21世纪高等院校教材
数学基础教程系列
解析几何
科学出版社

21世纪高等院校教材

数学基础教程系列

解析几何

吕杰 陈奇斌 李健全 俞海波 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

数学基础教程系列

解析几何

吕　杰　陈奇斌　李健全　俞海波　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书分 4 章介绍空间解析几何的基础知识：第 1 章为向量代数以及行列式与线性方程组的相关知识，为先于高等代数学习解析几何提供了必要的代数准备；第 2 章为平面与直线；第 3 章为常见曲面以及空间区域作图举例；第 4 章为二次曲线的分类以及二次曲线方程的化简.

本书可作为高等师范院校解析几何课程的教材，也可作为广大读者学习解析几何的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/吕杰等编. —北京：科学出版社，2009

(21 世纪高等院校教材・数学基础教程系列)

ISBN 978-7-03-025086-5

I. 解… II. 吕… III. 解析几何-高等学校-教材 IV. O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 127814 号

责任编辑：姚莉丽 唐保军／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 7 月第一次印刷 印张：10
印数：1—3 500 字数：188 000

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是以 1992 年华南师范大学数学系几何教研室集体编写的解析几何教材为蓝本, 参考了大量相关著作, 并结合本校的教学实际编写而成.

随着高等教育的普及, 其相应的教学计划和培养目标需要根据大众化教育的要求和特点进行适当调整; 由于高中新课程标准的实施, 平面向量的部分内容已纳入高中教材, 因此向量代数部分的教学内容需要进行适当调整; 根据当前的教学计划, 解析几何与高等代数这两门课程已由原来的同时讲授改为先后讲授, 因此学习解析几何课程时, 学生在代数知识准备方面已经有所不同. 基于上述原因, 本书在编写时兼顾了以下几个方面的问题:

第一, 解析几何学中的向量代数部分涉及了行列式与线性方程组等代数工具, 而在现有的许多解析几何教材中将此项内容作为附录或者作为已知结论. 然而, 目前多数院校已经采取了先于高等代数开设解析几何的教学安排, 所以有必要对本课程的教学内容进行相应调整. 本书专辟一节介绍行列式与线性方程组的基础知识, 借此兼顾知识体系的完备性和教学内容的完整性, 以期为教师的教学和学生的学习提供便利.

第二, 向量是解析几何中的核心概念之一, 目前多采用描述的方式定义向量, 而此种定义方式经常给初学者造成某些误解, 导致学生的概念错误时有发生. 本书采用了数学定义的方式定义向量, 力求澄清向量及其运算的相关误解, 以期培养学生思维的严谨性和数学表达的准确性.

第三, 空间中点、线、面的位置关系有度量关系和仿射关系之分, 即它们有刚体运动及镜面反射的不变量和仿射变换的不变量之分. 本书为突出度量关系与仿射关系的几何本质, 在讨论仿射关系时只使用一般仿射坐标系, 仅在需要讨论度量关系时才使用直角坐标系.

本书第 1~4 章分别由陈奇斌、俞海波、吕杰、李健全执笔, 最后集体讨论定稿. 在编写过程中, 编者参考和借鉴了诸多相关书籍, 在此谨向原作者表示衷心的谢意, 恕不一一列举. 同时, 向对本书的编写和出版给予大力支持的华南师范大学数学科学学院、科学出版社及对本书给予关注与指导的各位专家、老师和学生表示由衷的感谢.

由于编者水平所限, 书中难免有疏漏之处, 敬请各位老师和学生批评指正.

编　者

2008 年 8 月于华南师范大学

目　　录

第1章 向量代数

在物理学、生物学和工程技术等学科中，人们除了要使用只有大小属性的量之外，还经常需要使用这样一些量，它们既有大小的属性，又有方向的属性. 一般称这样的量为向量或矢量，而只有大小属性的量一般称为数量或标量. 在使用各种向量的过程中，还经常需要对向量进行各种运算. 不同的学科使用的向量对象各不相同，仅物理学中常见的就有位移、速度、加速度、力、力矩、动量和冲量等向量概念. 更多的物理量大多都通过上述各种向量的运算来产生. 为了使向量及其相关运算表现得更加形象和直观，人们经常用几何的方式表示它们，这就是本章几何向量及其运算产生的背景.

本章中的几何向量及其运算可以看成是为各种不同学科背景的向量及其相关运算所建立的一种数学模型，同时它们又是表示和解决几何问题的一种重要工具.

1.1 向量的概念

1.1.1 从有向线段到向量

设 P 和 Q 是空间中两点 (图 1.1)，从 P 到 Q 的**有向线段**就是从 P 延伸到 Q 的直线段，用 $\overline{PQ}$ 表示，注意有向线段 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{QP}$ 是不同的，因为它们有不同的方向. 在有向线段 $\overline{PQ}$ 中，称点 P 为这个有向线段的起点，称 Q 为终点. 一个有向线段除了其空间位置外，还有两个重要的特征，那就是它的大小 (长度) 和方向. 如果两个有向线段 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{RS}$ 有相同的大小和方向，不管它们是否具有相同的位置，都称它们是**等价**的，如图 1.1 所示. 两个有向线段等价，也可以理解为它们可以通过空间中的平行移动完全重合. 从有向线段等价的概念我们可以抽象出向量的概念.

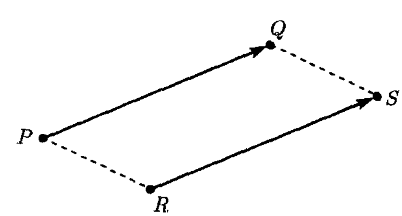


图 1.1

定义 1.1 *与一个给定的有向线段等价的所有有向线段所组成的集合称为一个***向量***，该集合中任意一个有向线段称为这个向量的一个***表示***.*

可以看到，向量的概念来自有向线段. 略去有向线段的空间位置，提炼出其大小与方向，便产生了向量的概念. 另外，向量又可以用有向线段来表示，只要一个有

向线段的大小和方向与指定向量的大小和方向相同, 此有向线段就成为该向量的一个表示, 因此同一个向量就有了无穷多种表示, 两个有向线段可以表示同一个向量的充分必要条件是它们等价. 由于用有向线段表示向量时的自由性, 向量经常被称为**自由向量**.

向量的记号一般用小写黑体英文字母或黑体希腊字母表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 等. 有向线段 $\overline{PQ}$ 所表示的向量记为 $\overrightarrow{PQ}$.

任意取定空间一点 O, 由空间任一点 M 可以唯一确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$; 由任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一确定空间中一点 M, 使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$.

1.1.2　向量的模、特殊向量、向量间的夹角

向量的模是指表示该向量的有向线段的长度. 当然, 此定义与表示该向量的有向线段的选择无关, 因此定义是有效的. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$, $\overrightarrow{PQ}$ 的模记为 $|\overrightarrow{PQ}|$.

模为零的向量称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$. 用有向线段表示零向量时, 有向线段的起点和终点必然是重合的, 因此零向量没有确定方向, 或者说零向量具有任意方向.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^\circ$, 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量.

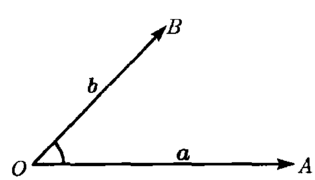


图 1.2

对于任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 在空间中任取一点 O, 作有向线段 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, 使 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 尽管点 O 的选取不同会使 $\angle AOB$ 的位置不同, 但根据平面几何的知识, $\angle AOB$ 的角度与 O 点的选取无关, 我们称此角度为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**, 记为 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$, 如图 1.2 所示. 我们规定, 零向量与任意向量的夹角都是不确定的, 或者说零向量与任意向量的夹角可以取 $[0,\pi]$ 中的任意值.

如果 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 零向量与任意向量都垂直.

同方向的两向量夹角为 0, 反方向的两向量夹角为 π. 特别地, 称模相等而方向相反的两个向量互为**负向量**, $\boldsymbol{a}$ 的负向量记为 $-\boldsymbol{a}$.

1.1.3　向量与直线的关系

定义 1.2　*设 $\boldsymbol{a}$ 为一个向量, l 为一条直线. 如果存在直线 l 上的两点 P 和 Q, 使得 $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上, 记为 $\boldsymbol{a}//l$.*

明显地, 零向量在任意直线上. 直线上的每个非零向量都称为直线的**方向向量**.

定义 1.3 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为两个向量. 如果存在直线 l, 使得 $\boldsymbol{a}//l$, $\boldsymbol{b}//l$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

由于零向量在任意直线上, 因此零向量与任意向量共线. 除零向量外, 两个共线的向量的方向或者相同, 或者相反. 由向量共线的概念可以得到下述命题.

命题 1.1 空间中三点 A, B, C 共线的充分必要条件是 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$.

1.1.4 向量与平面的关系

定义 1.4 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量, π 是一个平面. 如果存在平面 π 上的两点 P 和 Q, 使得 $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面 π 上, 记为 $\boldsymbol{a}//\pi$.

已知平面上两个不共线的向量, 虽然不能完全确定平面在空间中的位置, 但是该平面被确定到不能进行任何翻转的程度, 称平面上两个不共线的向量为该平面的**方位向量组**.

定义 1.5 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个向量. 如果存在平面 π, 使得 $\boldsymbol{a}//\pi, \boldsymbol{b}//\pi, \boldsymbol{c}//\pi$, 则称向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

向量组共面的概念可以推广到由更多向量构成的向量组的情形.

任意两个向量自然是共面的, 因此, 只有三个以上的向量才存在是否共面的问题. 三个向量中如果有两个向量共线, 则这三个向量一定共面.

命题 1.2 空间中四点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 共面.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{n}$ 是一个向量, π 是一个平面. 如果存在直线 l, 使得 $\boldsymbol{n}//l$, $l\perp\pi$, 则称向量 $\boldsymbol{n}$ 与平面 π 垂直, 记为 $\boldsymbol{n}\perp\pi$.

零向量与任意平面垂直.

命题 1.3 非零向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 π 的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 π 上的两个不共线的向量.

习 题 1.1

1. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 在向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ 中, 哪些向量是相同的? 哪些向量互为负向量?

2. 取定空间中一点 O, 分别满足下列条件的点 P 构成什么图形?

(1) $|\overrightarrow{OP}|=2$;

(2) $\overrightarrow{OP}//\pi$, 其中 π 为给定平面;

(3) $\overrightarrow{OP}//l$, 其中 l 为给定直线;

(4) $\overrightarrow{OP}\perp\pi$, 其中 π 为给定平面.

3. 设有四边形 $ABCD$, 点 K, L, M, N 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点, 求证: $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$.

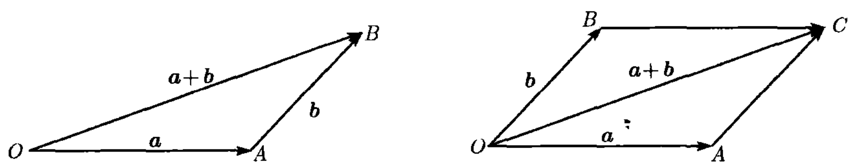
1.2　向量的线性运算

本节将定义向量间的加法和减法运算、实数与向量的乘法运算, 这些运算统称为向量的线性运算.

1.2.1　向量加法

定义 1.7　设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个向量. 任取空间一点 O, 以 O 为起点作有向线段 $\overrightarrow{OA}$, 使得 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, 再以 A 点为起点作有向线段 $\overrightarrow{AB}$, 使得 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, 称向量 $\overrightarrow{OB}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. 求两个向量之和的运算称为**向量加法**.

上述定义向量加法的方式常称为**三角形法则**, 如图 1.3(a) 所示. 尽管 OAB 不一定是真正意义上的三角形. 容易验证, 定义 1.7 中向量 $\overrightarrow{OB}$ 与点 O 的选取无关.



(a) 三角形法则　　(b) 平行四边形法则

图 1.3

当 $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$ 时, 还可以用以下**平行四边形法则** 定义向量加法: 给定两向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 任取空间一点 O, 以 O 为起点作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$, 使 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 以线段 OA 和 OB 为邻边作平行四边形 $OACB$, 则称向量 $\overrightarrow{OC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 如图 1.3(b) 所示. 容易验证三角形法则和平行四边形法则的等价性.

由向量加法的定义, 容易证明向量加法的性质.

定理 1.1　向量的加法满足以下运算规律: 对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 有

(1) 交换律: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

证　(1) 对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线的情形, 加法定义的平行四边形法则本身意味着交换律成立. 对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的情形, 请读者自行证明.

(2) 如图 1.4 所示, 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}$, 根据向量加法的三角形法则, 有 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, 因此

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

(3) 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

(4) 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, 则 $\overrightarrow{BA}=-\boldsymbol{a}$, 所以 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$. □

由于向量加法满足结合律与交换律, 所以三个向量相加, 不论它们的结合顺序或先后顺序如何变化, 它们的和总是相同的, 因此可以不加括号, 简单写成 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, 这一原则还可以推广到有限多个向量相加的情形. 向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 的和可记为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k$.

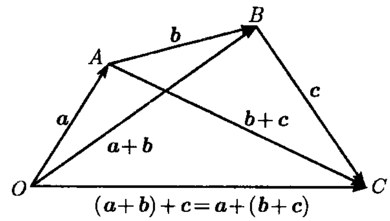


图 1.4

两个向量相加的三角形法则可以推广到 n 个向量相加的多边形法则: 只要把代表这 n 个向量的有向线段首尾相接, 以表示第一个向量的有向线段的起点为起点, 表示最后一个向量的有向线段的终点为终点, 这样得到的有向线段所表示的向量便是这 n 个向量之和, 如图 1.5 所示.

利用向量的负向量的概念, 可以定义**向量减法**: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, 如图 1.6 所示.

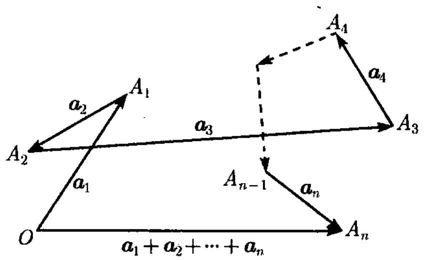


图 1.5

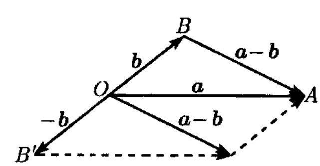


图 1.6

命题 1.4 *设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是互不共线的三个向量. 可以选择分别表示这三个向量的有向线段使之顺次首尾相连形成一个三角形的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.*

证 必要性. 设该三角形为 ABC (图 1.7), $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$, 根据向量相加的多边形法则, 有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$.

充分性. 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{c}=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$, 这表明分别表示向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的有向线段 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 首尾相连成三角形. □

例 1.1 用向量方法证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O 且互相平分 (图 1.8), 则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}$, 因此有向线段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{DC}$ 平行且长度相等, 从而四边形 $ABCD$ 为平行四边形. □

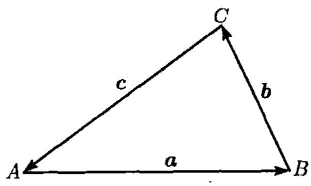


图 1.7

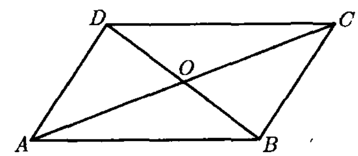


图 1.8

1.2.2 数乘向量

本小节将定义实数与向量的乘法并讨论其运算规律.

定义 1.8　*设 k 为一个实数, $\boldsymbol{a}$ 为一个向量. k 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记为 $k\boldsymbol{a}$. $k\boldsymbol{a}$ 的模定义为 k 的绝对值与 $\boldsymbol{a}$ 的模的乘积: $|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$. $k\boldsymbol{a}$ 的方向定义为: 当 $k>0$ 时, $k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向; 当 $k<0$ 时, $k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向. 实数与向量的乘法运算称为***数乘向量**.

根据定义 1.8, $0\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$; 反之, 若 $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 则有 $0 = |k\boldsymbol{a}| = |k|\cdot|\boldsymbol{a}|$, 因此 $k=0$ 和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 至少有一个成立.

另外, 由定义 1.8 还可知, 对任意实数 k 和任意向量 $\boldsymbol{a}$ 都有 $k\boldsymbol{a}//\boldsymbol{a}$. 特别地, $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

数乘向量运算具有如下性质:

定理 1.2　*设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意两个向量, k, m 为任意两个实数, 则有*

(1) 结合律: $k(m\boldsymbol{a}) = (km)\boldsymbol{a}$;

(2) 对实数加法的分配律: $(k+m)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}$;

(3) 对向量加法的分配律: $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$.

证　如果 $k=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 通过定义直接计算可证明 (1),(2),(3) 成立. 以下设 $k\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

(1) 如果 $m=0$, 则 (1) 自然成立. 以下设 $m\neq 0$. 因为 $|k(m\boldsymbol{a})| = |k||m\boldsymbol{a}| = |k|(|m||\boldsymbol{a}|)$, $|(km)\boldsymbol{a}| = |km||\boldsymbol{a}| = (|k||m|)|\boldsymbol{a}|$, 所以 $|k(m\boldsymbol{a})| = |(km)\boldsymbol{a}|$. 再讨论两边向量的方向. 如果 k, m 同号, 则等式两边的向量都与 $\boldsymbol{a}$ 同向; 如果 k, m 异号, 则等式两边的向量都与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 因此, 等式两边向量有相同的模和方向, 所以等式成立.

(2) 如果 $m=0$ 或 $k+m=0$, 容易验证等式成立. 以下设 $m\neq 0$, $k+m\neq 0$.

① 如果 k, m 同号, 则 $(k+m)\boldsymbol{a}$, $k\boldsymbol{a}$, $m\boldsymbol{a}$, $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$ 彼此同向, 进一步还可得到

$$\begin{aligned}|(k+m)\boldsymbol{a}| &= |k+m||\boldsymbol{a}| = (|k|+|m|)|\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}| + |m||\boldsymbol{a}| \\ &= |k\boldsymbol{a}| + |m\boldsymbol{a}| = |k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}|.\end{aligned}$$

所以等式成立.

② 如果 k,m 异号, 则 $k+m$ 与 k,m 中的一个同号. 不妨设 $k+m$ 与 k 同号, 则它们都与 m 异号. 根据上面①的证明, 有

$$k\boldsymbol{a}=[(k+m)+(-m)]\boldsymbol{a}=(k+m)\boldsymbol{a}+(-m)\boldsymbol{a},$$

由于 $(-m)\boldsymbol{a}=[(-1)m]\boldsymbol{a}=(-1)(m\boldsymbol{a})=-m\boldsymbol{a}$, 所以

$$(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}-(-m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}-(-m\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}.$$

(3) 如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 等式成立. 以下设 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

① 如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, 则当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向时取 $m=|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向时取 $m=-|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$, 于是有 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$. 根据 (1), (2) 可得

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=k(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=k[(m+1)\boldsymbol{b}]=[k(m+1)]\boldsymbol{b}=(km+k)\boldsymbol{b}\\&=(km)\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{b}=k(m\boldsymbol{b})+k\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

② 如果 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$, 则在空间取一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 于是 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 如图 1.9 所示, 再作 $\overrightarrow{OA_1}=k\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=k\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{OB_1}=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 由于 $\triangle OAB$ 相似于 $\triangle OA_1B_1$, 因此 $\overrightarrow{OB_1}=k\overrightarrow{OB}$, 即有 $k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. □

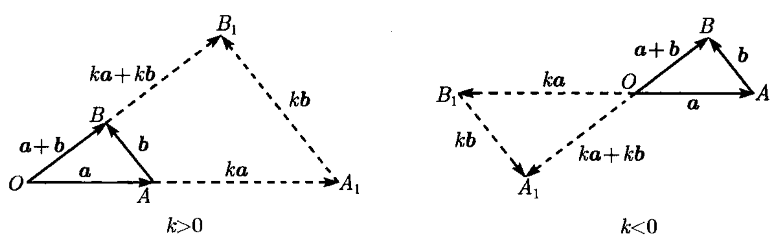


图 1.9

向量加法和数乘向量统称为向量的线性运算, 利用向量加法和数乘向量的性质, 可以对较复杂的线性运算进行化简和变形.

例 1.2 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是任意两个向量, O,A,B,C 为空间四点, $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, 证明 A,B,C 三点共线.

证 由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\\\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, 从而有 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{AB}$, 因此 A,B,C 共线. □

例 1.3 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线, 求证: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$, 所以 $2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM})$, 但是$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0}$, 所以 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, 因此得 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. □

例 1.4(定比分点公式)　设 A,B,P 是直线 l 上三点 (B 与 A,P 均不重合), O是空间任一点, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$. 求证: $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

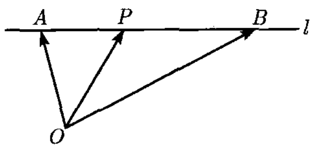


图 1.10

证　如图 1.10 所示, 由于 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$, 从而有 $(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$. 因为 $\lambda\neq-1$, 所以 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$. □

习　题　1.2

1. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E,F 分别是棱 BC,C_1D_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示下列向量:

(1) $\overrightarrow{AC_1}$; (2) $\overrightarrow{BD_1}$; (3) $\overrightarrow{AF}$; (4) $\overrightarrow{EF}$.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个向量. 下列各式成立的充分必要条件分别是什么?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

3. 试解下列各题:

(1) 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(2) 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, 求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;

(3) 已知向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$, 从方程组 $\begin{cases}3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1,\\ 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2\end{cases}$ 中解出向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

4. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$, 对角线 AC,BD 的中点分别为 E,F. 求 $\overrightarrow{EF}$.

5. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量). 证明四边形 $ABCD$ 为梯形.

6. 设 L,M,N 分别是三角形 ABC 三边 BC,CA,AB 的中点. 求证: $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\mathbf{0}$.

7. 试证明: 在空间中, 点 M 为三角形 ABC 的重心的充分必要条件是 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$.

8. 设 A,B,C,D 是一个四面体的顶点, M,N 分别是边 AB,CD 的中点. 求证: $\overrightarrow{MN}=$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

9. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是空间任一点. 证明: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$.

1.3 向量间的线性关系

向量间共线或共面的关系称为线性关系. 本节将探讨向量间的线性关系的进一步的性质, 为此本节先建立以下一般概念.

定义 1.9 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是一组向量, $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是一组实数. 称向量 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**, 并称向量 $\boldsymbol{b}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ **线性表示**.

特别地, 单独一个向量也可称为向量组, 其线性组合就是数乘向量.

1.3.1 向量间的共线关系

关于两向量共线, 有以下命题.

命题 1.5 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为两个向量, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则存在唯一的实数 k 使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$, 即 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}$ 线性表示, 且表示方法是唯一的.

证 先证 k 的存在性. 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则显然有 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向时取 $k=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$; 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向时取 $k=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. 根据数乘向量的定义可知 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

再证 k 的唯一性. 如果 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}$, 则有 $(k-m)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 可得 $k-m=0$, 即 $k=m$. □

注意命题 1.5 中条件 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 是必要的. 例如, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 而 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 虽然有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, 但对任意实数 k, $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ 都不成立, 即 $\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{a}$ 线性表示.

由命题 1.5 可以得到如下结论: 已知直线 l 上一个非零向量 $\boldsymbol{a}$, 则直线 l 上任意向量都可由 $\boldsymbol{a}$ 线性表示, 且对直线 l 上的每个向量, 表示方法都是唯一的.

定理 1.3 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是: 存在不全为零的实数 k, m, 使得 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则有 $1\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不全为零向量, 不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 根据命题 1.5, 存在实数 k 使 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$, 因此有 $k\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性. 设有不全为零的实数 k,m 使 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $k\neq 0$, 则有 $\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{m}{k}\right)\boldsymbol{b}$, 因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. □

从以上定理立即可以得出如下结论: 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线的充分必要条件是, 只有当 $k=m=0$ 时才有 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 可以将它正式表示成以下推论.