高等代数习作课

秦建国 薛有才 主编

西北工业大学出版社

高等代数习作课讲义

主　编　秦建国　薛有才

副主编　柴未然　郭佑镇

刘树堂

西北工业大学出版社

1992年2月　西安

(陕)新登字第009号

【内容简介】本书是依据国家教委制定的师范专科学校"高等代数"课程教学大纲的要求，参考张禾瑞、郝炳新所编《高等代数》教材编写的．主要特点是：(1) 可供上课用并参与教学过程；(2) 各章节针对教学大纲要求，对教学内容、习题进行分类，写配合基础题部分的讲解，给学生一个把握该课程的客观标准．本书可作为师范专科学校、教育学院、电大数学系学生以及普通高等学校数学系低年级学生的教学参考书．

高等代数习作课讲义
主　编　秦建国　薛有才
责任编辑　刘彦信
责任校对　享　邑
*
西北工业大学出版社出版发行
(西安市友谊西路127号)
全国各地新华书店经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0400-4/O·54
*
开本 850×1168 毫米 1/32 10印张 248千字
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷
印数：1—7 100册　　定价：3.95元

前　　言

为了满足教学工作的需要，我们根据国家教委制定的师范专科学校"高等代数"课程教学大纲，以张禾瑞、郝钢新编《高等代数》教材为底本编写了这本讲义．本书所提及的定义、定理、习题与该教材对应．编写时我们注意做到：(1) 与其它参考书、指导书相区别，可供上课用并参与教学过程；(2) 知识性、科学性与趣味性的结合；(3) 各节前面对教学内容、习题作分类，再配合基础题部分的讲解，给学生一个把握该课程的客观标准．

本书是为师范专科学校、教育学院、电大数学系学生以及普通高等学校数学系低年级学生而编写的教学参考书，也可用作辅助教材．

除主编、副主编外，参加本书编写工作的人员还有（按章节次序）金能、郑学良、罗敏霞、祝家贵、江振中、张军、陈会忠、周晓忠、杨凌、牛保才、孙杰、毕成良、吴祖明、贾正华、马尔迈、黎爱平、杨俊民、李佐根、肖孙安、李桂荣、张景晓、龚奇菊、徐敏、刘恒、徐兰、杨毅平、凌瑞官、杨炳良、陈学鑫、郝振吉、孙广才、章如磊．

限于水平，书中不妥之处，敬希广大读者批评指正．

编　者

1991 年 7 月

目　录

第一章　基本概念

本章介绍集合、映射、数学归纳法、数环、数域及整数除性等有关概念和方法，作为学习本课程及其它有关课程的预备知识. 同时通过本章内容的学习，加深对中学数学有关内容的认识和理解.

为了叙述方便，约定 Q^+ 与 R^+ 分别表示全体正有理数与正实数的集.

§1.1　集合

§1.2　映射

集合是一个不定义的原始概念，是由某些确定的事物所组成的一个集体. 集合的特征是其中的元素具有确定性、互异性和无序性. 而映射概念是由具体事物中抽象出来的，它是函数概念的推广，一个映射确定了两个集合内的元素间的某种对应关系. 学习映射应该严格区分和抓住每个概念的定义，注意培养语言表达的准确性以及举反例的能力.

一、概念题

例 1　判断题

(1) 著名艺术家全体作成一个集合.

(2) 平面上不在一、三象限的点的集合为 $A=\{(x,\ y)|xy<0,\ x\in R,\ y\in R\}$.

(3) A 的子集由 A 的部分元素组成.

(4) A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，则 $A\bigcup B$ 有 $m+n$ 个元素.

(5) $x\notin A\bigcap B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

(6) $A=\{(0,\ y)|y\in R\}$，$B=\{(x,\ 0)|x\in R\}$，则 $A\bigcup B=\{(x,\ y)|x,\ y\in R\}$.

(7) $A\bigcup B\subseteq A\times B$.

(8) $\varphi=\{0\}$

评注 这里约定，空集是任意集合的子集，即 $\varphi\subseteq A$.

因为 $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in A$，有 $x\in B\Leftrightarrow x\notin B$，有 $x\notin A$，由于 $x\notin A$，当然 $x\notin\varphi$，所以 $\varphi\subseteq A$.

例 2 填空题

(1) 集合 $\{a\}$ 的所有子集为(　　).

(2) $2Z\bigcup 6Z=$(　　).

(3) $A=\{(x,\ y)|2x+3y=0,\ x,\ y\in R\}$，$B=\{(x,\ y)|3x+4y=0,\ x,\ y\in R\}$，则 $A\bigcap B=$(　　).

(4) 若 A 与 B 的元素的个数分别为 5 和 3，则 $A\times B$ 的元素个数为(　　).

(5) 多项选择，下列对应哪些是从集合 A 到 B 的映射(　　).

① $A=N$(自然数集)，$B=\{1,\ -1\}$，对应法则 f: $n\to(-1)^n$;

② $A=\{0,\ 1,\ 4,\ 9\}$，$B=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$f$: $x\to\pm\sqrt{x}$;

③ $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 5\}$，$B=\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}\}$，对应 f: $x\to\frac{1}{x}$;

④ $A=B=R$，对应法则 f: $x\to y=\dfrac{1+x}{1-x}$；

⑤ $A=Z$，$B=R$，对应法则 f: $x\to|x|$.

评注 判断 A 到 B 的一个对应是否作成映射，要判断三点：(1) $x\in A$，x 在 f 下是否有象；(2) $x\in A$，$f(x)$ 是否唯一确定；(3) $f(x)$ 是否属于 B. 如果这三个条件中有一个不成立，f 就不是 A 到 B 的映射.

二、基础题

例 3 下列映射 f 是不是 A 到 B 的满射？是不是单射？双射？

(1) $A=C$(复数集),$B=R$ 对应 f: $x+yi\to x$.

(2) $A=B=Z$,对应法则 f:$x\to 2x+5$, $x\in Z$.

(3) 如图所示，设 A 是半圆周上的点集,B 是直径上的点集, $P\in A$ 过 P 作直径的垂线交直径于 P' 点，规定 $f(P)=P'$.

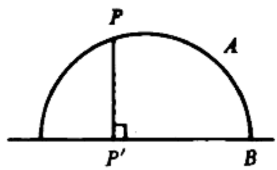

图 1

分析 判断一个映射 f: $A\to B$ 是否为满射，只要判断 $y\in B$，是否存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 要判断一个映射是否为单射，只要判断：对于 $f(x_1)=f(x_2)$，$(x_1 x_2\in A)$ 是否有 $x_1=x_2$.

解 ① $\because$ $x\in R$，存在 $x+yi\in C$ 使 $f(x+yi)=x$，$\therefore f$ 是满射. 由于 $f(1+2i)=f(1+3i)=1$，但 $1+2i\neq 1+3i$，$\therefore f$ 不是单射.

② 对于 $2\in B$，不存在 $x\in A$，使 $f(x)=2x+5=2$，事实上，如有 $2x+5=2$ 则 $x=-\dfrac{3}{2}\notin A$，$\therefore f$ 不是满射. 如果 $f(x_1)$

$=f(x_2)$，$2x_1+5=2x_2+5$ 则 $x_1=x_2$ $\quad\therefore f$ 是一个单射.

③ 显然 $P\in A$ 在 B 中有唯一确定的象，f 是 A 到 B 的一个映射. $P'\in B$，过 P' 作直径的垂线交圆弧于 P 点，则有 $f(P)=P'$. 因此 f 是满射. 对于 A 中任意两点 P，P_1，如果 $P\neq P_1$，显然 $f(P)\neq f(P_1)$，$\therefore f$ 是单射.

因此 f 是 A 到 B 的双射.

评注 (1) 要证明映射 f: $A\to B$ 是满射，可以从 B 中任取一个元素 y，先假定存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 然后由此去找 x，再反过去叙述. 注意 y 的选取应具有一般性.

(2) 由于映射是多种多样的，因此，在判定或证明一个映射是不是单射（满射）时应该灵活运用定义或与它们等价的说法.

(3) 两个集合如果能够建立一一对应，抽象地看，可以认为它们含有的元素“一样多”. 从以上的例 3(3) 可见，尽管圆弧伸直以后比半径长，但这两段曲线中点的数目“一样多”.

三、综合题

例 4 证明 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcup(B-A)=B$.

证明 设 $A\subseteq B$，则 $A\bigcup B=B$，因为 $A\bigcup B=A\bigcup(B-A)$，所以，$A\bigcup(B-A)=B$.

因为 $A\subseteq A\bigcup(B-A)$，而 $A\bigcup(B-A)=B$，显然 $A\subseteq B$.

评注 利用集合的运算法则，直接进行演绎推理，为以后向量空间的证明提供证题思路.

例 5 证明 $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

证明 $x\in A\bigcup(B\bigcap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\bigcap C$.

若 $x\in A$，则 $x\in A\bigcup B$ 且 $x\in A\bigcup C\Rightarrow x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

若 $x\in B\bigcap C$，$\left.\begin{array}{l}\text{则 } x\in B\Rightarrow x\in A\bigcup B\\ \text{且 } x\in C\Rightarrow x\in A\bigcup C\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcap C)$

反之，$x \notin (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$

这时若 $x \in A$，则 $x \in A \cup (B \cap C)$.

$$\text{若} x \notin A\text{，则由} \left.\begin{aligned} & x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \\ & \text{且} x \in A \cup C \Rightarrow x \in C \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

例6 设 f: $A \to B$，g: $B \to C$ 是映射，又令 $h = g \circ f$.

证明 (1) 如果 h 是单射，那么 f 也是单射;

(2) 如果 h 是满射，那么 g 也是满射;

(3) 如果 f，g 都是双射，那么 h 也是双射，并且 $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

分析 (1)，(2) 可直接根据单射、满射定义或等价命题证明. 因为映射 h 可逆 $h \Leftrightarrow h$ 是双射，要证明 $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$，只需验证 $h \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = j_c$，$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ = j_A$. 以下结合图 2 写出综合过程.

证明 (1) x，$x_2 \in A$，假设 $f(x_1) = f(x_2)$ 则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ 即 $h(x_1) = h(x_2)$.

因为 h 是单射. 所以 $x_1 = x_2$ 即 f 是单射.

(2) $z \in C$，由于 h: $A \to C$ 是满射，所以存在 $x \in A$ 使 $h(x) = z$，即存在 $x \in A$ 使 $(g \circ f)(x) = z \Rightarrow g(f(x)) = z$.

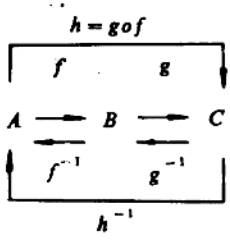

图 2

而 $y = f(x) \in B$，所以 $z \in C$，存在 $y \in B$ 使 $g(y) = z$，从而 g 是满射.

(3) 先证 h 是单射.

x_1，$x_2 \in A$，如果 $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，因为，$g$ 是单射，$f(x_1)$

$=f(x_2)$，再由 f 是单射知 $x_1=x_2$，因此 h 是单射.

再证 h 是满射.

$z\in C$，由于 g 是满射，所以存在 $y\in B$ 使 $g(y)=z$，又因为 f 是满射，所以存在 $x\in A$ 使 $f(x)=y$. 所以 $g(f(x))=z\Rightarrow(g\circ f)(x)=z$ 或 $h(x)=z$，$x\in A$，从而 h 是满射.

h 既是满射又是单射，从而为双射，因此 h 有逆映射 h^{-1}.

因为

$$h^{0}(f^{-1}\circ g^{-1})=(h\circ f^{-1})\circ g^{-1}=((g\circ f)f^{-1})\circ g^{-1}$$
$$=(g\circ(f\circ f^{-1}))\circ g^{-1}=(g\circ j_B)\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=j_C$$
$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ h)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f))$$
$$=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g))f=f^{-1}\circ(j_B\circ f)=f^{-1}\circ f=j_A$$

所以 $f^{-1}\circ g_{-1}$ 为 h 的逆映射，从而 $h^{-1}(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

评注 (1) 对于映射合成的问题，可借助图 3 进行分析，逐层展开讨论.

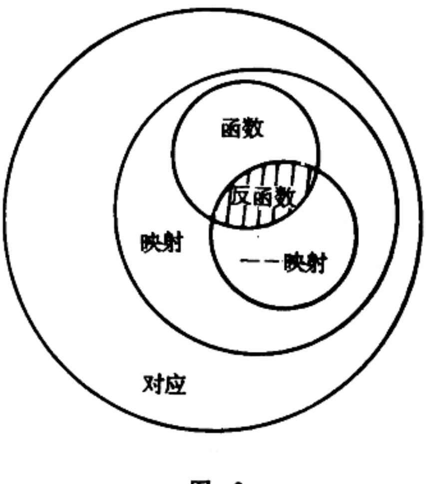

图 3

(2) 对于双射 f: $A\to B$，如果 A，B 都是数集，则 f^{-1}: $B\to A$ 就是函数 f 的反函数. 可以按照求反函数的方法去求可逆映射的逆映射.

(3) 对应、映射、双射及函数的包含关系如图 3 所示.

四、作业讲评

p6 习题 4 任意有限集只有有限个子集. 例如 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 A 除了由它的部分元素素组成的子集个数 $=C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$ 外，还有一个空集 φ，即 A 共有 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个子集. 有部分同学在作 p6 习题 4，时易漏掉 φ. 多数同学在作 p14 习题 4，习题 8 时只管回答"是"与"不是"，应作出简要说明.

p14 习题 6

分析一 $y\in[a, b]$，则 $0\leqslant y-a\leqslant b-a$，$\therefore 0\leqslant\dfrac{y-a}{b-a}\leqslant 1$，令 $x=\dfrac{y-a}{b-a}$，则 $y=a+(b-a)x$，$x\in[0, 1]$，$y\in[a, b]$.

分析二 考虑 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 的线性函数 $f(x)=kx+l$，使

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=l=a \\ f(1)=k+l=b \end{array}\right\}\Rightarrow l=a,\ k=b-a$$

$$\therefore \quad f(x)=a+(b-a)x$$

§1.3　数学归纳法

§1.4　整数的一些整除性质

§1.5　数环和数域

习题分类：选作题：§1.4(3)——指第一章第四节第三题，下同．删去题§1.4(5)，§1.5(5)．

一、概念题

例 1　判断题

(1) 如果一个命题满足第二数学归纳法条件，则一定满足第一数学归纳法的条件．

(2) 如果整数 $d=sa+tb$，$(a, b, s, t\in Z)$ 则 d 一定是 a，b 的最大公因数．

(3) 按定义有 0 整除 0．

(4) $-703=57\times(-12)+(-19)$，所以 57 除 -703，得商 -12，余数 -19．

(5) $(a, b, c)=1\Leftrightarrow(a, b)=(b, c)=(a, c)=1$．

评注　(1) 如果将第一数学归纳法的归纳假设改为：假设 $p(k-1)$ 成立，能推出 $p(k)$ 成立，则可写出第一、第二数学归纳法的区别在于后者的归纳假定加强了．

(2) 如果 d 是 a，b 的最大公因数，则存在 s，$t\in Z$，使 $d=sa+tb$，反之一般不成立．例如 $3=3\times5+2\times(-6)$，但 3 不是 3 和 2 的最大公因数．如果加强条件，则有，d 是 a，b 的最大公因数$\Leftrightarrow d|a$，$d|b$ 且 $d=sa+tb$，s，$t\in Z$．

例P2　填空题

(1) 下列数集(　　)是数环.

a. $s=\{$所有无理数$\}$;

b. $s=\{4+2a|a\in Z\}$;

c. $2Z\bigcup 3Z$.

(2) 下列数集(　　)是数域.

a. $F=\{0,\ 1]$;

b. $F=\{a+b\sqrt{k}|a,\ b\in Q\}$, $k\in Z$;

c. 任一包含Q的数集;

d. $F=\{\frac{3s}{r}|r,\ s\in Z,\ r\neq 0\}$,

二、基础题

例 3　下列两题在应用数学归纳法过程中有没有错?错在哪里?

(1) 证明:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{n+(n+1)}{2(n+1)(2n+3)}$$

证明　当$n=1$时,命题显然成立.

假设$n=k$时命题成立,即

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{n+(n+1)}{2(n+1)(2n+3)}$$

当$n=k+1$时

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

$$+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1][2(k+1)+3)]}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)}$$

故当$n=k+1$时，命题成立.

由数学归纳法原理知命题成立.

(2) **证明** $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

证明 当$n=1$时，命题显然成立.

假设 $n=k$ 时命题成立，即

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|$$

故

$$\begin{aligned}&|a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}|\\=&|(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_{k+1}|\\\leqslant&|a_1+a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{k+1}|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|\\&+\cdots+|a_{k+1}|\end{aligned}$$

从而命题对$k+1$成立.

由数学归纳法原理，命题成立.

例 4 有两摞张数相等的扑克牌，两人玩一种游戏，第一人可从任何一摞中取走任意张牌，第二人在另一摞中取走相等张数的牌. 然后两人依上方法交替地取，谁最后取完（两摞牌都取尽）谁胜利.

试问：先取者胜还是后取者胜？并用第二数学归纳法证明.

分析 先就每摞一张牌及每摞两张牌的情况进行分析，可知后取者胜. 问题是如何把这个游戏转化成一个与自然数有关的命题.

证明：设每摞有n张牌，$n=1$时，显然后取者胜.

设 $n<k$ 时，以上结论成立，即每摞牌数少于 k 张时后取者胜.

当 $n=k$ 时，设第一人从任一摞中取出 r 张 $r\leqslant k$. 如 $r=k$，显然第二人把剩下的一摞全部取完便获胜.

以下设 $r<k$，第二人从另一摞中取出 r 张，于是每摞都剩下 $(k-r)$ 张.

而 $0<k-r<k$，根据归纳假设，后取者（第二人）胜.

因此，按照给定的方法，无论两摞有多少张牌，一定是后者取胜.

评注 (1) 无论是第一、第二数学归纳法，都有不可缺少的两个步骤：奠基步骤和归纳假设. 缺少第一步，归纳假设没有基础；只有第一步，命题的正确性无法递推下去. 数学归纳法的实质是在第一步的基础上，以一次逻辑推理代替无限次的验证过程.

(2) 第一步的初始值 $n=c$ 应该取使命题法论有意义的最小整数.

(3) 数学归纳法第二步可以看成是一个独立的证明问题. 合理运用归纳假设的条件是归纳步骤中的关键，对此通常有直接和间接两种基本方程. 如果第二步中证明中没有利用归纳假设条件不算是数学归纳法.

(4) 并非每个与自然数有关的命题都可以用数学归纳法来证明.

例 5 设整数 a，b 满足：$b=aq+r$，证明 $(a, b)=(a, r)$.

分析：由于 $(a, b)=d\Leftrightarrow d|a$，$d|b$ 且存在 S，$t\in Z$ 使 $d=aS+bt$，因此设 $(a, b)=d$，要证明 $(a, r)=d$. 只须证明 (i) $d|a$ $d|r$；(ii) d 能够表示成 a，r 的线性组合.

证明：设 $(a, b)=d$，则 $d|a$，$d|b$，由于 $b=aq$

$+r$，$\therefore d|a$，$d|r$。再根据定理 1.4.3 存在 S，$t\in Z$，使 $d=Sa+tb$，将 $b=aq+r$ 代入，得到 $d=Sa+tb=Sa+t(aq+r)=(S+qt)a+tr$。

显然 a，r 的任一个公因数都能整除 d，而 d 是 a，r 的公因数，且 $d\geqslant 0$。

$$\therefore \qquad (a,\ r)=d=(a,\ b).$$

评注 此题的结论提供了求两个整数最大公因数的方法．例如：求 $(a,\ b)$，不妨设 $b>a>0$，根据带余除法，则有

$$\begin{aligned}
&b=aq+r_1,\ 0\leqslant r_1\leqslant a\\
&a=r_1q_1+r_2,\ 0\leqslant r_2<r_1\\
&r_1=r_2q_2+r_3,\ 0\leqslant r_3<r_2\\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\
&r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n,\ 0\leqslant r_n\leqslant r_{n-1}\\
&r_{n-1}=r_nq_n+r_{n+1},\ r_{n+1}=0
\end{aligned}$$

即 $(a,\ b)=(a,\ r_1)=(r_1,\ r_2)=\cdots=(r_{n-1},\ r_n)=r_n$，最后一个不为零的余数就是 a，b 的最大公因数．这种求最大公因数的方法叫做辗转相除法．

例 6 证明 $S\neq\{\frac{m}{2^n}|m,\ n\in Z\}$ 是一个数环，S 是不是数域？

证明 显然$S\neq\varphi$

$\frac{m_1}{2^{n_1}}$，$\frac{m_2}{2^{n_2}}\in S$，不妨设 $n_1\geqslant n_2$ 则

$$\frac{m_1}{2^{n_1}}\pm\frac{m_2}{2^{n_2}}=\frac{m_1\pm 2^{n_1-n_2}m}{2^{n_1}}\in S,\ \frac{m_1}{2^{n}_1}\cdot\frac{m_2}{2^{n_2}}=\frac{m_1m_2}{2^{n_1+n_2}}\in S,$$

所以S是数环．