拓 扑 学

（一）

M.Eisenberg 著

贵 阳 师 范 学 院 数 学 系 译

一九八一年八月

序

本书是为初学拓扑学的人而编写的。书中介绍了一般拓扑学中最基本的概念、事实与方法。本书既适合作为各种不同的期限与重点的大学生课程的教材，又适合作为具有不同基础的班级的教材，同时这本书也可以作为没有学过拓扑学的大学毕业生学习高等课程的一本入门教科书。下面提出该门课程的一些可行的教学大纲。

学习这本书所必须具备的数学知识是微积分，而可以不必具有欧几里得空间或度量空间的拓扑知识。当然，在学习拓扑学这门课程之前能具有一些“ε－语言”的经验那是很好的，而且在这方面的经验越多，阅读起来就越快。本书没有应用Zorn引理和序数。

编写此书的目的是促进学生数学上的成熟。因此，对引入新概念给予了足够的重视。例如，在给出度量定义之前，讨论了大量的关于度量的例题，而在给出紧性定义之前，证明了单位区间上的紧性（及其推论：单位闭区间上的连续函数是有界的）。每讨论一个概念都有大量的例题。特别是在解释定理的意义以及为

培养学生的能力提供范例而详尽地写出其证明方面作了极大的努力。在本书初稿的使用中，作者发现学生在教师稍加指导下就能读懂本书的大部分内容，因此，课堂教学时间主要用于练习与难点的讨论。

第0章简要地介绍关于集、映射、可数性、实数的有序完备性以及等价关系等方面的必要知识。当然，这部分内容的教学用多少时间应根据学生的基础而定，但是，为了复习和记住一些专门术语，建议学生至少应迅速地读完这一章。而复习等价关系这一节与学习第三章的商空间联系起来却是一个好办法。

第一章介绍度量空间中的开集、闭集、邻域、连续映射以及收敛序列。在这一章中所采用的术语：d-闭集、(d, d')-连续映射等等是为了强调所涉及到的特殊度量。同时在这一章中，要通过论证连续性与收敛性的概念在度量用其等价度量代替后仍保持不变的方法来说明后面的拓扑空间定义是合理的。关于完备性这一节包含 Baire 范畴定理及其对处处不可微分的连续函数的存在的应用。由于这一节有较大的技术困难以及论述的问题与拓扑论述的问题不同，因而可以推迟甚至省略这一节的学习。完备性在第四章的第二节以前除偶尔提到外，一般不再出现，在第四章的第二节将用它来刻划紧度量空间的特性以及证明紧度量空间的序列的 Tychonoff 定理。

第二章开始拓扑学本身的研究。在这一章中讨论拓扑、邻域、Hausdorff空间、基与局部基、以及可数性。关于分离性质的整个体系，作为一个整体容易使初学者弄混淆，仅有性质T_2在教材的正文中被详细讨论，其余的性质归入练习。

连续性是第三章的论题。在这一章中构造乘积空间，并且着重讨论它们的映射性质。在这一章中还通过简短的论述子网而完全避免全网（univeral nets）的方法初步介绍网的收敛原理。这个原理应包含在初等拓扑学教程中：它把序列的收敛性置于特有的透视图中，简化后面的滤子收敛的研究，并且揭示出学生以前曾遇到过的作为一个统一概念的实例的各种不同的极限。不过，网的论述可以省略，而不损其实质：仅仅再次用到网的那些地方才表现出紧性的网特征（4·27），这个紧性的网特征自身可以被省略，而度量空间的紧性的序列特征（4·36），则只要求带有子列收敛的序列聚集之等价（3·69）。

在第四章中叙述紧性的基本事实。由于我们没有讲到Zorn's引理，对于有限多个空间的乘积和可度空间序列的乘积只证明了Tychonoff定理。序列紧性及其它各种紧性它们本身不被研究，仅在可度的情形下才作为紧性的等值。对于度量空间，紧性对一致连续性和对完备性的关系也作了考虑。局部紧空间的讨论包括一点紧化。

第五章的前三节介绍关于连通集、分支、局部连通空间、以及道路连通空间的一般事实。这部分内容在技术上甚至在概念上都比紧性简单，因此它可放在第四章之前学习。最后两节是同伦和二维中的Brouwer 不动定理和代数学的基本定理的证明。在这两节中所需要的紧性知识就是单位区间或单位正方形的开复盖的Lebesgue 数（4·41）的存在。为了使代数方法保持到最低限度并且使得在几何上成为更明显的事实，我们对同伦之论述显然避免了基本群（除了在练习中用到之外）。

在每一节的末尾给有练习。练习题总计583题。这些题目中从例行公式到复杂的不等，按困难程度分类，它们既包含对教材中所介绍的概念的理解，又包含给这些概念提供一些应用、补充例题、以及扩充。多数题不要求证明，而要求回答这样的问题，比如，“···是真的吗？”“关于···可以讲些什么？”“···有存在类比吗？”包含在练习中的若干题目，作者认为对于拓扑学的初等教程来说，并不是必不可少的，非包含在正文中不可，然而这些题目本身却是有趣的和重要的。这些题目是度量空间的完备化、T_0空间与T_1空间、Cartesian和拓扑、带边界的拓扑、拓扑群、闭图定理、割点、以及基本群等。

本书的练习题比教员需要布置给任何一个班级的要多，因此我们附加了练习指南。在这个指南中，我们引用了百分部份练习

所需要的每一个练习题。

在同一章内的所有定义、定理和例题按相邻顺序编号，因此3·15指的是第三章的第十五项目。每一章的练习按相邻顺序分别编号；第三章的第五题，当在本章提及时应是“练习5”，而在另一章中提及时就应是“练习3·5”。

文献目录只包括在本教材中提到的或者为了进一步学习所提出的书籍和论文。根据括号内的数字查找文献目录。附加在文献目录之后的内容是列举出的一些专门课题，可作为那些独特学生向其班级报告的内容。

课程教学大纲　　下面所列的教学大纲并不是应有尽有的，而只是在本教材的基础上提出一些可供参考的教学大纲。当然，任何给定的班级所学的那部分教材应随学生的予备知识而定，并且在很大程度上将取决于从我们提供的很多问题中所指定的问题的多少和难度。

最低教程（一季度或一学期）

第0章	1—5节
第一章	1—4节
第二章	省略2·41，2·42和2·56(5)与(6)
第三章	1节除去3·11(2)；2节除去3·22(3)与3·23；三节直到3·40，除去3·3·35(5)；0章的6节；4节除去3·49(7)—(9)；5节直到3·54
第四章	1节除去4·27
第五章	1节除去5·25与5·26；2节直到5·33

或5·35(4)；3节直到5·51——任选的

拓扑学的第二教程（一季度或一学期）

第一章　5节
第二章　2·41与2·42
第三章　3节除去3·41；4节与/或5节
第四章　4·27（若包含3章的5节）；2节与3节，或者4·41直到4·44以及3节直到4·56
第五章　2节除去5·34；3——5节
附加阅读材料或个别方案（见文献目录）

完　全　教　程（二学期或三个季度）

第0章直到第五章
附加阅读教材或个别方案

标准教程——强调几何（一学期或两个季度）

第0章　1——5节
第一章　1——4节
第二章　省略2·41，2·42以及2·56(5)与(6)
第三章　1节除去3·11(2)；2节除去3·23；3节直到3·40；0章的6节；4节；5节直到3·53
第四章　1节；定理4·41
第五章　省略5·53(5)；包括练习5·97，5·98，5·107

标准教程——强调分析（一学期或两个季度）

第〇章 1—5节

第一章 包括练习1·85与1·86

第二章

第三章 1—3节；〇章的6节；4节除去3·49—(9)；5节

第四章

第五章 1节；2节直到5·33；3节直到5·51—任选的

集论简明教程（1—5周）

第〇章

度量空间简略教程（8周）

第〇章 1—3节

第一章 包括练习1·13，1·14，1·68，1·85—1·89

专门课题的教程（可变时间）

第一章 1·71—1·73；1·69，1·70以及练习1·85与1·86

第三章 3·23（包括例题1·9与练习1·23）

第四章 4·28与4·29；4·41

第五章 例题5·35(5)与/或5·52；3—5节

感谢　我在麻省大学的学生在这本教材的初稿中发现了许多错误和看出了解释中的缺点。Victor Klee 教授和几个不知名的评论者校正了一些不恰当的叙述并且提出了许多改进措施。Margo Vidrine 与 Mrs. Rita Warner 女士迅速而准确地为原稿打字。对所有这些人为使本书出版所做的工作，我表示感谢。

Murray Eisenberg
默里　艾森伯格

肖荣圭赠

说　明

本教材是根据美国麻省大学 Murray Eisenberg 著《TopoLoGy》（拓扑学）一书（1974年版）翻译的。全书共六章，分三册装订。第一册内容包括：第〇章集与映射，第一章度量空间。第二册内容包括：第二章拓扑空间，第三章连续性与收敛性。第三册内容包括：第四章紧性，第五章连通性及附录。

由于译者业务水平有限，实践经验不足，加之时间仓促，译文中一定有不少缺点和错误，望读者批评指正。

译者　陈信传

1981·8·

5

第一册目录

附全书目录：

目　录

拓扑学（美）

第〇章　集与映射

本章介绍予备知识。在这一章中我们收集了本教材中要用到的关于集与映射的基本事实。其中许多材料对于读者来说并不是新的，因此可以迅速地阅读过去，以便借助少另的例题和论证，使读者回想起已学过的知识和记住在此教材中所采用的术语与符号。而对那些读者不太熟悉的课题，比如可数性、实数的有序完备性与等价关系，则应较详细地阅读。对于这些予备知识比较完全而又浅显的论述，可参看 Fairchild 与 Ionescu Tulcea [10] 或 [12]；高深的公理论述可参看 Eisenberg [9]。

1　集

常常使用两个逻辑连词：

$\Longrightarrow$ 表示蕴涵或者如果…则的意思；

$\Longleftrightarrow$ 表示当且仅当的意思。

集就是一些数学对象的汇集。若 x 为构成集 X 的对象之一，我们便写成

$$x \in X$$

并且说 x 是 X 的元素、或者成员、或者点，也说 x 属于 X；在相反的情形下，我们写成

$$x \notin X.$$

两个集 X 与 Y，仅当它们具有同样的元素，即是

$$x \in X \Longleftrightarrow x \in Y$$

时，才是相等的，记为

$$X = Y.$$

如果不是 $X = Y$ 的情形，我们就写成

$$X \neq Y.$$

这种否定某一陈述的符号（$\neq$）之类似用法，以后采用时不再进一步解释。

确定特殊集，常采用两种表示方法。

第一种方法是将这个集的元素完全列入在大括弧中间。例如，

$$\{-1, 1\}$$

是只有 -1 和 1 两个元素的集，而

$$\{2, 4, 6, \cdots\}$$

是一切正偶数的集（因为后一集是无限的，所以它的元素显然不可能全部列出来，但是它们的特性是隐含在联系上下文实际列出的少数元素之中）。

第二种方法，是用符号

$$\{x \mid P\}$$

来规定具有给定性质 P 的那些对象 x 的集。例如，若 R 表示实数的集，则

$$\{x \mid x \in R,\ x^2 = 1\} = \{-1, 1\};$$

这个集，是由集 R 的而又满足一定条件的元素组成的。这个集也可以用如下更改的符号来规定：

$$\{x \in R \mid x^2 = 1\}.$$

因为直杆 | 也具有其它符号的作用（例如，绝对值），所以为了避免混淆，有时用冒号"："来代替 $\{x \mid P\}$ 中的直杆 |，于是

$$\{x : x \in R, |x| = 1\} = \{-1, 1\} = \{x \in R : |x| = 1\}$$

0.1 特殊集。若 x 为一数学对象，则

$$\{x\}$$

是具有单独成员x的集；这个集$\{x\}$与这个对象x不同，正如被关在笼中的狮子与没有被关在笼中的狮子不同一样。没有任何成员的集ϕ，称为空集。于是

$$\{x \mid x \neq x\} = \phi = \{x \in R \mid x < x\}$$

任何其它的集是非空的。

我们对一些数集采用如下的专门符号：

N＝一切自然数集$=\{0, 1, 2, \cdots\}$

Z＝一切整数的集$=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

Q＝一切有理数的集

R＝一切实数的集

C＝一切复数的集

$I=\{x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

0.2子集。 如果一集X包含在集Y内，我们就称X为Y的子集，并记为

$$X \subset Y$$

这就是说X的每个元素是Y的元素，即

$$x \in X \Longrightarrow x \in Y.$$

这一事实，我们也记为

$$Y \supset X$$

并说Y包含X。例如，

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C, \quad R \supset I.$$

但

$$I \not\subset Q.$$

若x为一数学对象，则

$$\{x\} \subset X \Longleftrightarrow x \in X$$

空集是每个集X的子集：

$$\phi \subset X .$$

（证明：既然ϕ没有任何元素，所以它的任何元素一定是X的元素）.

显然

$$X=Y \Longleftrightarrow X \subset Y \text{ 且 } Y \subset X .$$

于是，包含$X \subset Y$并不能排除$X=Y$的可能性。当$X \subset Y$而$X \neq Y$时，我们就把X称为Y的真子集。

可以应用子集的术语，来叙述数学归纳法原理、

设 $E \subset N$， 假定 $0 \in E$且假定

当 $n \in E$时， $n+1 \in E$， 那么$E=N$.

这个原理（我们把它当作自然数的基本性质）是“归纳法证明”的基础。现举例说明如下：

用数学归纳法证明

$$(*) \qquad 2^n > n \qquad (n \in N)$$

首先，$2^0=1>0$。其次，假定 $n \in N$ 且

$$2^n > n .$$

若 $n>0$，则

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &> 2 \cdot n \quad (\text{根据假定 } 2^n > n) \\ &= n+n \geqslant n+1 ; \end{aligned}$$

若 $n=0$，则 $2^{n+1}=2>1=n+1$。于是，当$2^n>n$时，$2^{n+1}>n+1$。这就证明了（$*$），因为若我们令

$$E=\{n \in N \mid 2^n > n\}$$

则 $E \subset N$，并且，我们证明了 $0 \in E$与当 $n \in E$时，$n+1 \in E$；所以，根据数学归纳法原理我们便得到 $E=N$。