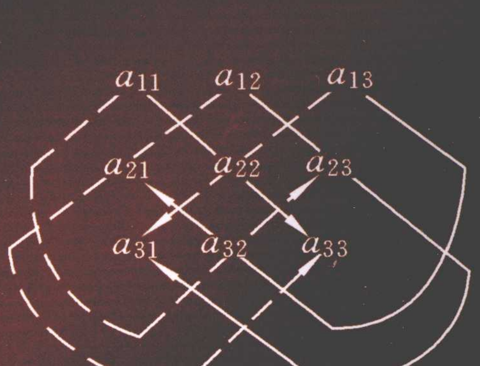
普通高等教育“十一五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

线性代数教程

第二版

林升旭　梅家斌



普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

线性代数教程

(第二版)

林升旭　梅家斌

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程(第二版)/林升旭　梅家斌.—武汉:华中科技大学出版社,2009年8月
ISBN 978-7-5609-3065-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.①林…　②梅…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 115447 号

线性代数教程(第二版)　　　　林升旭　梅家斌

策划编辑:李　德
责任编辑:王晓琼　　　　封面设计:潘　群
责任校对:周　娟　　　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉众心图文激光照排中心
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm　1/16　　印张:13.75　　字数:263 000
版次:2009 年 8 月第 2 版　　印次:2009 年 8 月第 11 次印刷　　定价:20.80 元
ISBN 978-7-5609-3065-7/O·300

第二版前言

《线性代数教程》一书自 2004 年 1 月作为理工科本科教材出版以来，已先后在华中科技大学武昌分校，华中科技大学文华学院等多所三本院校使用. 由于它取材适度、概念清楚、讲解翔实、循序渐进、通俗易懂，既适合教学又便于自学的特点，以及其着重于基本概念的论述和应用，而不重于定理证明的风格，受到广大读者的普遍欢迎和好评，是一本比较适合普通本科院校理工科及经管类专业使用的教材.

作为第二版，本书保留了原书的体系与风格，同时为了当前教学改革的需要，与第一版相比，除了对原书中的疏漏之处进行订正之外，还在以下几个方面进行了修订.

(1) 对前 5 章内容进行了少量的调整和修订. 在 4.3 节中写入了"过渡矩阵及坐标变换"而把"向量的内积与正交性"移到第 5 章作为 5.4 节，并删去第 6 章"向量空间与线性变换".

(2) 为了配合教学改革的需要，加强学生应用能力和计算能力的培养，本书增加了 Matlab 软件计算及线性代数的应用的内容. 在第 6 章专门介绍了 Matlab 数学软件在线性代数中的应用，以帮助同学们利用数学软件进行代数的运算. 这一部分为了帮助同学们自学，按照书中知识点选择了大量的实例并附有一定量的用 Matlab 软件进行计算的练习题.

在第 7 章介绍了线性代数的应用. 按知识点精选了部分应用实例，这些实例不需要用到另外的知识，仅用本章现有知识就能看懂. 相信通过本章的学习对于提高学生的兴趣，锻炼应用知识的能力是大有裨益的.

在以上的修订工作中，前 5 章基本内容由林升旭老师执笔，梅家斌老师进行审阅，第 6、7 两章由梅家斌老师执笔，由林升旭老师审阅，另外在编写的过程中华中科技大学文华学院的林益老师、涂平老师、张祚文老师，华中科技大学武昌分校的刘国钧老师、汪昌瑞老师参加了集体讨论，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示感谢.

本书适于 40 学时左右的教学要求.

在本教材编写过程中，得到了校、系领导的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中错误之处在所难免，恳请读者批评指正.

林升旭　梅家斌

2009 年 5 月

第一版前言

线性代数是理工科本、专科学生必修的一门重要基础课，它既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具. 本教材是根据教育部颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程的基本要求》，以现行华中科技大学《线性代数》教材为基础，结合编者长期从事“线性代数”的教学与研究的经验编写而成的.

本书在编写上力求内容适度、结构合理、条理清晰、循序渐进，文字叙述力求简明扼要、深入浅出. 本书具有如下特点.

(1) 突出基本概念、定理和方法. 用提出问题、引入具体直观例子或实例来阐明重要概念、定理和方法. 每节都有较多的典型范例，以帮助学生加深对该节主要内容的理解与掌握. 对于某些定理，则不拘泥于烦琐的理论推导，而用例子剖析引导，从而减少理论上的难度，使之易教、易学.

(2) 每章均有提纲挈领的内容小结. 使学生对该章的主要知识能更清晰地认识和理解，抓住要点.

(3) 有丰富的练习题. 每节有基本练习题，每章末选配有综合练习题. 题型有思考判断题、填空题、计算题和适量的证明题. 书末附有答案与解题提示，以便于自学与检查.

本书共分 6 章：行列式，矩阵运算，初等变换与线性方程组，向量组的线性相关性，矩阵的对角化及二次型，向量空间及线性变换. 前 4 章是基础部分，第 5 章是应用部分，第 6 章是选学部分. 本书适于 40 学时左右的教学要求.

在本教材编写过程中，得到了校、系领导的大力支持和帮助. 容敏丽、刘国钧、汪昌瑞、陈祖诰、周怀治、林益等教授审阅了此稿，并提出了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中错漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

林升旭

2003 年 11 月于华中科技大学

目　　录

第 1 章 行 列 式

行列式是由研究线性方程组产生的,它是线性代数中的一个基本工具,在讨论许多问题时都要用到它.本章先介绍二、三阶行列式,并把它推广到 n 阶行列式上,然后讨论行列式的基本性质及行列式按行(列)展开的计算方法,最后利用 Cramer 法则求解线性方程组.

1.1 行列式的概念

一、二,三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1-1}$$

其中 x_1, x_2 表示未知量,$a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 表示未知量的系数,b_1, b_2 表示常数项.用消元法由式(1.1-1) 消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同样地,从式(1.1-1) 消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了方便叙述和记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称 D 为**二阶行列式**,有时记为 $D = \det(a_{ij})$.

二阶行列式的计算满足**对角线法则**,即:从左上角到右下角的主对角线上的元素之积减去从右上角到左下角的副对角线上的元素之积.二阶行列式的计算结果是一个数.

由此法则,方程组的解 x_1, x_2 中分式的分子也可以记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

其中 D_i 表示把 D 中第 i 列换成式(1.1-1) 右边的常数列所得的行列式.

于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1-1) 的解就唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1.1.1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1, \\ 5x_1+3x_2=3. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1,\quad D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=11.$$

于是得到解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=11.$$

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.1-2}$$

求解此方程组,可由前两个方程消去 x_3,得到一个只含 x_1,x_2 的二元方程;再由后两个方程(或第一和第三个方程) 消去 x_3 得到另一个二元线性方程,按照上述解二元线性方程组的方法消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$

把 x_1 的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.1-3}$$

其中 D 称为**三阶行列式**. 这是由三行三列的 9 个元素构成并由式(1.1-3) 计算得到的

一个数. 式(1.1-3) 右边有 6 个项,每项是位于 D 中既不同行又不同列的 3 个元素之积,并按照一定的规则,带有正号或负号. 这可以用如图 1.1 所示的对角线法则来计算. D 中,从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**,从右上角到左下角的对角线叫**副对角线**. 主对角线上 3 个元素之积及平行于主对角线上 3 个元素之积的项带正号(如图 1.1 中实线连接的乘积),副对角线上 3 个元素之积及平行于副对角线上的 3 个元素之积的项带负号(如图 1.1 中虚线连接的乘积).

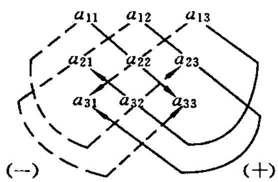


图 1.1

称式(1.1-3) 的 D 为三元方程组(1.1-2) 的系数行列式. 根据上面算法,有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}a_{33}b_2-b_1a_{23}a_{32},$$

则 x_1 可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

D_i 是把系数行列式 D 中的第 i 列删去,换上方程组(1.1-2) 右边的常数列所得的行列式.

例 1.1.2　解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-\ x_3=4, \\ \ x_1-\ x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-\ x_2+\ x_3=3. \end{cases}$$

解　用对角线法则计算行列式,得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&5&2\\2&3&1\end{vmatrix}=16,\quad D_3=\begin{vmatrix}3&2&4\\1&-1&5\\2&-1&3\end{vmatrix}=24.$$

解得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

用对角线法则计算二、三阶行列式,既直观又快捷,可惜对高于三阶的行列式,对角线法则就不再适用了.为了求 $n>3$ 的 n 元线性方程组,有必要把二、三阶行列式进一步推广.为此先分析式(1.1-3)所示的三阶行列式的展开项的结构,从中找出其一般规律.

(1) 在三阶行列式中,每项的元素都是取于不同行不同列的 3 个元素的乘积.

(2) 每一项的 3 个元素的行下标按自然顺序排列时,其列下标都是 1,2,3 的某一个排列.每一排列都对应着三阶行列式的一项,故有 $3!=6$ 项.

(3) 项的符号由对换决定.在式(1.1-3)中,加正号的三项的列下标排列为

$$123,\quad 231,\quad 312.$$

它们是自然排列 123 经零次或两次(偶次)对换得到的,例如排列 231 是将 123 中的 1 和 2 对换;然后再将 1 和 3 对换得出的,而加负号的三项的列下标排列为

$$321,\quad 132,\quad 213.$$

它们是 123 经一次或三次(奇数次)对换得到的.这就是说行列式每项所带的符号与排列对换次数的奇偶性有关.

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律,引入 n 元排列的逆序与对换的概念.

二、n 元排列的逆序与对换

自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 按一定次序排成一排,称为 n 元排列,记为 $i_1i_2\cdots i_n$. $12\cdots n$ 称为自然排列,n 元排列总共有 $n!$ 个.例如自然数 1,2,3 共有 $3!=6$ 个排列,用 $i_1i_2i_3$ 表示这 6 个排列中的一个.

定义 1.1 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若一个大的数排在一个小的数的前面,则称这两个数构成一个**逆序**.一个排列逆序个数的总和就称为这个排列的逆序数,记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$.

例 1.1.3 求下列排列的逆序数

(1) 32415; (2) 35412; (3) $n(n-1)\cdots 21$.

解 用从右到左的方式,求各数字的逆序数.

(1) 排列 32415 中,数 5 前面没有比它大的数,逆序为 0;数 1 前面有 3 个数比 1 大,逆序为 3,数 4 前面没有数比 4 大,逆序为 0;数 2 前面有 1 个数比 2 大,逆序为 1;数 3 排在最前面,逆序为 0,即

$$\tau[32415]=0+3+0+1+0=4.$$

(2) 同理

$$\tau[35412]=3+3+1+0+0=7.$$

(3) $\tau[n\ (n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.2 排列的逆序数为奇(偶)数的排列称为**奇(偶)排列**.

在例 1.1.3 中,32415 是偶排列,35412 是奇排列. 而对于排列 $n\ (n-1)\cdots 21$,当 $n=4k,4k+1$ 时,该排列为偶排列;当 $n=4k+2,4k+3$ 时,该排列为奇排列. 自然排列 $123\cdots n$ 的逆序数为 0,它是一个偶排列.

定义 1.3 一个排列中的某两个数的位置互换,其余的数不动,就得到一个新排列,称这样的变换为**一次对换**. 而相邻两个数的对换称为**邻换**.

对换有如下性质:

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

或者说:一个排列进行奇数次对换,排列改变奇偶性;进行偶次对换,排列奇偶性不变.

证 首先证明:一次邻换改变排列的奇偶性. 设 n 元排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

将相邻两个数 i、j 对换变成新排列

$$\cdots ji\cdots,$$

由于除 i、j 两数外其余的数不动,所以其余的数之间的逆序没有改变. 若 $i>j$,则新排列的逆序数比原排列的逆序数减少 1;若 $i<j$,则新排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1,故一次邻换改变排列奇偶性.

其次,设排列为

$$\cdots ia_1a_2\cdots a_sj\cdots,$$

数 i 与 j 之间相隔 s 个数. 要实现 i 与 j 的对换,可先把 i 与 a_1 邻换,再把 i 与 a_2 邻换,依次下去,经 $s+1$ 次邻换就把 i 调换至 j 之后,即

$$\cdots a_1a_2\cdots a_sji\cdots,$$

然后再把 j 依次邻换至 a_1 之前,这样要经过 s 次邻换才能做到. 从而共经 $2s+1$ 次邻换就完成了 i 与 j 的对换,得到

$$\cdots ja_1a_2\cdots a_si\cdots,$$

利用一次邻换改变排列奇偶性,即可证明定理.

推论 1 任意一个 n 元排列都可经过一定次数的对换变为自然排列,并且所做对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

这是因为 $12\cdots n$ 是偶排列,而一次对换改变排列的奇偶性,当排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列时,必须做奇(偶)次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$. 故所做的对换次数的奇

偶性与排列的奇偶性相同.

推论 2 全体 n 元排列的集合中,奇排列与偶排列各一半.

三、n 阶行列式的定义

有了排列的逆序和奇偶性概念,就可把三阶行列式(1.1-3)表成如下形式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1 i_2 i_3]}(-1)^{\tau[i_1 i_2 i_3]}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

定义 1.4 把 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$,排成 n 行 n 列,按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1 i_2 \cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}. \qquad (1.1\text{-}4)$$

计算得到的一个数,称为 **n 阶行列式**,简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$,其中 $\sum\limits_{[i_1 i_2 \cdots i_n]}$ 表示对所有 n 元排列求和.

式(1.1-4)右边的每一项乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 中的 n 个元取之于 D 中不同行不同列;当行下标按自然顺序排列时,相应的列下标是 $12\cdots n$ 的一个 n 元排列 $i_1 i_2\cdots i_n$,若是偶排列,则该排列对应的项取正号;若是奇排列,则取负号,用 $(-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]}$ 表示.行列式 D 中共有 $n!$ 个乘积项.

例 1.1.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式的特点是主对角线上方的元素都为零,称它为**下三角行列式**.若主对角线下方的元素都为零的行列式,称为**上三角行列式**.

解 通常关注的是 D 的展开式中不为零的那些项.由于第 1 行除 a_{11} 外,其余元素为零,所以在 D 的通项中第 1 个元素 a_{1i_1} 只能取 a_{11};而第 2 个元素 a_{2i_2} 不能取 a_{21},这是因为展开式的每一项中不能存在两个相同列的元素,故只能选取 a_{22};同理 a_{3i_3} 只能选取 a_{33}…… 末行只能选取 a_{nn},从而

$$D=(-1)^{\tau[12\cdots n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,对上三角行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角行列式有

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上面行列式中未写出的元素都表示零元素. 称主对角线外的元素皆为零的行列式 Λ 为对角行列式.

同理可得

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \iddots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1.1.5　确定四阶行列式中项 $a_{32}a_{14}a_{43}a_{21}$ 所取的符号.

解　把该项的行下标按自然顺序排列得 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$,其列下标排列的逆序数为

$$\tau[4123]=1+1+1+0=3,$$

故该项带负号.

应当指出,n 阶行列式可以有若干种定义,例如,若把 n 阶行列式每一项的列下标按自然顺序排列,则行下标是 n 元排列的某一排列,这便得到行列式的另一个定义式

$$D=\sum_{[j_1j_2\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}. \tag{1.1-5}$$

因为把 n 阶行列式 D 的通项

$$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

的列下标的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经 N 次对换变为自然排列 $12\cdots n$ 的同时,相应的行下标排列 $1\ 2\cdots n$ 经 N 次对换变成排列 $j_1j_2\cdots j_n$,即

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n},$$

根据定理 1.1 的推论 1,对换次数 N 与 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$ 有相同的奇偶性,而 N 与 $\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 也有相同的奇偶性,从而 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$ 与 $\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 有相同的奇偶性,所

以

$$(-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = (-1)^{\tau[j_1 j_2 \cdots j_n]} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

由此可知式(1.1-5)是行列式(1.1-4)的等价定义.

练习 1.1

1. 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$$

2. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = a, \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = b; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3. 确定下列排列的逆序数和奇偶性.

32145， 52314786， 24687531.

4. 确定下列五阶行列式中项的符号

(1) $a_{34}a_{25}a_{41}a_{12}a_{53}$； (2) $a_{23}a_{41}a_{14}a_{35}a_{52}$.

5. 写出四阶行列式中

(1) 所有包含有 a_{12}, a_{23} 的项；

(2) 所有包含 a_{23} 带正号的项.

6. 用定义计算

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质

用行列式的定义计算 n 阶行列式，一般要计算 $n!$ 个乘积项，每一项是 n 个元素的乘积，需要做 $n-1$ 次乘积运算，所以一共需做 $(n-1)n!$ 次乘积运算. 当 n 较大时，例

如 $n=25$,乘法次数达到 $24\times 25!$,约等于 3.7227×10^{26} 次,这是一个惊人的数字.这表明用定义计算较高阶的行列式并不是一个可行的求值方法.为此,从定义出发,建立行列式的基本性质,利用这些性质来简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行换成同序数的列,得到新的行列式,记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.显然$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 行列式与转置行列式相等,即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

证 设 D^{T} 的第 i 行第 j 列的元素为 b_{ij},则有 $b_{ij}=a_{ji}$,由定义式(1.1-5),有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{[j_1\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn} \\ &= \sum_{[j_1\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D. \end{aligned}$$

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位,因而凡是对行具有的性质,对列也一样具有,反之亦然.故以下所讨论的行列式性质中,只对行加以证明.

性质 2 若行列式的第 i 行(列)的每一个元素都可表示为两数之和,即

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

则行列式可表示为两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

或者说:若两个行列式中除第 i 行之外,其余 $n-1$ 行对应相同,则两个行列式之和只对第 i 行对应元素相加,其余保持不变.

证 左边 $=\sum(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(b_{ip}+c_{ip})\cdots a_{ni_n}$

$$=\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots b_{ip}\cdots a_{ni_n}+\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots c_{ip}\cdots a_{ni_n}.$$

这正好是右边两个行列式之和.

性质 3 用一个数 k 乘行列式,等于将行列式的某一行(列)元素都乘以 k,即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

也可以叙述为:若行列式某行(列)有公因子 k,则可把它提到行列式外面(证明略).

性质 4 若对换行列式的任意两行(列),则行列式变号,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array},$$

$$D = -D_1.$$

证 因为 D 中的任一项为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{ip}\cdots a_{jq}\cdots a_{ni_n},$$

与之相对应的 D_1 中的一项为

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]}a_{1i_1}\cdots a_{jq}\cdots a_{ip}\cdots a_{ni_n},$$

(行下标已按自然顺序排列)

由定理 1.1,有

$$(-1)^{\tau[i_1\cdots p\cdots q\cdots i_n]} = (-1)(-1)^{\tau[i_1\cdots q\cdots p\cdots i_n]}.$$

即 D 与 D_1 对应项的符号相反,亦即 $D = -D_1$.

推论 1 若行列式的两行(列)相同,则行列式为零.

证 设 D 是 i 行与 j 行相同的行列式,把 D 的 i 行与 j 行对换,由性质 4,有 $D = -D$,即 $D = 0$.

推论 2 若行列式的两行(列)元素成比例,则行列式为零.

性质 5 把行列式的第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即