



工程实用技术丛书

随机信号分析的 工程应用

SUIJI XINHAO FENXI DE GONGCHENG YINGYONG

张强 编著

本书看点:

- ☆ 详述随机信号的测量与分析方法以及测量分析中的统计误差;
- ☆ 从随机信号中识别随机物理现象的产生机制或进行故障诊断;
- ☆ 强调理论分析与工程实际的结合, 侧重物理概念和分析方法;
- ☆ 照顾入门级读者, 注重学以致用; 兼顾高手, 探讨领域发展。

11.6



国防工业出版社

National Defense Industry Press

工程实用技术丛书

随机信号分析的工程应用

张强 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书从实际角度出发论述了随机信号分析的基础理论及其工程应用。主要包括:随机物理现象、随机信号的基本概念和数学描述方法,以及随机信号分析的基础理论和随机信号相关分析及谱分析的工程应用。本书结合工程实际,侧重物理概念与分析方法,深入浅出,引导读者学会对随机物理现象作合理的数学描述,学会从测量的随机信号中识别出随机物理现象的产生机制,并预测它在可能的环境下所产生的响应。另外,本书在教学上将理论分析与工程实际相结合,其实验技术涉及到信号振幅和概率密度函数测量,相关函数和谱密度函数测量,系统响应及其参数识别,系统响应的传播路径及其能量源识别,单输入/单输出、单输入/多输出和多输入/单输出问题分析,以及测量中的统计误差分析等。

本书可供噪声与振动工程、结构工程、材料科学、机电一体化、测试技术及仪器、智能监测与控制、流体力学等专业的本科生或研究生使用,也可供从事这方面工作的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析的工程应用/张强编著. —北京:国防工业出版社, 2009. 7
(工程实用技术丛书)
ISBN 978-7-118-06324-0

I. 随... II. 张... III. 随机信号—信号分析—研究
IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 065554 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

鑫马印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 13½ 字数 301 千字

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 27.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

前 言

随机物理现象是指由某种物理量变化所引起的不确定且难以再现的现象。随机信号是观察随机物理现象时所获取的包含不确定现象特征信息的信号。在一定意义上,研究随机物理现象是从提取随机信号中的某种有用信息开始的。而信息的利用程度取决于对随机信号的分析处理技术。随机信号分析与随机信号处理既有区别又有联系。随机信号分析是指对原始信号做某种分析,如时域、频域分析等,观察或提取信号的某些特征信息;随机信号处理是指对原始信号进行某种加工,如做波形整形、添加或删除某些成分处理。通常在工程中两者是分不开的。

随机信号分析的重要性,在于随机信号分析在工业控制方面的应用。例如为了达到某种控制目的的自动控制系统,在对系统输入量和输出量进行控制时,需要判断系统的输出是否达到预先设定的输入要求,如果没有达到输入要求,将产生一个偏差信号,需对偏差信号进行加工变换成人们所期望的控制信号,使系统的输出量自动地按预定要求进行控制。对于一个复杂的自动控制系统,其工作的有效性取决于系统的抗干扰能力。当系统受到外界随机的杂散信号严重干扰时,系统常常会偏离最佳的运行方式,这对于像导弹、雷达跟踪系统等要求控制特性很高的系统来说是不能接受的,解决的办法是应用概率和数理统计的方法对系统的状态进行精确的估计(包括剔除测量信号中的噪声),这就是随机信号分析和处理技术在自动控制系统中的具体应用。

随机信号分析与物理学问题的研究有着密切的联系。人们常用两种方法来描述随机物理现象中各物理参变量间的函数关系:一是用物理学基本定律得到的方程或方程的解来描述各参变量间的函数关系,这种方法为理论分析法;二是把随机物理现象中的各物理参变量作为我们随机实验的观察对象,测量并定量分析各参变量信号间的相关性,并由此建立它们之间的函数关系,这种方法为实验分析法。本书关于物理学问题的研究为后一种方法。

随机信号分析中关于随机信号的时域、频域描述是一种用数学方法描述随机信号的形式。正是因为有了对随机信号的数学描述形式以及由此产生的算法,才使得随机信号的时域、频域分析不仅可以获取信号本身的时域、频域特征信息,更主要的是它可以从数学上揭示信号与信号间的相关性和相干性。这样,通过测量和对随机物理现象中各参变量信号间的相关性分析,就可以揭示物理现象的产生机制或机理。因此,随机信号分析对物理学问题的研究具有重要意义。

综上所述,随着自动控制系统对象和任务的复杂化和物理学研究的不断深入,一些现代更先进的信号处理理论和技术,如小波分析、智能化处理等也越来越多地在各个领域得到了应用。因此,随机信号分析是从事自动控制工程人员和从事物理学研究的科技人员

需要掌握的一门基础理论。

在学习随机信号分析过程中,应重点掌握以下两点:

第一,根据随机变量和随机信号的定义,将它们与工程中的随机现象联系起来。根据定义和随机信号在振幅域、时域和频域中的描述方法,学会测量随机信号的平均值、均方值、方差、相关函数、频谱函数和随机变量的概率密度函数等,认识随机信号所具有的特性和规律性。

第二,引入信号与系统的概念,根据随机信号的相关、相干分析理论,研究相关物理现象的产生机制。另外,将随机信号分析应用到系统的参数识别上,对研究对象作合理的数学描述,以便识别物理系统产生响应的机制所在,并预测物理系统在可能的状况下所产生的响应。

关于随机信号的测量和分析,目前按随机信号分析方法的不同,随机信号的分析系统分两类:

一是模拟式分析系统。对于模拟式分析系统,输入信号为模拟信号,通过模拟元件RLC及模拟电路构成的模拟系统的加工处理,输出的仍然是模拟信号。例如人们常采用模拟滤波器构成的模拟系统剔除某个频率范围内的干扰信号。

二是数字式信号分析系统。数字信号处理是20世纪60年代以后发展起来的技术,它依赖于大规模集成电路和数字处理算法的发展,其核心是用数字计算机的运算功能代替模拟电路装置,达到信号加工变换的目的。数字式信号分析系统的基本原理是,首先通过模数(A/D)转换把原始连续信号变成离散时间信号,然后将采样得到的离散原始模拟信号经过量化处理转换成数字信号。数字系统是由通用数字计算机或专用数字硬件构成的系统,按预先给定的处理程序对数字信号进行运算处理,处理结果也是数字形式。在某些情况下,这些数字结果能满足处理要求,直接可用。在另一些情况下,这些数字结果还需要加工,有时还要将数字信号经过数模(D/A)转换,再还原成模拟信号后加以应用。

数字信号分析系统以数学运算的形式对信号实现分析和处理,摒弃了传统的模拟电路处理信号的形式,因而具有处理功能强、精度高、灵活性大和稳定性好等优点,并且随着大规模集成电路技术的不断发展,处理的实时性不断得到提高。数字信号处理是信号处理的发展趋势,特别是一些复杂的信号处理任务更是如此。

微电子技术和计算机技术的发展为数字信号处理提供了必要的物质基础。这里,我们不能不提到库利和图基在1965年发明的一种快速傅里叶变换算法,它的出现使得数字信号处理的速度提高了几个数量级,真正开创了数字信号处理的新时代。在大规模集成电路技术以及处理算法的进一步发展和推动下,数字信号处理得到了迅猛发展和广泛应用,各种专用器件和设备的不断涌现,特别是高速数据采集和处理芯片的推出,极大地提高了信号分析和处理能力,并使设计开发工作简单易行,这是数字信号处理技术发展的又一个里程碑。

本书是在作者讲授随机信号分析课程讲稿的基础上,结合教学工作的体会和从事相关科研工作的成果,为电子科学与技术、信息与通信工程等专业的本科生及流体力学、

噪声与振动工程等专业的研究生而编写的。目的是使读者通过本课程的学习,掌握随机信号分析的基本理论和系统分析方法以及它在工程中的应用。全书共分 11 章,武晓嘉同志参与编著了第 11 章的内容。本书作为教材的参考学时为 40 学时,教学中可根据需要加以取舍。

本书主要特点:

结合工程实际与功能分析,讲解随机信号的基础理论;

侧重物理概念与工程意义,讲清定义与定理,注重逻辑层次与深入浅出;

提供足够的助学例题和应用实例(课后习题可参考文献[1])。

由于编者水平有限,书中疏漏与不妥之处在所难免,敬请广大读者不吝指教。

编著者

2009 年 5 月

目 录

第 1 章 随机现象的基本描述	1
1.1 随机现象的基本术语	1
1.1.1 基本术语定义	1
1.1.2 随机变量和随机向量	4
1.1.3 随机函数、样本函数和样本记录	6
1.2 随机现象的随机过程	7
1.2.1 随机过程的定义	7
1.2.2 随机过程的分类	9
1.3 随机信号与随机现象	11
1.3.1 从随机变量到随机信号	11
1.3.2 信号的分类	12
1.4 随机现象的统计特性	14
1.4.1 随机过程的总体平均	14
1.4.2 平稳过程、非平稳过程和各态历经过程	16
1.4.3 单个样本记录的时间平均	17
第 2 章 随机信号的振幅域描述	18
2.1 概率的定义	18
2.1.1 古典概率	18
2.1.2 几何概率	19
2.1.3 统计概率	20
2.2 随机变量的概率分布函数	21
2.2.1 离散型随机变量的概率分布列(概率函数)	21
2.2.2 连续型随机变量的概率密度函数	22
2.2.3 概率分布函数及其基本性质	22
2.2.4 概率函数和概率密度函数的测量	25
2.2.5 几种常见随机变量的概率密度函数分布形式	26
2.3 矩和平均振幅的测量	29
2.3.1 随机变量各阶矩的数学描述及含义	29
2.3.2 中心趋势和散布	32

2.3.3	随机信号振幅域特性的测量	34
2.4	联合概率密度函数和联合矩	35
2.4.1	联合概率分布函数	35
2.4.2	联合矩	37
2.4.3	联合概率函数及密度函数的测量	40
第3章	随机信号的时域描述	42
3.1	相关的经典概念	42
3.2	自相关函数	43
3.2.1	自相关函数定义	43
3.2.2	相关系数	44
3.2.3	自相关函数的性质	45
3.2.4	自相关函数与脉动频率的关系	46
3.2.5	四类典型随机信号的时间波形及对应的自相关函数	46
3.3	互相关函数	47
3.3.1	协方差函数、互相关函数的定义	47
3.3.2	互相关函数的性质	47
3.3.3	互相关函数的相关系数	48
3.4	相关分析法	48
3.4.1	识别信号传播路径的相关分析法(一)	48
3.4.2	识别信号传播路径的相关分析法(二)	49
第4章	随机信号的频域描述	51
4.1	傅里叶级数和傅里叶变换	52
4.1.1	傅里叶级数	52
4.1.2	傅里叶变换	54
4.1.3	傅里叶变换举例	56
4.2	截断函数	58
4.2.1	截断函数的概念	58
4.2.2	截断函数 $x_T(t)$ 的有限记录长度 T 的确定	59
4.2.3	截断函数 $x_T(t)$ 的傅里叶变换	59
4.3	功率谱密度函数	59
4.3.1	随机信号功率谱的定义	59
4.3.2	自谱密度函数与自相关函数的关系	61
4.3.3	四类典型随机信号的自谱密度函数的谱图	62
4.4	互谱密度函数	62
4.4.1	互谱密度函数的定义	63

4.4.2	互谱密度函数的性质	63
4.4.3	相干函数	65
第5章	物理系统的响应特性	67
5.1	单位脉冲响应函数和频率响应函数	67
5.1.1	系统的基本概念	67
5.1.2	系统的数学描述	67
5.1.3	用频率响应函数 $H(f)$ 描述系统输入与输出功率谱之间的关系	70
5.2	常相干函数和单输入系统	71
5.2.1	常相干函数的定义	71
5.2.2	输出信号 $y(t)$ 与输入信号 $x(t)$ 的相干情况分类	71
5.3	多输入系统、剩余谱和偏相干函数	73
5.3.1	偏相干函数名词的定义	74
5.3.2	引入剩余随机变量讨论系统的响应	74
5.3.3	偏相干函数在工程中的应用	76
第6章	随机信号的数字化处理	78
6.1	模数转换	78
6.2	序列的傅里叶变换和频谱叠混	79
6.2.1	采样信号的数学描述	79
6.2.2	采样信号 $x_s(t)$ 的傅里叶变换	79
6.2.3	采样信号 $x_s(t)$ 的傅里叶逆变换	81
6.3	有限傅里叶变换及频谱泄漏	82
6.3.1	有限截断函数 $x_T(t)$ 的傅里叶变换	82
6.3.2	时间窗函数带来的频谱泄漏	82
6.4	有限离散傅里叶变换	85
6.4.1	有限离散序列的傅里叶变换	85
6.4.2	有限离散序列的傅里叶逆变换	86
6.4.3	有限离散信号的傅里叶变换小结	87
6.5	快速傅里叶变换	89
6.5.1	傅里叶变换算法的运算次数及复数运算因子	89
6.5.2	快速傅里叶变换算法的运算次数	89
6.5.3	快速傅里叶变换算法的逐次分割和逐步“合并”的具体描述	90
第7章	模拟式频率分析的基本原理	92
7.1	模拟式频率分析的理论依据	92
7.2	带通滤波器	93

7.2.1	带通滤波器带宽的定义和取值方式	93
7.2.2	滤波器性能参数	95
7.3	模拟式频率分析仪的基本原理及分类	96
7.3.1	逐级式频率分析仪	96
7.3.2	扫描式频率分析仪	96
7.3.3	外差式频率分析仪	97
7.3.4	跟踪滤波器式频率分析仪	99
7.4	平稳信号的频率分析	100
第8章	随机信号分析的误差	102
8.1	测量误差	102
8.1.1	估计量与其真值间的误差分类	102
8.1.2	估计量误差的定义	102
8.2	幅值域中随机数据统计特性的估计方法和误差	104
8.2.1	均值估计及误差	104
8.2.2	均方值估计及误差	106
8.2.3	概率密度估计及误差	107
8.2.4	有限样本数据对统计误差的影响	109
8.3	时域中随机数据统计特性的估计方法及误差	112
8.3.1	自相关函数估计的误差	112
8.3.2	互相关函数估计的误差	112
8.4	频域中随机数据统计特性的估计方法和误差	113
8.4.1	功率谱密度的估计及其误差	113
8.4.2	互谱密度函数、频响函数和相干函数的估计方法及误差	118
第9章	随机信号的数据准备及条件采样	120
9.1	数据准备	120
9.1.1	数据记录	120
9.1.2	数据准备	121
9.1.3	数据检验	121
9.2	数据测量中的条件采样	123
9.2.1	条件采样的基本思想	124
9.2.2	条件函数的产生	125
9.2.3	条件采样和平均的一般性定义及应用范围	128
第10章	相关分析及谱分析的工程应用	130
10.1	相关分析法的工程应用	130

10.1.1	相关函数估计中的误差	130
10.1.2	识别单输入/单输出系统传播路径的互相关法	132
10.2	谱分析法的工程应用	135
10.2.1	相关分析与谱分析结果间的数据互换	136
10.2.2	谱估计中的误差讨论	136
10.2.3	信号传播路径识别的互谱测量法	140
10.2.4	系统瞬变信号下的频响函数估计	142
10.2.5	频响函数估计中随机误差的讨论	142
10.2.6	频响函数估计中偏度误差的讨论	143
10.2.7	频响函数估计中的随机误差分析示例	145
10.2.8	频响函数估计中的偏度误差分析示例	147
10.3	单位脉冲响应函数在相关分析方面的应用示例	148
10.3.1	原理和方法	148
10.3.2	应用示例	149
10.3.3	影响相关峰值识别的因素及在实际中的应用	151
10.4	路径特征估计实验	152
10.4.1	非频变系统传播路径识别问题的回顾	152
10.4.2	路径频响函数的估计及其估计误差	152
10.5	由系统输出数据识别非频变传播路径问题	153
10.5.1	自相关分析法	154
10.5.2	自谱分析法	155
10.5.3	影响相关峰值识别的因素及其在实际中的应用	157
10.5.4	短时瞬变输入信号在多路径识别上的应用	157
10.6	倒频谱法在工程中的应用	158
10.6.1	原理和方法	158
10.6.2	应用示例	160
第 11 章	随机信号的小波分析	162
11.1	信号的小波分解	162
11.1.1	小波的定义	162
11.1.2	信号的小波变换及其逆变换	163
11.1.3	信号的小波分解	164
11.2	小波函数的生成	165
11.2.1	小波基函数 $\varphi(t)$ 的定义	165
11.2.2	小波系数的性质及其求解	166
11.2.3	小波基函数(尺度函数)的生成	169
11.2.4	小波函数 $w(t)$ 的生成	174

11.2.5	小波函数的伸缩和平移	180
11.3	小波变换	180
11.3.1	循环小波变换	180
11.3.2	离散小波变换的算法	182
11.3.3	小波变换示例	193
11.4	信号的小波重构和小波函数的滤波性能	195
11.4.1	信号的小波重构	195
11.4.2	离散二进小波函数的滤波性能	196
11.5	小波分析的应用示例	200
11.5.1	选取信号小波分析的采样点数和小波分析的频域范围	200
11.5.2	信号的特征提取	200
11.5.3	小波分析的结果讨论	202
参考文献		203

第 1 章 随机现象的基本描述

随机物理现象的研究是物理学问题的一个重要内容。随机物理现象,如大气紊流、桥梁随机载荷等如不加以考虑或研究,有时会引起灾难性的后果。在随机物理现象的研究中,我们需要了解一个严格的有关随机现象及其各种随机事件的描述方法以及如何表述它们发生概率的数学模型。为此,本章将首先介绍有关随机现象的基本描述方法,并对一些术语和符号加以说明。随后,将对如何观察随机物理现象的随机过程特征加以简述。

1.1 随机现象的基本术语

1.1.1 基本术语定义

定义 1.1 随机现象:在一定条件下,对某种现象进行观察时,其结果只能是多种可能结果中的一种,且不能预先确定,这种现象称为随机现象,用 RP 表示。

为了数学上的描述,我们把定义 1.1 中的一些条件记为 C ,多种可能结果构成的集合记为 S ,对于随机现象的某种可能结果称为事件,用 A 表示,如 $A=s_i, s_i \in S$,这样,随机现象 RP 用描述法就可以描述为

$$RP = RP(s_i/C, s_i \in S)$$

对于随机现象的某种结果如 s_1 ,用描述法可以描述为事件 A ,有

$$A = s_1 = RP(s_1/C, s_1 \in S)$$

定义 1.2 随机实验:按照一定计划,实施观察某种随机现象的行为称为随机实验。随机实验中一次具体的行为称为随机试验,用 E 表示。有时随机实验与随机试验不作具体区分。

定义 1.3 随机实验的样本点和样本空间:把一次具体随机试验的可能结果称为随机实验的样本点,用 s 或带有下标的 s_i 表示;而随机实验所有可能结果的集合称为该随机实验的样本空间,用 S 表示。样本空间和样本点间的关系可描述为 $S=\{s\}$ 。

定义 1.4 观察对象的样本点和样本空间:在随机实验中,可以把观察对象的每一可能结果用一个点表示,并称之为该观察对象的样本点,用 s 或带有下标的 s_i 表示;而观察对象的所有可能结果的集合称为该观察对象的样本空间,用 S 表示。样本空间和样本点间的关系可描述为 $S=\{s\}$ 。

用集合来描述样本空间的方法有两种:一种是列表法,它为列举出属于该样本空间的所有可能的结果(样本点)的一种描述方法;另一种是描述法,它为关于对样本空间中各个可能结果(样本点)描述的一种方法。下面例 1.1 中描述 S 的方法是列表法,例 1.2 中描述 S 的方法是描述法。

例 1.1 (1)试指出连续两次投掷硬币随机实验的样本点和样本空间,并用随机现象的描述法描述随机实验中某一事件的发生。(2)若将随机实验中投掷硬币的行为作为观察对象,试描述投掷硬币行为结果的样本点和样本空间以及随机现象中某一事件的发生。

解:(1) 连续两次投掷硬币随机实验的样本点: $s_1 = \{\text{正, 正}\}$ 表示全出现正面的结果; $s_2 = \{\text{正, 反}\}$ 表示出现正面和反面的结果; $s_3 = \{\text{反, 正}\}$ 表示出现反面和正面的结果; $s_4 = \{\text{反, 反}\}$ 表示全出现反面的结果。这样,连续两次投掷硬币随机实验的样本空间为

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} = \{s_i, i = 1, 2, 3, 4\}$$

而对于连续两次投掷硬币随机实验的随机现象,它可描述为

$$RP = RP(s_i / \text{连续两次投掷硬币随机实验的结果}, s_i \in S)$$

若将全出现正面结果 s_1 定义为随机现象中的事件 A ,它可描述为

$$A = RP(s_1 / \text{连续两次投掷硬币随机实验的结果}, s_1 \in S)$$

(2) 若将上述随机实验中投掷硬币的行为作为观察对象,它的样本点为: s_1 表示出现正面的结果; s_2 表示出现反面的结果。它的样本空间为

$$S = \{s_1, s_2\}$$

该样本空间可用图形表示,如图 1-1 所示。这种空间或集合的几何表示称为文氏图。而对于投掷硬币行为的结果是一个随机现象,可描述为

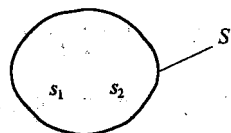


图 1-1 例 1.1 离散样本空间

$$RP = RP(s_i / \text{每次投掷硬币行为的结果}, s_i \in S)$$

若将出现正面结果 s_1 定义为随机现象中的事件 A ,它可描述为

$$A = RP(s_1 / \text{每次投掷硬币行为的结果}, s_1 \in S)$$

例 1.2 测量某台随机信号发生器的输出电压的数值。若输出电压的数值范围为 $[u_1, u_2]$,其中 u_1 与 u_2 为确定常数,试分析该实验的样本点和样本空间。

解:设随机信号发生器的输出电压为 u 。根据给定条件,测量的结果必满足 $u \in [u_1, u_2]$ 。不满足该式的任何电压数值不可能是这一实验的测试结果。因此, $u \in [u_1, u_2]$ 是该实验的一个可能结果,称为样本点。所有这些可能结果的集合称为该实验的样本空间 S ,有

$$S = \{u; u \in [u_1, u_2]\}$$

若将某个可能结果 u 表示为实轴上的一点,那么样本空间就是实轴上的一个区间 $[u_1, u_2]$,如图 1-2 所示。

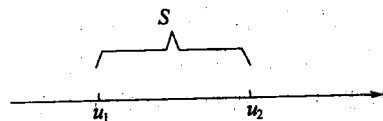


图 1-2 例 1.2 连续样本空间

随机事件为随机实验中所观察现象的某个或满足某种条件的多个可能结果的集合(样本空间的某个子集)。因此,随机事件可以用多个可能结果的集合来定义。

定义 1.5 随机事件:随机现象中满足某种条件的样本集合(子集)称为随机事件(简称事件)。

随机实验的所有可能事件所构成的全体事件的集合称为事件域,记为 $\mathcal{F}$ 。事件域中

的每一个元素都对应着一个事件。

随机事件作为样本空间的某个子集,数学上可以用列表法或描述法描述。如随机事件 A 可以描述为

$$A = \{\text{列举出随机现象中属于事件 } A \text{ 的所有可能结果(列表法)}\} = \{s: s \text{ 应具备的条件(描述法)}\} = \text{样本空间的某个子集}$$

例 1.3 一只六面体的色子,其中四面为动物图案,两面为建筑物图案,试描述色子落下后出现动物图案的这一事件。

解:首先定义色子上四面为动物图案的样本点: s_1, s_2, s_3 和 s_4 , 两面为建筑物图案的样本点: s_5 和 s_6 。这样,动物图案的子集形式为 $S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, 建筑物图案的子集形式为 $S_2 = \{s_5, s_6\}$ 。色子落下后所出现动物图案的事件记为 A , 那么随机事件 A 可以描述为

$$A = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \text{列表法} = \{s: s \in S_1\}, \text{描述法}$$

由此可见,观察对象的所有可能结果组成的样本点集为样本空间,样本空间中以不同方式组合在一起的点集可构成某一事件。在一定条件下,每个事件都有一个概率,它在 0 和 1 之间。不可能事件的概率为零,必然事件的概率为 1。样本空间可以是有限的,也可以是无限的。

定义 1.6 事件概率:若事件 A 为随机实验中某一可能发生的事件,那么用统计方法得到的、能用于定量描述在随机实验中事件 A 出现的可能性的数值称为在该随机实验中事件 A 发生的概率,用 $P(A)$ 表示。

在对随机实验进行定量分析时,要注意三个方面:一是样本空间 S 的描述。它是观察对象的所有可能结果的样本点以及由样本点集构成的样本空间 S 。二是观察对象的事件域 $\mathcal{F}$ 的描述。每个事件是由样本空间中满足某种条件的样本子集所构成,其中子集中的所有样本点应属于该事件的一个可能结果。三是样本空间中样本点或事件域中事件的随机特性(概率与矩特性)。这三种量的总和称为随机实验的三元量或随机实验的概率空间。

定义 1.7 概率空间:对于随机实验,常常把随机现象的样本点集合、事件域和事件概率集合这三元有序量的对应关系称为概率空间,记为

$$\Theta(S, \mathcal{F}, P)$$

式中: S 为样本点集合; $\mathcal{F}$ 为事件域; P 为事件概率集合。

在许多情况下,也可以用二元有序量来表示随机实验的概率空间为

$$\Theta(S, P)$$

总之,对于概率空间来说,如果 S 是有限的样本空间,我们常给样本点标上一个数目;如果 S 是可数无限的样本空间,我们常用某种算法来描述第 n 个样本点的概率;如果 S 是不可数无限的样本空间,我们常用一个加权函数来分配概率。对于上述情况的概率的分配,要由数学模型的式子给出(它与集的性质有关)。由此看出,概率的正规定义涉及到对样本空间的一个详细说明。因此,当我们提到给定一个概率空间 $(S, \mathcal{F}, P)$, 它表明随机现象的样本空间 S , 适当的事件集合 $\mathcal{F}$ 和相应的概率赋值 P 都已给定。

1.1.2 随机变量和随机向量

随机变量的概念引入,是由于数学分析不能直接用于对集合函数的研究,这样必然会影响到对随机现象的研究。为解决这个问题,必须设法将集合函数与数学分析中所研究的点函数间建立某种联系。这样便能用数学分析的方法去研究随机现象,从而达到人们对随机现象更深入的理解和应用。

在定义随机变量之前先举一个例子,说明怎样建立一个集合函数与点函数的联系。设六面色子的样本不是按数字 1,2,3,4,5,6 划分,而是用四面为几何图形、两面为符号划分,并用 $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ 表示这些样本,集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ 表示它们的样本空间,如图 1-3 所示。这时因为随机实验的结果是符号而不是可作数学分析或运算的数字,所以为了便于把它们放在某系统中去观察、分析或运算,有必要将它们所有结果用数字表示,特别是用实数表示。为此,最简单的方法是把每个样本映射到一个实轴 X 上,如图 1-3 所示。

我们把色子按几何图形和符号的可能试验结果表示为事件 1 和事件 2,并将它们映射到实轴 X 的 1,2 上去,称映射 1,映射 2,如图 1-4 所示。在这种映射中,自变量是随机现象中随机事件的样本空间的点,映射的值就是样本空间的点的函数,有 $x = X(s)$,它为一个实数,表明样本空间中随机事件与数学分析中所研究的点之间的函数关系,这个点的函数值在随机试验之前是不可预测的,随机试验所产生的随机结果,或随机试验中的随机变量。这样,随机变量就是一种把随机现象中所有可能发生的事件的样本点都一一映射到一个实轴上,即从原样本空间到一个新的样本空间的一种映射。随机变量的每一个实数值都对应着随机现象中的一个事件,而随机现象的样本点为属于某一事件的一个可能结果。

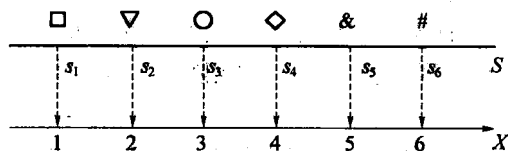


图 1-3 色子六面体构成的样本空间示意图

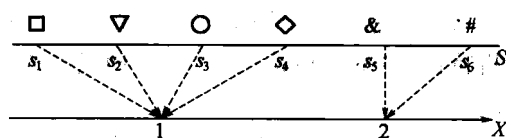


图 1-4 新旧样本空间映射示意图

定义 1.8 随机变量:若有实函数 $X(s)$,将随机实验中随机现象的每一可能结果 s 都与一个实数 x 对应起来,有函数关系:

$$x = X(s)$$

则 $X(s)$ 称为该随机实验中的随机变量。实质上,随机变量就是将观察现象的每一可能结果 s 用一个实数值表示的一种映射。

随机变量概念的产生,使得概率论的研究对象由事件转变为研究随机变量。正像研究随机事件一样,对于随机变量不仅要知道它可能取哪些值,还必须知道它以什么概率取这些值。显然,由于引入了随机变量,可以把它们放在对随机现象的处理系统中,对随机事件的各种结果作数学分析或运算。

随机变量 x 的取值与 s 的对应关系如图 1-5 所示。由此看出,随机变量是关于观察

对象的样本空间 S 上所定义的所有可能结果 s 的实函数 $X(s)$ 。值得注意的是,若随机变量 $X(s)$ 的取值是连续的、离散的或者混合的,那么相应地, $X(s)$ 分别称为连续随机变量、离散随机变量或者混合随机变量。

定义 1.9 随机向量:随机向量 $\mathbf{X}(s)$ 是样本空间 S 上所定义的所有可能结果的实函数,其向量函数如图 1-6 所示,可以表示为

$$\mathbf{X}(s) = [X_1(s), X_2(s), X_3(s), \dots, X_k(s)]^T$$

式中上标 T 表示转置。

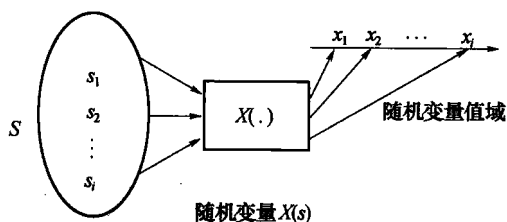


图 1-5 随机变量映射

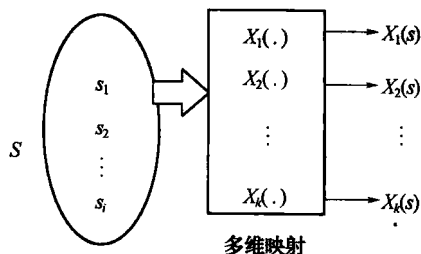


图 1-6 随机向量

例 1.4 有一个生产电子设备的工厂,在产品出厂前需要对其产品质量进行测试,以确定它是否为合格产品。试引入随机变量概念,描述产品质量测试这一随机实验中随机变量的样本空间。

解:设产品的质量用 Q 表示,该产品质量与具体测试的某件产品 s 有关,它为 s 的函数,记为 $Q(s)$ 。引入随机变量概念,将它的所有可能结果都与一个实数值相对应,我们约定

$$x = Q(s) = \begin{cases} 1, & \text{产品 } s \text{ 合格为映射 } 1 \\ 0, & \text{产品 } s \text{ 不合格为映射 } 0 \end{cases}$$

由于产品质量 $Q(s)$ 取何映射值,在其具体测试产品 s 之前是不能预先知道的,所以 $x=Q(s)$ 为随机变量,它是一个随具体测试产品 s 而变的因变量(或函数)。由于通过映射,将产品质量的可能结果与一个实数值相对应,因此,随机变量的样本空间应该为观察对象所有可能结果的映射值的值域,有 $S=[0,1]$ 。

在例 1.4 中,用了一个随机变量 $Q(s)$ 来描述随机实验的结果,并借助随机变量的映射关系,将该例题中一个不为数值形式(合格/不合格)的随机实验的结果用数值 0 和 1 表示。显然,利用随机变量的这一映射关系,对于不为数值形式的随机实验的结果来说,它能够通过随机变量的值域来描述随机实验的概率空间,如随机变量为某值下的概率。

根据随机变量的取值是可列的还是不可列的,把随机变量分为离散随机变量和连续随机变量。随机变量的值域,也称随机变量的样本空间,它为随机事件所有可能结果的样本空间,因此,离散随机变量的样本空间是离散的点,因而它的取值是离散的;而连续随机变量的样本空间是连续区间,因而它的取值为连续地占据着某一区间。如图 1-7 所示。

随机向量是描述某种随机现象的若干个随机变量的向量形式。例如,一个观察和处