# 初等代数研究

主　编　林六十

副主编　陈志云　程金华　李自祥

中国地质大学出版社

# 初等代数研究



主　编　林六十

副主编　陈[illegible]云　程金[illegible]　李自祥

中国地质大学出版社

## 内 容 提 要

本书按高等学校《初等代数研究》教学要求，并根据参加编写者多年来教学使用的原讲义综合编写而成。

全书共分七章。分别为：数的理论，解析式的理论，初等函数的理论，方程和方程组的理论，不等式的理论，排列组合，数列。这样既满足了本科的需要，又可在此基础上适当删减，供专科使用。

本书可供高等学校理科、高师院校数学系、师专数学科、教育学院等师生作为教学用书，同时也可作为中学数学教师的自修用书。

**初等代数研究**

林六十　主编

责任编辑：唐桂荣　晨明

中国地质大学出版社出版发行

（武汉喻家山）

武汉重型机床厂印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张：13.4　字数320千字

1991年2月第1版　　1991年2月第1次印刷

印数1—4000册

书号：ISBN　7—5625—0505—5/O·26　　定价：4.50元

# 前　　言

本书为适应高等学校的教学需要，编者根据多年教学经验编写而成。

全书突出了基本概念，基本思想和方法；尝试运用高等数学的知识来处理和分析初等代数中的疑难问题，既反应了当前用高观点研究初等数学的方向，又注意了数学竞赛中的热点。

参加编写者及其分工如下：

主　编：林六十

副主编：陈志云　程金华　李自祥

编　委：（按姓氏笔划为序）

任金元（咸宁师专）

张万全（湖北民族学院）

陈志云（华中师范大学）

李自祥（中国地质大学　武汉）

欧阳海（宜昌市教育学院）

庞正琳（咸宁师专）

赵明富（江汉大学）

肖明信（襄樊教育学院）

张启厚（湖北大学）

余祖逖（湖北大学）

吴永发（雷州师专）

郑新东（黄冈师专）

林六十（湖北大学）

赵卫东（青海教育学院）

是伯元（郧阳师专）　　　　　　袁明豪（黄冈师专）

程金华（湖北师范学院）　　　　程家柏（咸宁师专）

武汉大学熊全淹教授、叶明训副教授对本书的编写给予了热情指导，并作了详细的审校。在此，特向他们谨致以崇高的敬意和衷心的感谢。

本书得以及时出版，还得感谢各参加编写单位、印刷厂和出版社的各级领导、编辑和职工同志们的大力支持；此外，湖北大学严启平同志积极参加本书习题解答的编写工作，使《初等代数研究习题解答》一书能同时配套印发，谨在此一并致谢。

由于我们的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1991年2月

# 目　录

# 第一章　数的理论

在人类的生产实践和社会实践中，由于计量和数数的需要，逐步创造扩充，最后完善了数的理论。所谓数的理论，指的是数的引入以及在数集内的运算和它的性质。尽管我们在中学阶段已经学习了自然数、零、分数、负数、无理数以及虚数。但是，“数”作为理论，作为数学各个分支的基础，则论及的很少，而作为未来的中学数师，切实地理解和掌握数的科学理论，则是非常必要的。同时，掌握数的理论，对于学习其它的数学理论也有重要的实际意义。

## 第一节　自然数集和零

自然数集以及添进数 0 以后的扩大自然数集是我们在小学阶段学习算术时就熟悉了解的。在小学中曾指出为了数数和报数的需要，人类创造了自然数。自然数可以回答量的多少。这就建立了自然数的基数理论。同时它又可以回答先后次序的问题，这就是说由于次序的需要，创立了自然数的序数理论。这里我们重点介绍基数理论。

### 一、自然数的引入

#### 1．作为基数的自然数

**定义 1**　设$A$、$B$是两个已知的集合。如果有一个确定的法则$\varphi$使得$\forall x\in A$就有一个唯一的$y\in B$与它对应，则称法则$\varphi$确定了一个从$A$到$B$内的映射，记作

$$\varphi: A \to B \text{或} A \xrightarrow{\varphi} B$$

如果$x \in A$，通过映射$\varphi$，有$y \in B$与它对应，则$y$为$x$在$\varphi$下的像记作$y = \varphi(x)$，而$x$称为$y$的像源。

**定义** 2　设$\varphi$是$A$到$B$内的映射，如果对于$\forall b \in B$存在唯一的$a \in A$，成立$\varphi(a) = b$，则称$\varphi$为从$A$到$B$上的一个一一对应或一一映射。

显然，如果$\varphi$是$A$到$B$上的一一映射，则对$\forall b \in B$必有唯一的$a \in A$（即$b$的像源$a$：$\varphi(a) = b$）与它对应，这个由$b$到$a$的对应，构成了一个从$B$到$A$上的映射，称为$\varphi$的逆映射记为$\varphi^{-1}$：$\varphi^{-1}(b) = a$。

可见，仅当$\varphi$是一一映射时，它存在逆映射，且$(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$。

**定义** 3　在集合$A$到$B$之间，如果存在一个一一映射，则称$A$与$B$有相等的势，也称$A$与$B$是等价的，或对等的，记作$A \sim B$，集合$A$的势记为$\bar{\bar{A}}$，因此

$$A \sim B \Leftrightarrow \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}。$$

显然，关系"～"满足：

①对任意集合$A$，有$A \sim A$；（反射性）

②$A \sim B$则$B \sim A$；（对称性）

③若$A \sim B$，$B \sim C$则$A \sim C$。（传递性）

今后称满足（1）、（2）、（3）的关系为等价关系。

有了"势"或"等价"的概念，我们就可以将集合进行分类：

例1，设$A_1 = \{$太阳$\}$，$A_2 = \{$月球$\}$，$A_3 = \{$地

球｝．$A_4$＝｛字母$X$｝，$A_5$＝｛文字“零”｝……

不难理解，这些集合的任两个都是等势的或等价的。

称$A_1$，$A_2$，…，$A_n$是一个等价类或等势类。

例 3，设$B_1$＝｛人的“左耳”，“右耳”｝，$B_2$＝｛人的“左眼”，“右眼”｝，$B_3$＝｛地球，月球｝，$B_4$＝｛字母$x$，$y$｝……

则这些集合中的任两个都是等价的或等势的。称$B_1$，$B_2$，……，$B_n$是一个等价类。

**定义 4**　表示一个等价类的集合的象征叫做一个基数。

这样我们用记号“1”来表示例 1 中的等价类集合的象征；用记号“2”（甚至读作“耳”的谐音）来表示例 2 中的等价类集合的象征；……一切和人的双手的手指为元素的集合等价的集合，构成这个等价类的象征用记号“10”来表示等等。

可见，由于等价类中任何两个集合都是等价的。因此作为一个等价类的集合的象征的基数，也可以认为是这个等价类中任一集合的象征。

**定义 5**　一个集合$A$称为无限的，如果存在一个子集$A'$（$A' \subset A$）使得$\bar{A'} = \bar{A}$（或$A' \sim A$）。否则称$A$为有限集。

称每个有限集的基数为自然数。

今后，我们用$a$，$b$，$c$，…，表示集$A$，$B$，$C$，…，的基数，若$A$，$B$，$C$，…，是有限集，则$a$，$b$，$c$，…，就是自然数。

这样，我们就作为集合的基数引入了自然数，用它可以表征一个集合的“势”，也就是回答了“有多少？”的问题这就是说自然数有了基数的意义。

## 2. 作为序数的自然数

作为序数的自然数，首先是由皮亚诺（Peano）提出的它是有一个关系（“后继”）和四个公理组成的公理结构：

**定义6** 任一个非空集合$N$的元素叫做自然数，如果在$N$内的元素间存在一个关系，称为“直接后继”（后继用撇“$'$”号来表示）且满足下列四个公理：

①$\exists 1\in N$，对任何$a\in N$，$a'\neq 1$（即1不是$N$中的任何数的后继数，换句话说，1是$N$中的开头数）；

②对于$\forall a\in N$，仅$\exists\, a'\in N$，（即$N$中的任何数，有且仅有一个后继数）；

③$1\neq a\in N$，则$\exists\, b\in N$，使得$b'=a$；

④（完全归纳公理）。

设$M\subseteq N$，且$1\in M$，若$a\in M$时，有$a'\in M$，则$M=N$。

这就是自然数的公理化结构。

事实上，由公理①，$N$中有自然数1；由公理②和③，$N$中有且仅有一个$1'\overset{\Delta}{=}2$（今后，我们用等号上面打一个Δ号“$\overset{\Delta}{=}$”表示“记为”），同理$2'=3$，等等，这样就得到了1，2，3，4，……

至于公理④是我们熟悉的完全归纳法原理，通常表述为对于有一个与自然数$n$有关的命题$P(n)$，如果$P(1)$成立，在假定$P(k)$成立时，可以推出$P(k+1)=P(k')$也成立，则命题$P(n)$对于一切$n$都成立。

可见，这样引进的自然数列是由这四个公理所规定的一串符号(即数)的无限集合，这一串符号中某个符号（即某个数）所刻划的是从1开始到该符号（数）的一段。因此，序数回答的是“那一个”或“第几个”这就是我们说的序数

也就是说赋于自然数以序数的意义了。

下面我们将自然数理解为基数，来研究自然数的性质和运算，从而完善基数的理论。

## 二、自然数的性质

### 1．自然数集是有序集

**定义 7** 设有限集合$A$和$B$的基数分别为$a$和c，则当：

①$A\sim B$时，称$a$等于$b$，记为$a=b$；

②$A\sim B'\subset B$时，称$a$小于$b$，记为$a<b$；

③$A'\supset A\sim A$时称$a$大于$b$，记为$a>b$。

因此，有

**定理 1** 两个自然数$a$和$b$，下列关系有一个且仅有一个成立：

①$a=b$； ②$a<b$； ③$a>b$。

证：设$a$和$b$分别是有限集合$A$和$B$的基数，则关系①$A\sim B$；②$A\sim B'\subset B$；③$A\supset A'\sim B$。有一个且只有一个成立。

∴定理结论成立。

这就是说自然数集是全序的。

我们还可以证明相等与不等所满足的一些关系：

（1）关于“相等”的有：

$a=a$；（反射性）

若$a=b$，则$b=a$；（对称性）

若$a=b$，$b=$c则$a=$c。（传递性）

（2）关于“大于”（大于）的有：

若$a>b$，则$b<a$；（对逆性）

若$a>b$，$b>c$则$a>c$。（传递性）

可见，自然数集是全序的，且关系“$>$”（大于）满足传递性，所以自然数集是有序集。因此，可将自然数由小到大依次排列起来：

1，2，3，4，…，$n$，…

称这样的一串数为自然数列，于是自然数集$N$：

$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

2．**自然数集是良序的**

**定义** 8　如果有序集的任何非空子集，都含有最小元素则称有序集是良序的。

良序原则：自然数集是良序的，这就是说，若$\forall A\subset N$，且$A\neq\varphi$，则$\exists\ a\in A$，使得对$\forall n\in A$均有$a\leqslant n$。

良序原则是我们熟悉的第二归纳原理的理论根据，事实上，我们有：

**定理** 2　设$P(n)$是一个与自然数有关的命题。如果$P(1)$成立，且在假定一切满足$1<r<k$的自然数$r$，$P(r)$成立时，可推得$P(k)$成立，则$P(n)$对一切自然数$n$均成立。

**证明**　用反证法。设$P(n)$不是对一切自然数成立。不妨设使$P(n)$不成立的自然数集为$M$，则$M\neq\varphi$。

由良序原则$M$有最小数，设为$k$即$k\in M$，$P(k)$不成立。

显然由$k$的选择知，对一切$r<k$的自然数$r$，$P(r)$成立。

由定理的归纳假定，由$P(r)$成立，可推得$P(k)$成立，这是矛盾的。

$\therefore M=\phi$即$P(n)$对于一切自然数成立。

**3．自然数集具有阿基米德（Archimedes）性质**

若$\forall a$，$b\in N$，且$a<b$，则必有一个自然数$n$，使得$na>b$，称这个性质为阿氏性质，我们将在讲完运算的定义之后再加以证明。

可见，自然数集$N$是良序的，是阿氏有序集。

## 三、自然数的运算

### 1．加法和乘法

**定义8** 设有限集$A$、$B$的基数为$a$和$b$。若$A\cap B=\phi$，则称$C=A\cup B$的基数$c$为$a$与$b$的和记作$c=a+b$，称$a$为被加数，$b$为加数，求两数和的运算称为加法。

**定义10** 设有限集合$Ai$（$i=1$，$2$，$3$，$\cdots$，$b$）的基数为$a$。若$Ai\cap Aj=\phi$（$1\leqslant i$，$j\leqslant b$，$i\neq j$）则称

$C=\sum\limits_{i=1}^{b} Ai \ \overset{\Delta}{=} \ \bigcup\limits_{i=1}^{b} A_i$的基数，$c$为$a$与$b$的积，记作$c=a\cdot b$称$a$为被乘数，$b$为乘数，求两数积的运算称为乘法。$a$和$b$也称为c的因子。

一般地：我们定义：

$$\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}=a^n$$

$a^n$称为$a$的$n$次幂或$a$的$n$次乘方，$a$称为幂的底，$n$称为指数，求$a^n$的运算称为乘方。特别地，当$n=1$时，

规定$a^1=a$。

不难验证，在自然数集内定义的加法和乘法是满足基本运算律的。

**例3** 试证①$a+b=b+a$

②$a\cdot b=b\cdot a$

**证明** ①设$a$、$b$是有限集$A$、$B$的基数，且$A\cap B=\phi$

则$A\cup B=B\cup A$

$\therefore a+b=b+a$

②设等价类的有限集$Ai$（$i=1$，2，…，$b$）的基数为$a$，

$A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1a}\}$

$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2a}\}$

……

$A_b=\{a_{b1},\ a_{b2},\ \cdots,\ a_{ba}\}$

且$A_i\cap A_j=\phi$

$$则C=\sum_{i=1}^{b}Ai\triangleq\bigcup_{i=1}^{b}Ai的基数，C=a\cdot b。$$

由$Ai$（$i=1$，2，…，$b$）构造集合：

$B_1=\{a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{b1}\}$

$B_2=\{a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{b2}\}$

……

$B_a=\{a_{1a}a_{2a}\cdots,\ a_{ba}\}$

则$B_i$（$i=1$，2，…，$a$）是一个等价类集，基数为$b$，

且$B_i\cap B_j=\phi$（$1\leqslant i$，$j\leqslant a$，$i\neq j$）

$$则C'=\sum_{i=1}^{a}Bi=\bigcup_{i=1}^{a}Bi的基数，C'=b\cdot a$$

而显然有$C\sim C'$，则$C=C'$

$\therefore a\cdot b=b\cdot a$

其它的运算律的验证留给读者。

可见自然数集$N$对于加法和乘法是永远可以实施的，这就是说$N$对于加法和乘法是封闭的。又由于加法和乘法满足基本运算律，所以$N$是一个代数系。

2．**作为序数的自然数的运算与性质。**

**定义11** $a$与$b$的和$a+b$，指的是满足下列公理的数

①$\forall a\in N$，$a+1=a'$

②$\forall a,b\in N$，$a+b'=(a+b)'$

**定义12**，$a$与$b$的积$a\cdot b$，指的是满足下列公理的数

①$\forall a\in M$，$a\cdot 1=a$

②$\forall a,b\in N$，$ab'=ab+a$。

于是有：

**定理3** 设$a$，$b$，$c\in N$，则

①两数和$a+b$以及两数的积$a\cdot b$是唯一的。

②对加法和乘法满足：

结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$；$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$。

交换律：$a+b=b+a$，　　$a\cdot b=b\cdot a$

分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

**证明**：①先证和是唯一的。

设$M=\{b\mid a+b$是唯一的，$a、b\in N\}$，

$\because a+1=a'$，而$a'$唯一。

$\therefore 1\in M$。

设$b\in M$，则$a+b$唯一。

而$a+b'=(a+b)'$　　$\because a+b$唯一，

则$(a+b)'$唯一。

$\therefore b'\in M$，因此$M=N$

②再证$a+b=b+a$

设$b=1$，先对$a$归纳

设$M_1=\{a\mid a+1=1+a,\ a\in N\}$

$\because 1+1=1+1$，$\therefore 1\in M_1$

设$a\in M_1$，则$a+1=1+a$

而$a'+1=(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1)=1+a'$

则$a'\in M_1$ $\quad\therefore M_1=N$

再对$b$归纳，设$M_2=\{b\mid a+b=b+a,\ a,b\in N\}$

读者不难完成这个证明：$M_2=N$

其余的结论，留给读者。

**定义13** 设$a$、$b\in N$,若$\exists\ k\in N$，使得$a=b+k$，则称$a$大于$b$，记作$a>b$；或称$b$小于$a$，记作$b<a$。

显然根据这个定义，作为序数的自然数有与作为基数的自然数所论及的性质。

**3．减法和除法**

我们规定减法和除法分别为加法和乘法的逆运算。

**定义14** 设$a$、$b\in N$，若方程$b+x=a$在$N$内有解，则称这个解为$a$与$b$的差，记作$a-b$，因此$x=a-b$。

$$\therefore b+(a-b)=a$$

求差$x$的运算称为减法。称$a$为被减数，$b$为减数，

显然减法在$N$内不是永远可以实施的，即方程$b+x=a$，在$N$内不是恒有解。事实上只有当$a>b$时，解$x=a-b$才存在，这时解（即差）是唯一的。

**定义15** 设$a$、$b\in N$，若方程$bx=a$在$N$内有解，则称这个解为$a$与$b$之商，记作$\frac{a}{b}$（或$a\div b$）因此，

$$x=\frac{a}{b}$$

$$\therefore b\cdot\frac{a}{b}=a$$

求商$x$的运算称为除法。称$a$为被除数，$b$为除数，