

高等数学

第四卷

(第二分册)

R. 罗德著

秦裕瑗译



高等教育出版社

高 等 数 学

第 四 卷
(第二分册)

R. 罗 德 著
秦 裕 瑗 译

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据莱比錫托伊布訥出版社(B. G. Teubner Verlagsgesellschaft)出版的罗德(R. Rothe)著“高等数学”(Höhere Mathematik)第四卷第二分册 1961 年第 11 版譯出。第四卷共有三分册, 分別作为罗德著“高等数学”前三卷的补充习题集。各分册中除了习题数量增多到三、四倍之外, 且附有較詳細的解答与提示。

本卷各分册可分別配合前三卷的学习参考, 也可供教师选题参考。讀者对象是高等学校理工科程度較好的学生, 基础較好的自学者以及有关教师。

高等数学

第四卷 第二分册

R. 罗 德 著

秦 裕 璦 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

统一书号 K13010 · 1176 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 3 $\frac{1}{16}$

字数 105,000 印数 0,001—3,000 定价(5) 半 0.40

1965 年 4 月第 1 版 1965 年 4 月北京第 1 次印刷

目 录

(第二分册)

第一章 积分法	129
1. 第二卷 § 1 至 § 4 的练习题	129
不定积分的积分法。复变函数的积分。递推公式。推广的分部积分法。累积分。含有二次式的积分。有理函数的积分。代数无理函数与超越函数的积分。应用。	
2. 第二卷 § 5 至 § 8 的练习题	153
定积分的问题。积分中值定理。近似积分法。图解积分法。积分学在几何与力学上的应用。面积。弧长。体积。卡瓦里利原理。旋转体的体积。旋转曲面的侧面积。匀质平面图形。曲线段及匀质物体的质量中心。	
3. 第二卷 § 9 至 § 11 的练习题	173
中值。三角和。广义积分。面积仪与积分仪。	
第二章 无穷级数。幂级数	183
4. 第二卷 § 12 至 § 14 的练习题	183
收敛判别法。幂级数。台劳级数。	
5. 第二卷 § 15 至 § 17 的练习题	206
无穷级数的练习题(续)。一致收敛。三角级数。利用级数求积分。复数项级数。斯特林公式。	
第三章 依赖于一个参数的积分	215
6. 第二卷 § 18 至 § 22 的练习题	215
定积分对参数的微分法与积分法。线积分。应用。	
第四章 行列式与矢量	219
7. 第二卷 § 23 至 § 28 的练习题	219
行列式。线性方程组的解。圆锥曲线的研究。空间矢量。矢量的乘法。矢量在几何及力学上的应用。	

第一章 积分法

1. 第二卷 § 1 至 § 4 的练习题

不定积分的积分法. 复变函数的积分. 递推公式. 推广的分部积分法. 累积分. 含有二次式的积分. 有理函数的积分. 代数无理函数与超越函数的积分. 应用.

1. a) $\int \sin ax \, dx$, b) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$, c) $\int \sqrt{1-x} \, dx$, d) $\int \frac{dx}{1-x}$.
(参阅第 28 页第 1 题.)^①

解: a) $-\frac{\cos ax}{a}+C$, b) 利用关系式 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$. 结果是 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$, c) 令 $1-x=u$, $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})^3+C$, d) 令 $1-x=u$, $-\ln(1-x)+C$.

2. a) $\int \sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^4} \, dx$, b) $\int \cos(ax+b) \, dx$,
c) $\int \left(\sqrt[3]{\frac{5}{x^7}} + \sin \frac{x}{2} \right) dx$.

答: a) $\frac{3}{7\beta} \sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^7}+C$, ($\beta \neq 0$), b) $\frac{1}{a} \sin(ax+b)+C$, ($a \neq 0$),
c) $-\frac{3}{4x} \sqrt[3]{\frac{5}{x}} - 2\cos\frac{x}{2}+C$.

3. $\int \frac{x^n dx}{\alpha x^{n+1} + \beta} = ?$ (参阅第 28 页第 2 题.)

解: 1) 当 $n \neq -1$, 令 $\alpha x^{n+1} + \beta = u$, $\frac{\ln(\alpha x^{n+1} + \beta)}{\alpha(n+1)} + C$, ($\alpha \neq 0$).

^① 本分册内, 括号里所指的是本书第二卷中译本的页码及题次. ——译者.

2) 当 $n = -1$, $\frac{\ln x}{\alpha + \beta} + C$ ($\alpha + \beta \neq 0$).

4. $\int \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi = ?$ (参阅第 28 页第 3 题.)

解: 应用关系式 $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$; $\operatorname{tg} \varphi - \varphi + C$.

5. $\int \arcsin x dx = ?$ (参阅第 28 页第 4 题.)

解: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. (分部积分法.)

6. $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = ?$

解: 令 $x^2 = u$; $-\frac{1}{2(1+u^2)} + C$.

7. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3-4x}} = ?$

解: 令 $3-4x = u^2$; $-\frac{1}{6}(2x+3)\sqrt{3-4x} + C$.

8. $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}} = ?$

解: 令 $x^n = \frac{1}{u^2}$; $nx^{n-1}dx = -\frac{2du}{u^3}$; $J = -\frac{2}{n} \int \frac{u du}{u^3 x^{n-1} \cdot x\sqrt{1-u^2}} =$
 $= \frac{2}{n} \arccos \frac{1}{\sqrt{x^n}} + C$.

9. a) $J_1 = \int \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}} dx = ?$ b) $J_2 = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}} = ?$

解: a) $J_1 = \int \frac{d\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \operatorname{arsinh}(\sin x) + C = \ln(\sin x +$
 $+ \sqrt{1+\sin^2 x}) + C$ (参阅 § 3(6)). b) $J_2 = - \int \frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 x}}$.

令 $t = \cos x / \cos \alpha$, 就有 $J_2 = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos \left(\frac{\cos x}{\cos \alpha} \right) + C$.

$$10. \text{ a) } J = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ b) } \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx.$$

解: 令 $1-x^2=u^2$, 就得到

$$\begin{aligned} \text{a) } J &= \int \frac{x dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} + C' = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} + C' = \frac{1}{2} \ln(-1) + \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C' = \\ &= \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } J &= \int \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot x dx}{x^2} = - \int \frac{u^2 du}{1-u^2} = \int du + \int \frac{du}{u^2-1} = \\ &= \sqrt{1-x^2} + \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

$$11. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ?$$

解: 令 $e^x = u$; $\operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x + C$.

$$12. J = \int \frac{dz}{\cosh z} = ? \quad (\text{参阅第 28 页第 5 题.})$$

解: 令 $e^z = u$; $J = 2 \int \frac{du}{1+u^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^z + C$. (参阅第 11 题.)

$$13. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = ?$$

解: 令 $1/x^2 = u$; $-\frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(1/x^2) + C$.

$$14. \int x e^{ax} dx = ?$$

解: $\frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C$. (分部积分法.)

$$15. J = \int x \operatorname{tg}^2 x dx = ?$$

解: $J = \int x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x - \frac{1}{2} x^2 + C$. (分部积分法.)

$$16. J = \int \frac{e^{c \operatorname{arctg} x} dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$$

解: 令 $\operatorname{arctg} x = u$, $J = \int e^{cu} \cos u \, du = e^{cu} \sin u - c \int e^{cu} \sin u \, du =$
 $= e^{cu} \sin u + c e^{cu} \cos u - c^2 \int e^{cu} \cos u \, du$. 从而得 $J = \frac{e^{cu} (\sin u + c \cos u)}{1+c^2} + C$.

因为 $x = \operatorname{tg} u$, 所以 $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 乃有

$$J = \frac{e^{c \operatorname{arctg} x} (c+x)}{(1+c^2)\sqrt{1+x^2}} + C.$$

$$17. J = \int \frac{dx}{x(a+bx^n)} = ?$$

解: 令 $x^n = u$; $J = \frac{1}{n} \int \frac{du}{u(a+bu)} = -\frac{1}{an} \int \left(\frac{b}{a+bu} - \frac{1}{u} \right) du =$
 $= -\frac{1}{an} \ln \left(b + \frac{a}{x^n} \right) + C.$

18. 試证 $\int x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1}$, x 为实变量且 $\neq 0$. (对 x^i 的实部与虚部分别积分). (参阅第 28 頁第 6 題.)

证: 因为 $x^i = e^{i \ln x} = \cos(\ln x) + i \sin(\ln x)$. (参阅第一卷 § 30(6).)
 令 $\ln x = u$, 就有

$$\int \cos(\ln x) dx = \int e^u \cos u \, du = \frac{1}{2} e^u (\cos u + \sin u) + C_1.$$

(重复用分部积分法.) 相应地有

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + C_2.$$

所以

$$\begin{aligned} \int x^i dx &= \frac{1}{2} e^u (\cos u + i \sin u + \sin u - i \cos u) + C = \\ &= \frac{1}{2} x e^{iu} (1-i) + C = \frac{x^{i+1}}{i+1} + C. \end{aligned}$$

$$19. J = \int \operatorname{tgh}^3 u \, du = ?$$

解①：因为 $\operatorname{tgh} u \, du = d(\ln \cosh u)$ ，所以

$$J = \int \operatorname{tgh}^2 u \, d(\ln \cosh u) = \operatorname{tgh}^2 u \ln \cosh u - \int \frac{2 \operatorname{tgh} u \ln \cosh u}{\cosh^2 u} du + C_0.$$

如果令 $\cosh u = \lambda$ ，最后一个积分就变成

$$2 \int \frac{\ln \lambda \, d\lambda}{\lambda^3} = -\frac{1}{\lambda^2} \ln \lambda - \frac{1}{2\lambda^2} + C_1$$

(分部积分法)。所以

$$J = \operatorname{tgh}^2 u \ln \cosh u + \frac{\ln \cosh u}{\cosh^2 u} + \frac{1}{2 \cosh^2 u} + C_2 = \ln \cosh u - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 u + C.$$

$$20. \quad J = \int \sqrt{x + \sqrt{x}} \, dx = ?$$

$$\begin{aligned} \text{解：令 } x = u^2; \quad J &= 2 \int \sqrt{u + u^2} \, u \, du = 2 \int \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \left(u + \frac{1}{2}\right) du - \\ &\quad - \int \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \, du. \end{aligned}$$

再令 $u + \frac{1}{2} = v$ ，就得到(参阅 § 3(11))

$$\begin{aligned} J &= 2 \int \sqrt{v^2 - \frac{1}{4}} \, v \, dv - \int \sqrt{v^2 - \frac{1}{4}} \, dv = \frac{2}{3} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{8} \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right) + C = \\ &= \frac{1}{12} (4\sqrt{x} + 3) (2\sqrt{x} - 1) \sqrt{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{8} \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right) + C. \end{aligned}$$

这个解也可以写成以下的形式

$$J = \frac{2}{3} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^3 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{8} \operatorname{arcosh}(2\sqrt{x} + 1) + C'.$$

(参阅 § 3(8)).

$$21. \quad J = \int (\ln x)^n dx = ? \quad (m \text{ 是正整数}). \quad (\text{参阅第 28 页第 7 题}).$$

① 下面的解法似乎更简单一些：因为 $(\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x = -\operatorname{tgh}^2 x + 1$ ，所以

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tgh}^3 x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sech}^2 x) \operatorname{tgh} x \, dx = \int \operatorname{tgh} x \, dx - \int \operatorname{tgh} x d \operatorname{tgh} x = \\ &= \ln \cosh x - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 x + C. \quad \text{——译者.} \end{aligned}$$

解: 令 $\ln x = u$; $J = \int u^m e^u du = e^u u^m - m \int e^u u^{m-1} du$
 $= e^u u^m - m e^u u^{m-1} + m(m-1) \int e^u u^{m-2} du$

等等, 结果是

$$J = C + x[(\ln x)^m - m(\ln x)^{m-1} + m(m-1)(\ln x)^{m-2} + \cdots + (-1)^m m!].$$

22. $\int x^{p-1} (\ln x)^q dx = \varphi_{p,q} = ?$ ($p \neq 0$, 而 q 为正整数). (参阅第

28 頁第 8 題.)

解: 令 $\ln x = u$; $\varphi_{p,q} = \int u^q e^{pu} du = \frac{e^{pu} u^q}{p} - \frac{1}{p} \int e^{pu} q u^{q-1} du + C$ 等等

(参阅第 21 題). 所以

$$\varphi_{p,q} = \frac{x^p q!}{p^{q+1}} \left(\frac{(p \ln x)^q}{q!} - \frac{(p \ln x)^{q-1}}{(q-1)!} + \cdots + (-1)^q \right) + C.$$

附言: 当 $p=0$ 时, 有

$$\varphi_{0,q} = \int \frac{(\ln x)^q}{x} dx = \frac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C' (q \neq -1),$$

$$\varphi_{0,-1} = \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C''.$$

23. $J = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = ?$

解: 令 $\ln x = y$; $J = \int \ln y dy = y(\ln y - 1) + C = \ln x (\ln(\ln x) - 1) + C$. (分部积分法.)

24. $J = \int_{-1}^{+1} x^n dx = ?$ (n 是整数且 ≥ 0). (参阅第 28 頁第 9 題.)

解: 如果 n 是一奇数, 那末 $y = x^n$ 是一个奇函数, 所以积分等于零. 如果 n 是一偶数, 那末有 $J = 2 \int_0^1 x^n dx = 2: (n+1)$.

25. 試证

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right),$$

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right) \frac{2m}{2m+1}.$$

(参阅第 29 页第 10 题.)

$$\begin{aligned} \text{证: } \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=2}^m \left(1 - \frac{1}{(2\lambda-1)^2}\right) &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots \frac{(2m-2) \cdot 2m}{(2m-1) \cdot (2m-1)}\right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ (参阅 § 2(7)).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\prod_{\lambda=1}^m \left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right)\right) \frac{2m}{2m+1} &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdots \frac{(2m-1)(2m+1)}{2m \cdot 2m} \cdot \frac{2m}{2m+1}\right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \text{ (参阅 § 2(7)).} \end{aligned}$$

$$26. J = {}^{(n)} \int \ln x \, dx^n = ? \text{ (参阅第 29 页第 11 题.)}$$

解: 利用公式 § 2(3). 因为

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x, \quad {}^{(2)} \int \ln x \, dx^2 = \frac{x^2}{2!} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} \right), \dots$$

$$\text{及} \quad \int x^{n-1} \ln x \, dx = \frac{x^n}{n} \left(\ln x - \frac{1}{n} \right)$$

乃得

$${}^{(n)} \int \ln x \, dx^n = \frac{x^n}{n!} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} \right) + G_{n-1}(x),$$

其中 $G_{n-1}(x)$ 表示一个 $n-1$ 次多项式.

$$27. J = \int \left(\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)} \right) dx = ?$$

解: 令 $\frac{f(x)}{f'(x)} = u$; 因为 $u' = \frac{f'^2 - ff''}{f'^2}$, 所以

$$J = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \frac{f^2(x)}{f'^2(x)} + C.$$

$$28. J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = ?$$

解: 令 $x+1=u$; $J = \int \frac{du}{u^2+2}$. 如果令 $u=v\sqrt{2}$, 那末

$$J = \frac{1}{2}\sqrt{2} \arctg v + C = \frac{1}{2}\sqrt{2} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$$29. J = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = ?$$

解: 令 $x+2=u$, 就有

$$J = \int \frac{u du}{u^2+1} = \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + C.$$

$$30. J = \int \frac{dx}{x^2-9} = ?$$

$$\text{解: } \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right); \quad J = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3} + C.$$

$$31. J = \int \frac{x dx}{x^2-3x+2} = ?$$

$$\text{解: } \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}; \quad J = \ln \frac{(x-2)^2}{x-1} + C.$$

$$32. J = \int \frac{(ax+b)dx}{x^2-7x+12} = ?$$

$$\text{解: } \frac{ax+b}{x^2-7x+12} = \frac{4a+b}{x-4} - \frac{3a+b}{x-3}; \quad J = \ln \frac{(x-4)^{4a+b}}{(x-3)^{3a+b}} + C.$$

$$33. J = \int \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} dx = ?$$

解: 由关系式

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1};$$

$$J = x + \ln \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2} + C.$$

$$34. J = \int \frac{x^2 dx}{(x^2-1)(x+2)} = ?$$

$$\text{解: 由 } \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}; \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{4}{3}, \quad C = -\frac{1}{2};$$

$$J = \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)(x+2)^8}{(x+1)^3} + C.$$

$$35. J = \int \frac{x^3 dx}{(x^2-1)(x+2)} = ?$$

解: 由 $\frac{x^3}{(x^2-1)(x+2)} = 1 - \frac{2x^2-x-2}{(x+1)(x-1)(x+2)} = 1 - \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \right);$ $A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{6}, C = +\frac{8}{3}; J = x + \ln \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^8}} + C.$

$$36. J = \int \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = ? \quad (\text{参阅第 29 页第 12 题.})$$

解: 由关系式 $\frac{1}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right);$

$$J = \frac{1}{3} \left(\arctg x - \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$37. J = \int \frac{2x^3+4x^2+2x+3}{x^4(1+x^2)} dx = ? \quad (\text{参阅第 29 页第 13 题.})$$

解: 由 $\frac{2x^3+4x^2+2x+3}{x^4(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex+F}{1+x^2};$

$$A=0, B=1, C=2, D=3, E=0, F=-1;$$

$$J = c - \arctg x - x^{-1} - x^{-2} - x^{-3}.$$

$$38. J = \int \frac{dx}{1-x^3} = ?$$

解: 由 $\frac{1}{1-x^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}; A=B=\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3};$

$$J = -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{1+x+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x+x^2} + C' =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + C'' =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{1+2x}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \sqrt{3} \arctg \left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right) \right) + C.$$

$$39. J = \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = ?$$

解: 由 $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$; $A=B=C=\frac{1}{4}$,

$$D = -\frac{1}{4}; J = \frac{x}{2(1-x^2)} + \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C_0.$$

$$40. J = \int \left(\frac{x^2+1}{(x-1)^3} \right)^2 dx = ?$$

解: 令 $x-1=u$; $x^2+1=u^2+2u+2$; $dx=du$.

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{(u^2+2u+2)^2}{u^6} du = C_0 - \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{8}{3u^3} + \frac{2}{u^4} + \frac{4}{5u^5} \right) = \\ &= C_0 - \frac{15u^4+30u^3+40u^2+30u+12}{15u^5}. \end{aligned}$$

$$\text{结果是: } J = C_0 - \frac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{15(x-1)^5}.$$

$$41. J = \int \frac{dx}{1+x^4} = ? \quad (\text{参阅第 29 页第 14 页.})$$

解: 因为 $1+x^4 \equiv 1+x^4+2x^2-2x^2 = (1+x^2)^2-2x^2 \equiv$
 $\equiv (1+x\sqrt{2}+x^2)(1-x\sqrt{2}+x^2),$

作部分分式就得到

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}x}{1+x\sqrt{2}+x^2} dx + \int \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}x}{1-x\sqrt{2}+x^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\int \frac{2\sqrt{2}+2x}{1+x\sqrt{2}+x^2} dx + \int \frac{2\sqrt{2}-2x}{1-x\sqrt{2}+x^2} dx \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\int \left(\frac{\sqrt{2}+2x}{1+x\sqrt{2}+x^2} - \frac{-\sqrt{2}+2x}{1-x\sqrt{2}+x^2} \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int \left(\frac{\sqrt{2}}{1+x\sqrt{2}+x^2} + \frac{\sqrt{2}}{1-x\sqrt{2}+x^2} \right) dx \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \sqrt{2} \left(\int \frac{dx}{1+x\sqrt{2}+x^2} + \int \frac{dx}{1-x\sqrt{2}+x^2} \right) \right). \end{aligned}$$

如果令 $x + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}u$, 就有

$$\int \frac{dx}{1+x\sqrt{2}+x^2} = \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2}+1);$$

相应地有

$$\int \frac{dx}{1-x\sqrt{2+x^2}} = \sqrt{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1).$$

应用公式

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$$

就得到结果

$$J = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right) + C.$$

42. $J = \int \frac{x^2}{1+x^4} dx = ?$ (参阅第 29 页第 15 题.)

解: 作部分分式(参阅第 41 题)得到

$$J = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(- \int \frac{2x}{1+x\sqrt{2}+x^2} dx + \int \frac{2x}{1-x\sqrt{2}+x^2} dx \right).$$

在分式的分子上加减 $\sqrt{2}$, 经过一些变形以后积分就可以写成下面的形状

$$J = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + \sqrt{2} \int \left(\frac{1}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{1+x\sqrt{2}+x^2} \right) dx \right),$$

结果是: $J = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right) + C.$

43. a) $J_1 = \int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx = ?$ b) $J_2 = \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = ?$

解: 利用第 41 与 42 题的结果就得到

a) $J_1 = \frac{1}{4} \sqrt{2} \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + C,$ b) $J_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$

44. $J = \int \frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} dx = ?$ (参阅第 29 页第 16 题.)

解: 由 $\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$ $A = -1, \quad B = D = 1, \quad C = 0;$

$J = \frac{1}{x} + \ln x + \operatorname{arctg} x + C_0.$

45. 人口数 y 当其充分大时大致按有机体增长律(第一卷

§ 10, 9) 随时间 t 自由增长: $\frac{dy}{dt} = ay;$ 如果计及疾病与其他原因,

增长速度假定要减小一个与人口数平方成正比的量, 于是有

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2, \quad (a, b > 0).$$

試由此決定在某時刻 t 的人口數 y (凡爾赫斯特人口律)^①. (參閱第 29 頁第 17 題.)

解: 分離微分方程的變量 (參閱第一分冊練習題 5 第 15 題, 本書第 54 頁) 並積分, 得

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dy}{ay - by^2} = \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{b}{a - by} \right) dy = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{a - by} + C = \\ &= -\frac{1}{a} \ln \frac{a - by}{by} + t_0 \end{aligned}$$

其中 $C = \frac{1}{a} \ln b + t_0$. 於是

$$y = \frac{a}{b} \frac{e^{a(t-t_0)}}{1 + e^{a(t-t_0)}}.$$

當 $t \rightarrow \infty$ 時, y 趨於 $\frac{a}{b}$.

$$46. J = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-x} x^n dx = ? \quad (\text{參閱第 30 頁第 18 題.})$$

解: 應用公式 § 1(26), 得

$$J = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega^n + n\omega^{n-1} + n(n-1)\omega^{n-2} + \cdots + n!}{e^{\omega}} \right) + n!$$

因為當 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ 時, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^n}{e^{\omega}} = 0$, 所以 $J = n!$

$$47. J = \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx = ? \quad (\text{參閱第 30 頁第 19 題.})$$

解: 應用加法定理

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

得到

$$\begin{aligned} \cos x \cos 2x \cos 3x &= \frac{1}{2} (\cos x \cos 3x + \cos^2 3x) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) \end{aligned}$$

① 凡爾赫斯特 (P. F. Verhulst) 1804—1849 布魯塞爾人.

$$J = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C.$$

$$48. J = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = ?$$

解: 用 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 乘除被积函数, 并令 $x + \frac{\pi}{4} = u$, 于是由 $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin u$ 就有

$$J = \frac{1}{2}\sqrt{2} \int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2}\sqrt{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + C.$$

(参阅 §1(24).)

$$49. J = \int \frac{dx}{\sin x - \operatorname{tg} x} = ?$$

解: 令 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, 则 $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$, $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2y}{1-y^2}$, 于是

$$J = -\frac{1}{2} \int \frac{1-y^2}{y^3} dy = \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{2} \ln y + C = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$50. J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx = ?$$

解: $J = - \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{4 - \cos^2 x} = -\frac{1}{4} \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{2 + \cos x} \right) d(\cos x)$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \ln 3 = 0.2747.$$

$$51. J = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = ?$$

解: $J = \int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}} =$

$$= \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{2} \ln(2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 2}) + C =$$

$$= \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{2} \operatorname{ar} \cosh \frac{2x-1}{3} + C. \quad (\text{参阅 §3(8).})$$