【苏】莫哈切娃
鲁比史金 著
张立发 编译

数学规划

青岛出版社

数学规划

[俄] 莫哈切娃
鲁比史金 著

张立发 编译

青岛出版社

内 容 简 介

通俗地叙述了数学规划基础。对线性规划的理论，数值方法，应用及网络规划和其它网络极值问题予以特别注意。这些问题在第一至第四章和第十一章的一部分予以叙述。至于矩阵对策论，凸性，动态和整数规划各占去一章。在这些章中所叙述的理论和数值方法，是在工程和经济实践中建模的基础。

初读可暂放下第三章第4节，第四章，第六章，第八章和第十一章，对理解本书不受损失。

读者对象：科研工作者，工程师和经济学家，以及工科和经济系的研究生。也可作为理工科大专院校相近专业的师生参考书。

数 学 规 划

〔俄〕 莫哈切娃 鲁比史金 著

张立发 编译

青岛出版社出版　青岛出版社发行
（青岛市徐州路77号）　泰安师专印刷厂印刷
1988年10月第一版　1988年10月第一次印刷
开本$787\times1092\ ^{1}/_{32}$　9.75印张　221千字
印数：0001—5000册
ISBN 7—5436—0157—5/O.1
定价 3.50 元

前　　言

数学规划是一门边缘科学，其主要内容是利用近代数学成果，研究某一组织；某一系统的运用效果和组织间，系统间的消长关系。凡有关安排、调度、组织、筹划、控制等类问题都是数学规划的研究对象。数学规划是系统工程学的最重要的理论基础之一，也是其最重要的数学方法。它还是经济计量学，经济管理学不可缺少的数学工具。现代社会大生产需要科学生产、科学管理，为此，必须对生产系统、管理系统进行定量分析，建立数学模型。

为适应我国现代化建设的需要，笔者以苏联莫哈切娃和鲁比史金合著的《数学规划》为篮本，结合我国国情编译成书。原著是写给苏联经济学家和大学经济系研究生的数学工具书。在苏联高等和中等专业教育部举行的数学科学方法讨论会上，被推荐为高等院校教科书。这本书较全面系统地叙述了数学规划各个分支的基本理论和方法。每个章节都附有数值例子，这对读者理解和掌握基本理论、方法，特别是数值方法并应用于实际十分有益。

这本专著在编译和出版过程中，得到了王大同、张秉尧史若平、宫玉新、翁文庆、徐海伦同志的支持和帮助，在此表示谢意。

编译者

1983年1月

目　录

使用的概念和符号

书中使用下面最简单的集论的符号：

$a\in M$表示，a是集合M的元素（读作a属于M）；

$a\overline{\in} M$表示，a不是集合M的元素（读作a不属于M）；

$M=\phi$表示，集合M没有任何元素（这样的集合称为空集）；

$M\subset N$表示，集合M是集合N的子集，即从$a\in M$得出$a\in N$（读作M含在N中）；

$M=M_1\cup M_2$表示，$a\in M$，当且仅当$a\in M_1$或$a\in M_2$（此时，称M为集M_1和M_2的并）；

$M=M_1\cap M_2$表示，$a\in M$，当且仅当$a\in M_1$且$a\in M_2$（此时，称M为集M_1和M_2的交）；

$M=M_1\diagdown M_2$表示，$a\in M$，当且仅当$a\in M_1$，但$a\overline{\in} M_2$（此时，称M为集M_1和M_2的差）；

$M=M_1\times M_2$表示，集合M的元素是元素$a\in M_1$和$b\in M_2$的序对（a，b）（此时，称M为集M_1和M_2的笛卡尔乘积）。

类似地定义任何个集合的并和交。例如，$M=\bigcup\limits_{i=1}^{m}M_i$表示，$a\in M$，当且仅当$a\in M_i$，$i$是从1到m的某一个自然数。

对有限集，常以列举其所有元素的方法给出。例如，$M=\{a_1, a_2\cdots, a_m\}$表示，$M$是m个含有一个元素的集合$M_i=\{a_i\}$的并。也表示为$M=\{a_i\}_{i=\overline{1,m}}$，这里把$i=\overline{1,m}$

理解为，i 取从 1 到m的所有自然数。

对已知集N的子集，可用指出它的元素的特殊性质的方法给出。例如，如R是一切实数的集合，则它的子集 $M=\{a\in R | f(a)=0\}$由所指出的方程的实根组成。

实数集R的子集M，称为上有界的，如它的所有元素不大于某个数$c\in R$. 此时，数c称为M的上界。对每一个有上界的非空集合$M\subset R$，在它的上界中有最小的一个，称为集合M的上确界并用$\sup M$表示。如$M\subset R$不是上有界的，则记为$\sup M=+\infty$.

相类似，集$M\subset R$称为下有界的，如它的所有元素不小于某一个数 $c\in R$. 相应的数$c\in R$称为集M的下界，而它们当中最大的一个称为集M的下确界，用$\inf M$ 表示。如集$M\subset R$不是下有界的，则记$\inf M=-\infty$. 另外，用$\max M$表示集M的最大元素，不是每一个上有界的集合$M\subset R$都有最大元素。但如这样的元素存在，则$\max M=\sup M$. 类相似，如在$M\subset R$中，有最小元素，用$\min M$表示，则这个集合M是有下界的，且此时$\min M=\inf M$.

书中用R^n表示n维算术空间，R^n具有在实数上进行的元素的加、乘普通运算。元素$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$n$维向量，而实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为这个向量的分量。在第九章§1和第十一章叙述几何问题时，把R^n的元素称为具有坐标$x_1, x_2, \cdots, x_n$的点。

假定读者熟悉线性代数的内容，特别是线性组合，线性相关和线性无关的概念。熟悉基底的概念以及两个向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的数量积

$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$的概念和基本性质。

还认为读者知道，对任何矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行的线性无关最大数（即对应的n维向量的）和列的线性无关最大数（即对应的m维向量的）相一致。所指出的这个数，称为矩阵A的秩。其次，如m阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

的秩$r=m$，则称A是非奇异的。最后，若对给定的方程组$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$，$i = \overline{1, m}$，方阵$A$是非奇异的，则这个方程组，对任何自由项$b_i$，有唯一的一个解。

第一章 生产规划的基本线性模型

§1 合理裁剪问题的最简单的例子

表 1

半成品号码	长度	数量
1	1655	1
2	1050	5
3	210	1

设在5000毫米长专门轧制的长条原材料中，批量生产某种产品，须裁剪三种类型的半成品。对一个产品所需要的每种类型的半成品的长度和数量列在表 1 中。

实际生产时，一般以下述方法裁剪。先把一条条状物剪成最长的半成品，且废料是35毫米。再用新的条状物得到 2 号半成品。此时，从一条条状物得到 4 条 2 号半成品和800毫米长的剩余。再从此剩余中剪出最短的半成品。但每一个产品只需一条这种半成品，剩余的部分不能再利用。这样得到图 1 表示的规划，为按所需比例得到半成品，对每12件产品按图 1 的第一裁剪图剪开 4 条条状物，按第二裁剪图需剪开 4 条条状物，按第三裁剪图也需剪开11条条状物。对每12件产品共剪开19条条状物。

初看上述规划十分可行，但这不是最经济的。为验证这点，考察用图2表示的裁剪规划。按图2第一裁剪图剪开12条条状物，按第二裁剪图剪开 4 条条状物，按第三个裁剪图

剪开2条条状物，这样得到12套半成品、只耗费18条条状物。

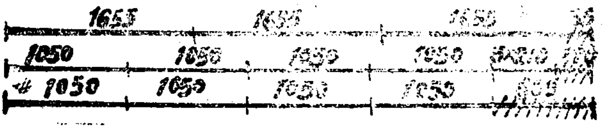


图1

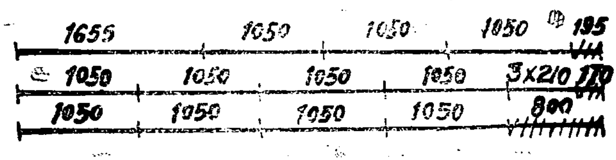


图2

该例表明，甚至在最简单的情况下，用观察法制定裁剪规划，是很难得到最佳方案的。因此，有必要研究专门的方法，检验所提出的规划解或在没有最优解时能找到较好的方案。这种方法，对解决计划生产和经济问题已初次在线性规划中得到，为了阐明该方法的性质，今对合理裁剪问题，做出源于一般理论的最优规划检验法。

按所需比例得到半成品的裁剪规划，仅当在下述情况下是最优的，如裁剪出的半成品和非负赋值y_1，y_2，y_3（不全为零）相对应，且y_1，y_2，y_3满足以下条件：1）用所使用的每个裁剪图剪出的半成品的总赋值都相等；2）用任何裁剪图剪开一条条状物，得到的半成品总赋值，不大于所使用的裁剪图剪开一条条状物所得到的半成品总赋值。

用该结果易验证用图2表示的裁剪规划最优。事实上，

由1）赋值应满足关系式

$$y_1+3y_2=4y_2+3y_3=4y_2.$$

从这个有三个未知数的两个线性齐次方程组，求得$y_1=C$，$y_2=C$，$y_3=0$，这里C是任意常数。因只考虑精确到正因子的赋值，则可取$C=1$，$y_1=y_2=1$，$y_3=0$.所求得的赋值也满足2）．在所有使用的裁剪图中（见图2），剪出的半成品总赋值都等于4．其次，为得到一个赋值单位须耗费不少于1050毫米长的条状物。所以，从一条条状物得到的半成品的总赋值不可能超过5000:1057=4.7…，但这个总赋值须是个整数，因而，它不大于4，所以，图2的裁剪规划最优。

看图1给出的裁剪规划。由1），从方程组

$$3y_1=4y_2+3y_3=4y_2$$

求得 $y_1=\frac{C}{3}$，$y_2=\frac{C}{4}$，$y_3=0$．在$C=12$时又给出了赋值整数组$y_1=4$，$y_2=3$，$y_3=0$.这时在所有使用的裁剪图中，半成品总赋值等于12．但对所求得的该赋值，2）不成立。事实上，在最后的裁剪图中（图1），可用1号的一个半成品代替2号的一个半成品，这时半成品总赋值大于所使用的裁剪图剪出的半成品总赋值。即图1的裁剪规划不最优。

将所具有的裁剪规划进行的检验，不需要把它们和另外的规划直接比较　而用直接分析这些规划本身的方法，断定其中一个是最优的，其余的不最优。需说明，不应把在检验过程中所计算的半成品赋值，看作纯辅助数学工具。可用它求得半成品按个计算材料消耗的定额，这些定额在实施拟定

的最优规划时起重要作用。

在该例子中，最优规划对应的半成品赋值的答案是，$y_1=y_2=1$，$y_3=0$．因而一套半成品总赋值是$1\times1+5\times1+1\times0=6$．此时，对每套半成品需耗费18:12＝1.5条，共长7500毫米条状物。对每一个赋值单位耗费7500：6＝1250毫米。用半成品的赋值乘这个值，得到列在表2中半成品按个算材料消耗的定额的第一个方案。该表中定额的第二个方案，是用在半成品之间按比例分配残料的方法做成的，不论哪一方案，对一套半成品都耗费7500毫米。

表2

半成品长度	按个的定额	
	第一方案	第二方案
1655	1250	1744
1050	1250	1107
210	0	221

设需补充生产100个1号半成品，根据按个定额的第二方案需1744×100＝174400毫米，即多于34条条状物。而按第一方案只需25条条状物。实际上为得到所需半成品25条条状物足够。用第一裁剪图（图2），可得25个1号半成品和75个2号半成品。再从原来计划按第三裁剪图剪的75条条状物中，还会得到75个1号半成品和225个2号半成品。结果得到所需要的100个1号半成品，而2号半成品数不变。

如需补充生产100个2号半成品，则当用按个的定额的第二方案时，需耗费22条条状物。但为得到100个2号半成品，这些条状物是不够的。为此需耗费25条条状物，这又符合按个定额的第一方案。用自然方式组成的按个定额的第

二方案不能进行正规的简便计算，对应于最优规划的赋值的按个定额提供了正确的计算方向。

再描述一个初等几何方法，该方法能有效地解决两种半成品时的合理裁剪问题。在上面的例子中，3号半成品是不受限制的。从用其它裁剪图裁剪所形成的残料中，总可按所需数量得到它。即材料的总消耗由得到1号和2号半成品的方式被完全确定。问题归结为两种半成品情况。对所需长度的半成品，条状物裁剪的基本方法列在表3中。

裁剪法	半成品数量	
	1号	2号
1	3	0
2	2	1
3	1	3
4	0	4

表3

用选择具有非负分量的向量

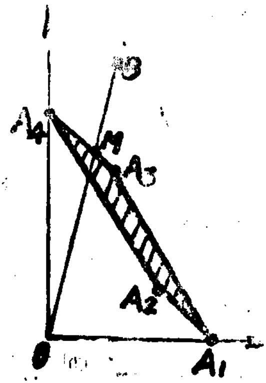
$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{1.1}$$

确定裁剪规划，其中分量表示按每个裁剪法所剪开的条状物的数目。这时从$p=x_1+x_2+x_3+x_4$个条状物剪出$t_1=3x_1+2x_2+x_3$个1号半成品和$t_2=x_2+3x_3+4x_4$个2号半成品。这些半成品按所需比例$5t_1=t_2$得到，且这时每耗费一条条状物得到

$$k=5t_1/p=t_2/p \tag{1.2}$$

套半成品的完全组合。我们对使值（1.2）达到最大的裁剪规划（1.1）的选择感兴趣。因用正因子乘向量x时，（1.2）的值不变，所以分析问题时可只限于研究$p=x_1+x_2+x_3+x_4=1$的向量（1.1）．把具有坐标$t_1=3x_1+2x_2+x_3$，$t_2=x_2+3x_3+4x_4$的点$A(t_1,\ t_2)$和平面t_1Ot_2上的向

量相对应。这时表 3 的裁剪法对应于点$A_1(3,\ 0)$，$A_2(2,1)$，$A_3(1,\ 3)$，$A_4(0,\ 4)$．符合所有另外裁剪规划的点充满四边形$A_1A_2A_4A_3$（图 3 ）．按半成品所需比例$t_2=5t_1$的裁剪规划，与其对应的点在过点$B(1,5)$的射线OB上。



由以上推知，射线OB和四边形$A_1A_2A_4A_3$相交的边际上的点，对应于最优规划。该点在线段A_3A_4上，并把它分为1:2．即点M对应于最优向量　$x^0(0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$．这表示在最优规划中，从每 3 条条状物中应有两条按裁剪法 3 裁剪，一条按裁剪法 4 裁剪（见表 3 ）。这时从三条条状物得到两套半成品。至于长210毫米的 3 号半成品，对其所需数量可从裁剪法 4 的残料中得到。不难看出，所得到的裁剪规划在本质上和上面所研究的利用表 2 的裁剪规划相一致。对应于最优规划的半成品赋值y_1和y_2，甚至可以借助于图3 得到。这些赋值的比和直线A_3A_4的斜率（不计符号）相等，在直线A_3A_4上有射线OB和四边形$A_1A_2A_3A_4$相交的边际上的点。

我们还指出，半成品数$m>2$的合理裁剪问题，在 n 维空间中有类似的几何解释。但是利用这个几何解释，用图解法确定条状物对半成品的最优裁剪规划是极困难的。所以射

线和凸多面体相应的边际的交点，可用代数的方法找到。

§2 再一个数值例子

今讨论把某种综合原料（如石油），加工成两种最终产品的最优生产规划问题的模型。设技术操作过程由两个阶段组成。第一阶段把加入的原料加工成三种中间产品，第二阶段用这三种中间产品制造出最终产品。从一吨原料生产出的中间产品由表 4 指出，生产一吨最终产品支出的这些中间产品列在表 5 中。Ⅰ型的一吨最终产品的批发价为50元，Ⅱ型的是60元。问题是求出使产品总价值达到最大的生产规划。即根据一吨最初原料所计划生产的Ⅰ型和Ⅱ型产品的产量 x_1，x_2，使值

$$\mu(x_1, x_2)=50x_1+60x_2 \tag{1.3}$$

达到最大。从一吨原料得到中间产品的产量和这些中间产品对生产最终产品的单位耗费，得到生产规划 $x=(x_1, x_2)$，

$$x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0 \tag{1.4}$$

中间产品	一吨原料出产(公斤)
1	460
2	200
3	340

表 4

中间产品	对一吨最终产	
	Ⅰ	Ⅱ
1	250	800
2	250	200
3	500	—

表 5