

材料力學講義

趙國華編

龍門聯合書局出版

材料力學講義

趙國華編

龍門聯合書局出版

序

本書係根據編者歷年來在專科學校教授材料力學的教材及參考下列各書

S. Timoshenko: Strength of Materials

von G. Dreyer: Festigkeitslehre und Elastizitätslehre

P. С. КИНАСОШВИЛИ: Элементарный курс сопротивления
материалов

清水篤磨: 材料力學

編輯而成，可供專科學校及中級技術學校教學之用。本書內容力求精簡扼要，但材料力學的基本知識幾全包羅在內。書中原理常用圖解釋，並祇用初等算學演證，俾讀者容易領會。書中雖亦用到微積分演證者（註有*者），但對於中級技術學校學生可略去不教，而仍無礙於前後文的銜接。該部分教材應刪與否，教師可視學生程度的高低或授課時間的多少而酌定之。本書所選習題着重實際，全附答案可供核對，其題材較難者並附解法，可補充正文之不足。本書編輯既竟，承龍門聯合書局編輯部諸位先生詳細校閱一過，並代為繪圖，謹致謝意。

趙國華

目 錄

第一章 拉伸與壓縮	1
1. 彈性, 2. 應力和應變, 3. 虎克定律, 4. 拉伸試驗圖, 5. 工作應力, 6. 拉伸與壓縮的超靜定問題, 7. 熱應力.	
第二章 剪	17
1. 剪應力、剪應變及剪力彈性係數, 2. 兩垂直方向上的剪應力.	
第三章 鉚接	22
1. 鉚接式樣, 2. 鉚接的損壞原因, 3. 鉚接的強度及效率.	
第四章 應力和應變的分析	28
1. 單向的拉伸或壓縮, 2. 兩垂直方向的拉伸或壓縮, 3. 純剪, 4. 平面應力的一般情形, 5. 應力圓, 6. 單向拉伸時應變的分析, 7. 兩垂直方向受拉伸或壓縮時的應變, 8. 三互相垂直方向的拉伸或壓縮.	
第五章 剪力與彎矩	44
1. 梁, 2. 剪力和彎矩, 3. 剪力和彎矩的方程式和圖示法.	
第六章 梁內應力	59
1. 彎曲應力, 2. 剪應力, 3. 彎曲時的主應力, 4. 等強度梁, 5. 鋼筋混凝土梁.	
第七章 梁的撓度	81
1. 撓曲公式, 2. 由彎矩圖求撓度, 3. 用共軛梁求撓度, 4. 用重疊法求撓度, 5. 變斷面梁的撓度, 6. 不與梁斷面對稱軸平行的各載荷所起的應力與撓度.	
第八章 超靜定梁的彎曲	105
1. 過剩拘束, 2. 一端固定一端支托著的梁, 3. 兩端固定的梁, 4.	

三支座的梁。 5. 連續梁。

第九章 扭轉 117

1. 圓軸的扭轉。 2. 矩形斷面梁。 3. 螺旋彈簧(簧圈密接的)。

第十章 拉壓、彎曲與扭轉的合成結果 133

1. 彎曲與壓或拉的合成結果。 2. 短柱的偏心載荷。 3. 軸向拉壓與扭轉的合成結果。 4. 圓軸的彎曲與扭轉的合成結果。

第十一章 柱 147

1. 柱的翹曲。 2. 臨界載荷。 3. 柱端處於各種情形的臨界載荷。 4. 臨界應力。 5. 設計柱的經驗公式。

第十二章 應變能 163

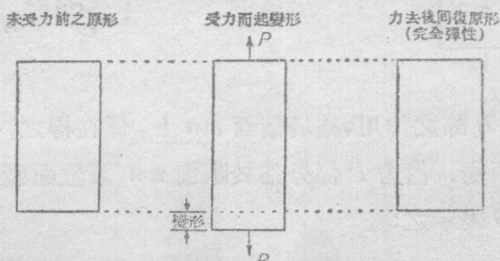
1. 拉伸的應變能。 2. 純剪的應變能。 3. 扭轉的應變能。 4. 彎曲的應變能。 5. 卡氏定理。

材料力學講義

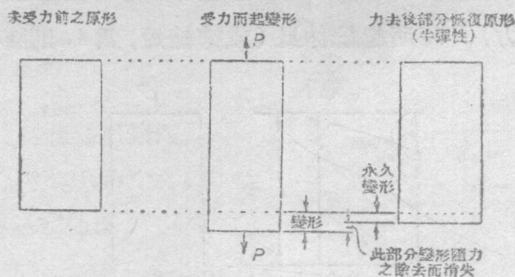
材料力學討論作用於彈性體的外力與其所起內力、變形間的關係。

第一章 拉伸與壓縮

1. 彈性。物體受力則變形，力除去後則仍回復其原形，此種性質謂之彈性。

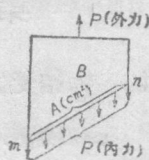
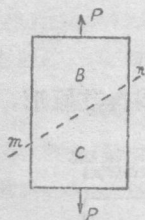


作用於物體之力除去後，該體能完全回復其原形者，稱為完全彈性體。若僅能恢復原形的一部分，而尚有一部分變形仍剩留着，則為半彈性體。力除去之後所剩留的變形稱為永久變形。



物體或為完全彈性體或為半彈性體視所受之力大小而定，倘所受之力並未超過一定限度，則呈完全彈性體，逾此限度則呈半彈性體。此限度視材料而定。

2. 應力和應變。先論外力對於物體內部所起之影響。將受有拉力(或壓力) P 之稜柱形桿以斷面 mn 分為 B 、 C 兩部，今論 B 部(或 C 部)的平衡情形。

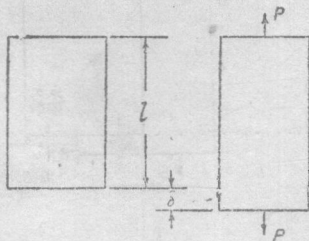


C 部對於 B 部之作用，施於斷面 mn 上，係在桿之內部，故稱為內力，應與外力平衡。內力 P 係分佈於斷面 mn ，單位面積上的內力 P/A 稱為應力，以 S 表示之：

$$S = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

設 P 以 kg 計， A 以 cm^2 計，則 S 以 kg/cm^2 計。

再論外力對於物體形狀所起之影響。設一稜柱形桿原長 l ，受外力(拉力或壓力) P 時所起總伸長(或總縮短)為 δ ，則該桿原長一單位的



伸長或縮短（即單位伸長或單位縮短） δ/l 稱為抗拉應變或抗壓應變，以 e 表示之：

$$e = \frac{\delta}{l} \quad (1-2)$$

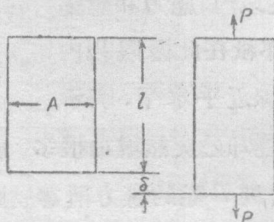
應變 e 為兩長度之比值。

3. 虎克定律，當物體所受之應力尚未超過一定限度，則所起應變與此應力成正比，此即虎克定律，以式示之：

$$e = \frac{S}{E} \quad (1-3)$$

其常數 E 稱為材料的彈性係數或楊氏模數。建築鋼的 $E = 2.15 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 。

對於稜柱形桿，其 $S = P/A$, $e = \delta/l$,



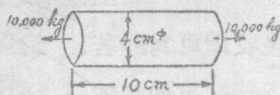
則

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\frac{P}{A}}{E}$$

即

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \quad (1-4)$$

【例】設有圓柱形鑄鐵試樣，其 $E = 1.05 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ，求（1）抗張應力；（2）全部縱伸長。



【解】（1） $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times 4^2 = 4\pi = 12.6 \text{ cm}^2$

$$S = \frac{P}{A} = \frac{10,000}{12.6} = 794 \text{ kg/cm}^2$$

$$(2) \quad e = \frac{S}{E} = \frac{794}{1.05 \times 10^6} = 756 \times 10^{-6}$$

$$\delta = el = 756 \times 10^{-6} \times 10 = 0.00756 \text{ cm}$$

$$\text{或} \quad \delta = \frac{Pl}{AE} = \frac{10,000 \times 10}{12.6 \times 1.05 \times 10^6} = 0.00756 \text{ cm}$$

4. 拉伸試驗圖。 受力物體中的應力和其應變間的關係得以拉伸

試驗圖表示之。建築鋼等較易延伸的展性材料，其拉伸試驗如下圖所示。由 O 至 A 為直線，表示應力和應變成正比。 A 為直線 OA 的最高點，相當於 A 點的應力稱為比例極限，故在比例極限以內，應力和應變始成正比，而虎克定律亦祇在此極限以內適用。在 B 點附近曲線近乎水平，表示

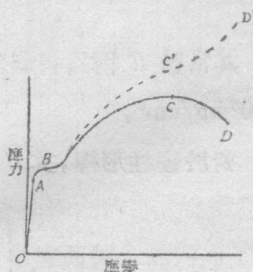
應力並未顯著增加而應變却已突然增加很多，即材料抵抗變形的能力基本上已消失了。相當於 B 點的應力稱為屈服點。 C 為曲線上的最

高點，相當於 C 點的應力稱為極限強度，乃物體拉斷

之前所達到的最大應力。 D 為曲線的終點，相當於 D 點的應力稱為斷裂點，乃物體拉斷時所有的應力。

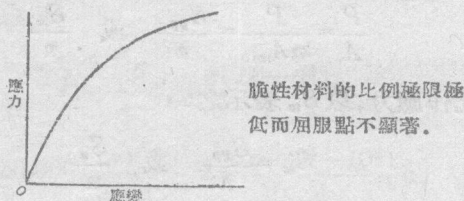
以上各點應力均就試樣之原有橫斷面積計算，實際上拉伸之際側面收縮，如左圖所示。應力超過屈服

點之後收縮更為顯著。倘以各時刻已收縮的實際橫斷面積計算應力，則得正確的拉伸試驗圖如前圖之曲線 $OABC'D'$ 。其斷裂點 D' 高出極限強度 C' 。



但材料的屈服點及極限強度一般均就原有橫斷面積計算。

鑄鐵等不易延伸的脆性材料，其拉伸試驗圖如下圖所示。



數種常用材料的機械性質如下表所示。

材 料	E kg/cm ²	屈 服 點 kg/cm ²	極限強度 kg/cm ²
低炭鋼	2×10^6	1800 以上	3300 ~ 4000
鑄鋼	2.15×10^6	2100 以上	3500 ~ 3700 以上
彈簧鋼	2.2×10^6		10000 ~ 17000 以上
鑄鐵	$(0.75 \sim 1.05) \times 10^6$		1200 ~ 2400
黃銅	$(0.8 \sim 1.1) \times 10^6$		1500
青銅	0.9×10^6		2000 ~ 3000
鋁	$(0.675 \sim 0.726) \times 10^6$		930 ~ 1500
玻璃	0.7×10^6		2500
松木(順紋向)	0.11×10^6		560 ~ 1400
混凝土(受壓縮時)	0.28×10^6		210

5. 工作應力。茲論 $S = P/A$ 式中 S 的極限值，如材料為展性者，則取屈服點 S_{yp} 為其極限，逾此將起永久變形。又如材料為脆性者，則取極限強度 S_u 為其極限，逾此將斷裂。故最小橫斷面積為

$$A_{\min} = \frac{P}{S_{yp}} \quad \text{或} \quad A_{\min} = \frac{P}{S_u}$$

為安全起見，常用較大的橫斷面積 A ，即

$$A = n A_{\min}$$

其 $n > 1$, 如此則材料中所起應力為

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{n A_{\min}} = \frac{S_{yp}}{n} \quad \text{或} \quad \frac{S_u}{n}$$

此應力稱為工作應力, 以 S_w 表示之:

$$S_w = \frac{S_{yp}}{n} \quad \text{或} \quad \frac{S_u}{n} \quad (1-5)$$

其 n 稱為安全因數。

【例】圖示一壓力機, $P = 50,000 \text{ kg}$, $l = 100 \text{ cm}$ 。求鋼螺栓 N 的直徑 d , 及受到最大拉力 P 時的總伸長。取鋼的工作應力 $S_w = 700 \text{ kg/cm}^2$ 。

【解】兩鋼螺栓的總面積為

$$\frac{P}{S_w} = \frac{50,000}{700} = 71.4 \text{ cm}^2$$

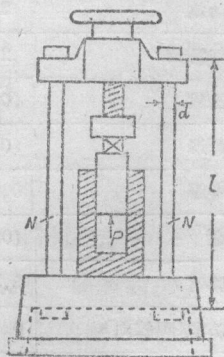
每個螺栓的面積為

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{71.4}{2} = 35.7 \text{ cm}^2$$

$$\therefore d = 6.76 \text{ cm}$$

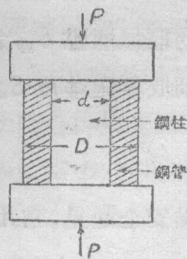
螺栓的總伸長為

$$\delta = \epsilon l = \frac{S_w}{E} l = \frac{700}{2.1 \times 10^6} \times 100 = 0.033 \text{ cm}$$



3. 拉伸與壓縮的超靜定問題。單憑靜力學方程式不能解答的問題, 謂之超靜定問題, 欲求其解必須同時討論其變形情形。茲舉例說明:

設鋼柱與銅管長度相同, 其 $d = 10 \text{ cm}$, $D = 20 \text{ cm}$, 今置於壓力機中以 $P = 50,000 \text{ kg}$ 壓之。求鋼與銅內的抗壓力 S_s 及 S_c 、單位壓縮 e_s 及 e_c 。已知



鋼的 $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 銅的 $E_c = 1.13 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

【解】 由靜力學得：

$$P = \frac{\pi d^2}{4} S_s + \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} S_c$$

$$\text{即 } 50,000 = \frac{\pi \times 10^2}{4} S_s + \frac{\pi (20^2 - 10^2)}{4} S_c \quad (a)$$

再論變形：

$$\therefore \delta_s = \delta_c, \quad l_s = l_o$$

$$\therefore \frac{\delta_s}{l_s} = \frac{\delta_c}{l_c}$$

即

$$e_s = e_c$$

$$\therefore \frac{S_s}{E_s} = \frac{S_c}{E_c}$$

即

$$\frac{S_s}{2.1 \times 10^6} = \frac{S_c}{1.13 \times 10^6}$$

$$\therefore S_s = \frac{2.1}{1.13} S_c = 1.86 S_c \quad (b)$$

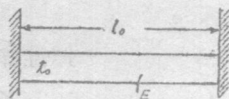
由(a)及(b)解得

$$S_c = 159 \text{ kg/cm}^2$$

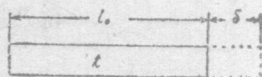
$$S_s = 1.86 \times 159 = 296 \text{ kg/cm}^2$$

$$e_s = e_c = \frac{S_c}{E_c} = \frac{159}{1.13 \times 10^6} = 0.000141$$

7. 熱應力。物體熱則脹冷則縮，倘此項脹縮有所阻礙，則起應力，是即熱應力。今說明兩端固定之稜柱形桿因溫度增加而起的熱應力。



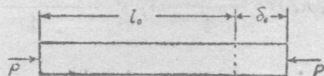
暫設兩端並不固定，桿可自由伸縮，則溫度由 t_0 至 t 後，其長度 l_0 將增加



$$\delta = \epsilon l_0 (t - t_0)$$

其 ϵ 爲桿的熱膨脹係數。

今桿端被牆固定，桿不能自由伸長，即牆施壓力 P 於桿端以阻止其因熱而起之伸長 δ ，亦即壓力 P 所起的縮短適爲 δ 。



抗壓應變爲

$$e = \frac{\delta}{l_0}$$

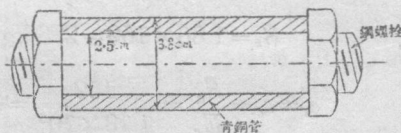
抗壓應力爲

$$S = Ee = E \frac{\delta}{l_0} = E \frac{\epsilon l_0 (t - t_0)}{l_0}$$

即

$$S = E\epsilon(t - t_0) \quad (1-6)$$

【例】 設在 40°F 時螺母底與管端適相配合，求在 160°F 時所起於銅管與鋼螺栓中的應力。 已知



$$\text{彈性係數} \begin{cases} \text{青銅 } E_b = 0.68 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{鋼 } E_s = 2.15 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

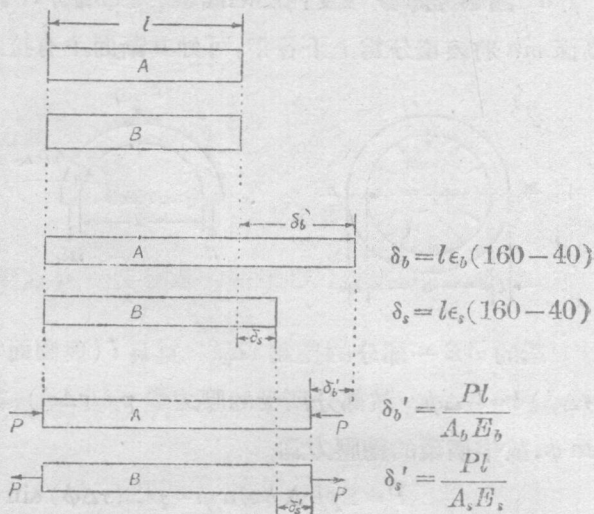
$$\text{每 } ^\circ\text{F} \text{ 的熱膨脹係數} \begin{cases} \text{青銅 } \epsilon_b = 10.1 \times 10^{-6} \\ \text{鋼 } \epsilon_s = 6.1 \times 10^{-6} \end{cases}$$

【解】 介於兩螺母間的青銅管以 A 表示，鋼螺栓以 B 表示。

在 40°F .

在 160°F 如無螺帽, 可自由膨脹.

在 160°F 因有螺帽, A 與 B 須等長. P 將 A 壓短 δ_b' 而將 B 伸長 δ_s' .



即

$$l\epsilon_b(160-40) - \frac{Pl}{A_b E_b} = l\epsilon_s(160-40) + \frac{Pl}{A_s E_s}$$

$$10.1 \times 10^{-6} \times 120 - \frac{P}{\frac{\pi}{4}(3.8^2 - 2.5^2) \times 0.68 \times 10^6}$$

$$= 6.1 \times 10^{-6} \times 120 + \frac{P}{\frac{\pi}{4} \times 2.5^2 \times 2.15 \times 10^6}$$

$$\therefore P = 1480 \text{ kg}$$

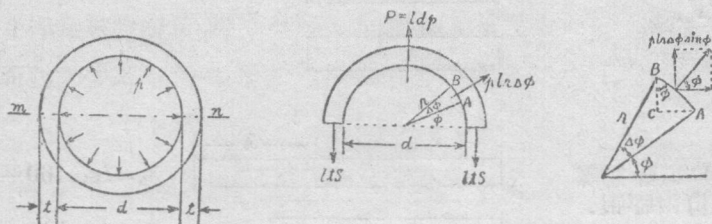
青銅管中壓應力

$$S_b = \frac{1480}{\frac{\pi}{4}(3.8^2 - 2.5^2)} = 287 \text{ kg/cm}^2$$

鋼螺栓中拉應力

$$S_s = \frac{1480}{\frac{\pi}{4} \times 2.5^2} = 231 \text{ kg/cm}^2$$

8. 圓環與薄管。受內壓的圓環，例如箍等，欲求環內的應力，則以斷面 mn 將該環分為上下各半，可知其斷面上有拉力作用。



環的 AB 一部分的長為 $r\Delta\phi$ ，寬為 l （與圖面垂直），故其面積為 $(r\Delta\phi)l = lr\Delta\phi$ 。該部分所受的壓力為 $p(lr\Delta\phi)$ ，其垂直分力為 $plr\Delta\phi \sin\phi$ ，故半個環的總壓力為

$$P = \Sigma plr\Delta\phi \sin\phi = pl\Sigma(r\Delta\phi) \sin\phi$$

但 $(r\Delta\phi) \sin\phi$ 為弧 AB 的水平投影 AC 。故 $\Sigma(r\Delta\phi) \sin\phi$ 為半圓的水平投影，等於內直徑 d 。

$$\therefore P = pld$$

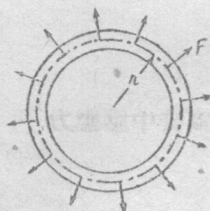
各橫斷面的面積為 lt ，其 l 為斷面的寬， t 為其厚，斷面上的拉應力設為 S ，因其作用於切線方向，故稱為切線應力。斷面上的總拉力為 $2ltS$ 。

$$\therefore 2ltS = pld$$

$$\therefore S = \frac{pd}{2t} \quad (1-7)$$

迴轉圓環。此時有離心力發生，分佈於其圓周，相當於前述的壓力 p 。設環的單位容積重量為 w ，或單位容積的質量為 $\frac{w}{g}$ ，環的橫斷面積設為 A ，則沿圓周每單位長度的質量為

$$m = \frac{w}{g} A$$



環的平均半徑設為 r ，平均圓周速度設為 v ，則離心加速度為

$$a = \frac{v^2}{r},$$

故單位長度的離心力為

$$F = \frac{wA}{g} \frac{v^2}{r},$$

此力相當於前述的壓力 p 。半個環的總離心力為 $P = Fd$ ，即

$$P = \frac{wAv^2}{gr} d,$$

設環的橫斷面積上所起的拉應力或切線應力為 S ，則總拉力為 $2AS$ ，

$$\therefore 2AS = \frac{wAv^2 d}{gr},$$

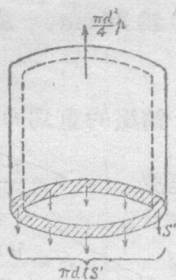
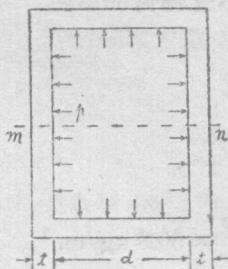
$$\therefore S = \frac{wv^2 d}{2gr},$$

或

$$S = \frac{wv^2}{g}. \quad (1-8)$$

故迴轉圓環內的應力與圓周速度的平方成正比。

薄管。受內壓的閉口薄管，情形與受內壓的圓環相似。



故其切線應力亦為

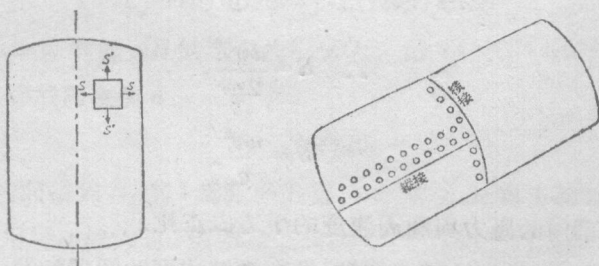
$$S = \frac{pd}{2t} \quad (1-9)$$

今將該管以斷面 mn 橫剖之而論上半部在軸向的平衡情形：作用於管端的總壓力為 $\frac{\pi d^2}{4}p$ ，拉應力設為 S' ，因其作用於軸線方向，故稱為縱向應力；斷面上的總拉力為 $\pi dtS'$ ，

$$\therefore \pi dtS' = \frac{\pi d^2}{4}p,$$

$$\therefore S' = \frac{pd}{4t} \quad (1-10)$$

管壁受到縱向與切線兩種應力，切線應力較縱向應力大一倍。汽鍋板一類的鉚接，如橫接用一排鉚釘，則縱接須用兩排鉚釘。



【例】設有鑄鐵飛輪，平均直徑 4 m，轉速為 120 rpm。輪緣之寬為 25 cm，厚為 30 cm。視輪緣的撓曲完全不受輪臂的影響。求輪緣中的應力。

【解】鑄鐵的重為 $w = 0.0078 \text{ kg/cm}^3$ 。

緣的平均速度
$$v = \frac{\pi \times 4 \times 120}{60} = 25.2 \text{ m/sec.}$$

切線應力為
$$S = \frac{wv^2}{g} = \frac{0.0078 \times 2520^2}{981} = 50.3 \text{ kg/cm}^2.$$

【例】設有 6 cm 厚的輪箍，趁熱裝於直徑 180 cm 的輪上，輪可視