凹, $a<0$ 时下凹

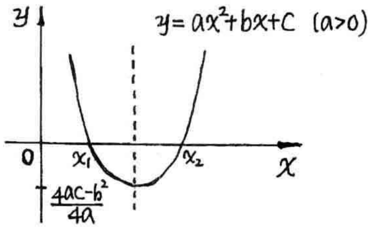

图 1-41

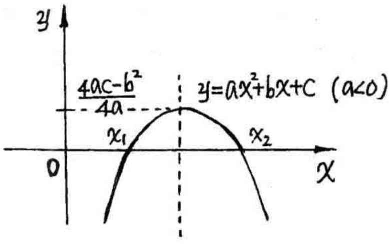

图 1-42

图 1-41,图 1-42 中的 x_1,x_2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根,如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根,则曲线 ax^2+bx+c 与 x 轴不相交.

6、高等数学中的几类特殊函数

(1)分段函数(定义域分成若干部分,不同的部分有不同的函数表达式)

[例 23] $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\\1+x,x>1\end{cases}$ 是一个分段函数,这里

$f(\frac{1}{4}) = 2\sqrt{x}\Big|_{x=\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$，$f(3) = (1+x)\Big|_{x=3} = 4$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2\sqrt{x} = 2$；$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1+x) = 2$

又 $f(1) = 2\sqrt{x}\big|_{x=1} = 2$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$\therefore f(x)$ 在分界点 $x = 1$ 处连续；该函数的定义域 $D_f = [0,1] \cup (1,+\infty) = [0,+\infty)$，连续区间也是 $[0,+\infty)$

下面研究这个分段函数的导数，当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) = (2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

当 $x > 1$ 时，$f'(x) = (1+x)' = 1$

在 $x = 0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ $\quad\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导

在 $x = 1$ $\quad\because f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(1+x)-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = 1$

$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2}{\sqrt{x}+1} = 1$

$\therefore f'_+(1) = f'_-(1) = 1 \Rightarrow f'(1) = 1$ 故最后得 $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

下面看分段函数如何求定积分，例如求 $\int_0^3 f(x)\,dx$

这时 $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^3 (1+x)\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + (x+\frac{x^2}{2})\Big|_1^3 = \frac{22}{3}$

(2)函数表达式里含有绝对值的函数

处理这种函数的基本方法就是：将绝对值去掉，化为分段函数处理.

[例 24]将下列函数写成分段函数

①$f(x) = 3x + |x-5|$ $\qquad$ ②$f(x) = |x^2 - 9|$

③$f(x) = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ ④$f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

①解：$f(x) = \begin{cases} 4x-5 & x \geqslant 5 \\ 2x+5 & x < 5 \end{cases}$

②解：$f(x) = \begin{cases} x^2-9 & x^2 \geqslant 9 \\ 9-x^2 & x^2 < 9 \end{cases} = \begin{cases} x^2-9, & |x| \geqslant 3 \\ 9-x^2, & -3 < x < 3 \end{cases}$

③解：令 $\sin x - \cos x = 0\,(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$ 则 $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore f(x) = |\sin x - \cos x|\ (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \cos x - \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

④解：令 $x^2-3x+2=0$ 得 $(x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1,x=2$

$$\therefore f(x)=|x^2-3x+2|=\begin{cases}x^2-3x+2, x\leqslant \text{或} x\geqslant 2\\-(x^2-3x+2), 1<x<2\end{cases}$$

(3)用极限表示的函数

处理这类函数的一般方法是：求出极限，化为分段函数处理.

[例 25]讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性

解：注意到在函数的表达式中，x 是函数的自变量，而 n 是极限变量，且 $n\to\infty$，故求极根时应对 x 的取值进行讨论，x 在不同范围的取值会引起 e^{nx} 的不同的极限性态，这里，

当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\infty$，当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=1$，当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$ 故得

当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{e^{nx}}+x^2}{\dfrac{1}{e^{nx}}+1}=\dfrac{0+x^2}{0+1}=x^2$

当 $x=0$ 时，$f(x)=\dfrac{0}{1+1}=0$

当 $x<0$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$ $\quad\therefore f(x)=\dfrac{x+x^2\cdot 0}{1+0}=x$

综合上述，得

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\0, x=0\\x, x>0\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上连续，

在 $x=0$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$，又 $f(0)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

[例 26]将下列用极限表示的函数化成分段函数

①$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}(x\geqslant0)$ ②$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$

③$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ ④$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$

①解：当 $0\leqslant x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1$

当 $x>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1, \text{当} 0\leqslant x<1\\\dfrac{1}{2}, \text{当} x=1\\0, \text{当} x>1\end{cases}$$