

张嘉瑾 精彩数学系列
ZHANGJIAJINJINGCAISHUXUEXILIE

立体几何

LITIJHEQIANTIQIAOJIELITIJHEQIANTIQIAOJIE

千题巧解

张嘉瑾 编著

- 奇思妙解
- 专题突破
- 让数学变得如此生动

高中数学必备

长春出版社

张嘉瑾 精彩数学系列
ZHANGJIAJINJINGCAISHUXUEXILIE

立体几何

LITIJIHEQIANTIQIAOJIELITIJIHEQIANTIQIAOJIE

千题巧解

長 春 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

立体几何千题巧解/张嘉瑾编著. —长春: 长春出版社, 2006. 6

ISBN 7-80664-288-9

I. 立... II. 张... III. 立体几何—解題 IV. 0184. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 027756 号

责任编辑: 杨爱萍

封面设计: 郝威

版式设计: 王久慧

出版发行: 长春出版社

发行部电话: 0431-8561180

总编室电话: 0431-8563443

读者服务部电话: 0431-8561177

地址: 吉林省长春市建设街 1377 号

邮编: 130061

网址: www.cccbs.net

制版: 吉林省久慧文化有限公司

印刷: 吉林省吉育印业有限公司

经销: 新华书店

开本: 880×1230 毫米 32 开本

字数: 262 千字

印张: 11 印张

版次: 2006 年 6 月第 1 版

印次: 2006 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1-10 000 册

定价: 14.00 元

版权所有 盗版必究

前

言

数学枯燥乏味吗？我不这样想。

我觉得数学生动、精彩。我在解数学题的时候常常被那种简洁的解法感动，陶醉在优美的逻辑推理中。

一个看起来并不复杂的问题，甚至，一个简单的选择题，因为思维的角度不同，往往会出现各种不同的解法；一个看上去陌生的问题，深思熟虑之后，把它化归到熟悉的题型中去，于是豁然开朗，于是内心充满了甜蜜。

是的，数学有它独特的魅力，这种魅力决不是轻而易举就能觉察与体验到的，而真正要享受这魅力带给我们的愉悦，必须付出艰辛和血汗。

我真诚地希望高中学生能从心底里喜爱数学，从而激发智慧和创造力，这也便是我倾其全力写作的本意。

《张嘉瑾精彩数学》系列丛书能让你爱不释手吗？希望这巧妙的解法能让你在顿悟中不断进取，能让你的一生更加精彩！

张嘉瑾



目 录

CONTENS

立体几何千题巧解

第一章 直线和平面 (1)

1. 四大公理和空间直线 (1)

双基提炼 (1)

好题导航 (3)

拓展提高 (18)

解答提示 (21)

2. 直线与平面平行的判定和性质 (25)

双基提炼 (25)

好题导航 (25)

拓展提高 (33)

解答提示 (34)

3. 直线与平面垂直的判定和性质 (38)

双基提炼 (38)

好题导航 (39)



拓展提高	(47)
解答提示	(50)
4. 斜线、射影、角和距离	(55)
双基提炼	(55)
好题导航	(55)
拓展提高	(61)
解答提示	(63)
5. 三垂线定理及其应用	(68)
双基提炼	(68)
好题导航	(69)
拓展提高	(81)
解答提示	(85)
6. 两个平面平行的判定和性质	(93)
双基提炼	(93)
好题导航	(95)
拓展提高	(101)
解答提示	(103)
7. 两个平面垂直的判定和性质	(107)
双基提炼	(107)
好题导航	(109)
拓展提高	(118)



(845)	解答提示	(122)
(863)	8. 二面角及其平面角	(128)
(882)	双基提炼	(128)
(883)	好题导航	(132)
(884)	拓展提高	(143)
(120)	解答提示	(147)
(133)	9. 平面图形的翻折和拼接	(157)
(1005)	双基提炼	(157)
(1006)	好题导航	(157)
(1007)	拓展提高	(172)
(1008)	解答提示	(177)
(110)	第二章 多面体和旋转体	(189)
(108)	10. 棱柱(一)	(189)
(109)	双基提炼	(189)
(110)	好题导航	(190)
(111)	拓展提高	(211)
(112)	解答提示	(215)
(113)	11. 棱柱(二)	(226)
(114)	双基提炼	(226)
(115)	好题导航	(227)



(881)	拓展提高	(246)
(881)	解答提示	(250)
(881)	12. 棱锥	(258)
(881)	双基提炼	(258)
(881)	好题导航	(260)
(881)	拓展提高	(281)
(881)	解答提示	(285)
(881)	13. 多面体的体积	(300)
(881)	双基提炼	(300)
(881)	好题导航	(300)
(881)	拓展提高	(313)
(881)	解答提示	(317)
(881)	14. 球和球的体积	(326)
(881)	双基提炼	(326)
(881)	好题导航	(327)
(881)	拓展提高	(333)
(881)	解答提示	(335)
(881)	
(881)	
(881)	
(881)	



第一章 直线和平面

1 四大公理和空间直线

双基提炼

平面是几何中最基本的概念之一. 在数学中, 对这一类概念一般不加以定义而只进行描述.

平面是无限延展的. 因此, “延展平面 α ”与“延长直线 a ”的说法都是错误的.

我们通常把平面画成平行四边形或三角形.

四大公理

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

公理 2 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

公理 3 经过不在同一直线上的三点, 有且只有一个平面.

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面.

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.



四大公理，支撑着空间世界的骨架。

四大公理，立体几何的逻辑基础和推理依据。

异面直线的定义 不能同在一个平面内的两条直线是异面直线。那么，怎样判定两条直线是异面直线呢？

[方法一] 根据异面直线的定义。

[方法二] (异面直线的判定定理) 过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线。

[方法三] 反证法。

反证法

反证法是一种十分重要的证明方法，它在立体几何的证明中有着广泛的应用，熟练地运用反证法是学习立体几何的必备基础之一。

如何用反证法证题呢？它的一般步骤为：

- (1) 反设：即作出与命题结论相反的假设；
- (2) 归谬：由所作的假设出发，通过正确的推理，导出矛盾；
- (3) 判断：断定产生矛盾的原因在于所作的假设是错误的，因此证得原来命题结论的正确性。

反证法不同于由因导果的综合法和执果索因的分析法。它是一种间接证法，由于它的主要特征是“导出矛盾”，因此又叫“归谬法”。

在进行反设时，要注意与原结论相反的方面是只有一种情形还是有若干种情形。如果只有一种情形，那么只需就这种情形去导出矛盾；如果有若干种情形，那么必须针对每一种情形分别去导出矛盾，后者又称为“穷举归谬法”。

怎样才算归结到谬误，导出矛盾呢？一般地说，从所作的假设出发，导出的结果符合下列条件之一者就是“归谬”：

- (1) 与已知条件相矛盾；
- (2) 与已知公理、定理相矛盾；
- (3) 与已知定义相矛盾；



- (4) 与所作的假设相矛盾；
 (5) 导出了两个互相矛盾的结果。

在归谬的过程中应当注意：推理过程必须是完全正确的。因为错误的推理导出的矛盾并不能由此断言假设的不正确。另外必须重视题设中已知条件的使用，没有使用已知条件要导出矛盾的结果是不可能的。

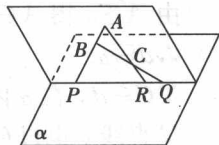
好题导航

为了打好扎实的基础，我们从简单的例题开始，而正是在对这些简单问题的解答证明中，我们才认识到了立体几何它那独特的思维方式和书写要求。

1.1 (1) 不重合的三条直线相交于一点，最多能确定_____个平面；若相交于两点，最多能确定_____个平面。

(2) 直线与平面相交，证明交点只有一个。

(3) 如图所示， $\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三边所在的直线分别交平面 α 于 P 、 Q 、 R ，求证： P 、 Q 、 R 三点共线。



[解析] (1) 注意题设中“最多”两个字。

公理 3 的推论 2 告诉我们，经过两条相交直线有且只有一个平面。那么不重合的三条直线相交于一点，最多能确定的平面当然是三个！

若三条直线相交于两点，则最多能确定两个平面。

此时，其中必有两条是异面直线。

联想类比

三条互相平行的直线能确定_____个平面。

答：一个或三个。

(2) 一条直线与平面相交，交点只有一个，这是众所周知的事实，但是，怎样证明呢？

假设交点不只一个，至少有两个，那么直线在平面内(公理 1)，与



直线和平面相交矛盾.

简洁、明快、心服口服.

这就是反证法的特殊魅力.

而公理是推证的最有力的依据.

(3) 如上图所示, 由题设条件知, P 、 Q 、 R 三点既在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, 又在平面 α 内, 所以它们共线(公理 2).

证完了? 的确证完了呀!

公理, 研究空间图形和性质的基础; 公理, 以铁一般无可辩驳的事实揭示了宇宙间的真理.

前三个公理是平面的基本性质, 公理 4 是平几中平行公理在三维空间的推广.

1.2 已知三条平行线 a 、 b 、 c 都与直线 d 相交, 求证它们共面.

思路一 由已知条件构造一个平面, 然后证明其它元素都在该平面内.

[证法一] 由 $a \parallel b$ 知 a 、 b 确定一个平面, 设为 α ,

由 $A \in a$ 得 $A \in \alpha$, 由 $B \in b$ 得 $B \in \alpha$,

$\therefore d \not\subseteq \alpha$.

$\therefore C \in d$, 在 α 内过点 C 作 $c' \parallel a$,

\therefore 直线 c 也过 C , 且 $c \parallel a$,

\therefore 直线 c' 与直线 c 重合(过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行).

$\therefore a$ 、 b 、 c 、 d 都在同一平面内.

思路二 构造两个平面, 使这四条直线分别在这两个平面内, 然后证明这两个平面重合.

[证法二] $\because a \parallel b$, 故 a 、 b 确定平面 α .

又 $b \parallel c$, 故 b 、 c 确定平面 β .

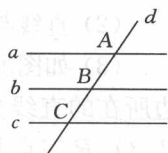
而 $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$,

$\therefore d \not\subseteq \alpha$, $d \not\subseteq \beta$,

\therefore 存在两条相交直线 b 、 d 既在 α 内又在 β 内.

$\therefore \alpha$ 与 β 重合.

1.3 若一个水平放置的平面图形的斜二侧直观图是一个底角为





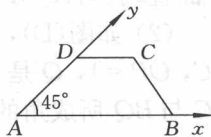
45° , 腰和上底长均为 1 的等腰梯形, 则平面图形的面积是 ()

- (A) $2+\sqrt{2}$ (B) $1+\sqrt{2}$ (C) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

[解析] 这个水平放置的平面图形上底为 1, 下底为 $1+\sqrt{2}$, 高 2. 又平面图形为直角梯形,

$$\therefore \text{面积 } S = \frac{1}{2} [1 + (1 + \sqrt{2})] \cdot 2 = 2 + \sqrt{2},$$

选(A).

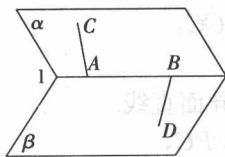


我们不仅要能够熟练地画出一个立体图形的

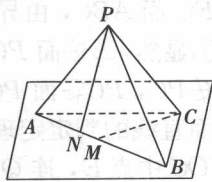
直观图, 而且还要熟悉斜二测直观图所反映的实体的几何本质.

1.4 (1) 如图(A)所示, 已知 $\alpha \cap \beta = l$, $A \in l$, $B \in l$ (A 、 B 不重合), 过 A 在平面 α 内作直线 AC , 过 B 在平面 β 内作直线 BD , 求证: AC 和 BD 是异面直线.

(2) 如图(B)所示, 点 $P \notin$ 平面 ABC , $PA \neq PB$, CM 是 AB 边上的中线, $PN \perp AB$, 求证: CM 和 PN 是异面直线.



图(A)



图(B)

[证明] (1) (直接法, 应用判定定理)

如图(A)所示, 明显地, $C \notin \beta$, 否则 $AC \subset \beta$, 与 $AC \subset \alpha$ 矛盾. 又 A 、 B 不重合, $A \in \beta$, $B \in \beta$, $BD \subset \beta$, 因此 AC 与 BD 是异面直线.

(2) [证明] (反证法) 设 CM 和 PN 共面, 分两种情况:

①若 M 、 N 重合, 可得 $AN = BN$,

$\therefore PN$ 是线段 AB 的中垂线, 就有 $PA = PB$, 与已知条件矛盾.

②若 M 、 N 不重合, 由于 CM 和 PN 共面, 就有 PC 与 MN 共面.

$\therefore P \in$ 平面 ABC , 与已知矛盾,

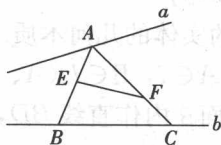
则 CM 和 PN 是异面直线.

反证法是一种间接证明的方法. 法国数学家丁·阿达玛曾经说过:



“这种方法在于表明：若肯定定理的假设，而否定其结论，就会导致矛盾。”多么精辟的概括。

1.5 (1) 已知 a, b 为异面直线，点 $A \in a$ ，点 $B, C \in b$ ， E, F 分别为线段 AB, AC 上除端点外的任一点，求证：直线 EF 与直线 a 为异面直线(图(C))。



图(C)

【解析】(1) 如图(C)所示，直线 a 不在 ABC 所确定的平面内，否则与 a, b 异面矛盾。

而 $EF \subset \text{面 } ABC$ ，由异面直线的定义知直线 EF 和 a 为异面直线。

(2) ①显然， $B \notin \text{面 } POC$ ，而 $Q \in \text{面 } POC$ ，

又 $Q \notin PC$ ， $PC \subset \text{面 } POC$ ，

由异面直线的判定定理知 PC, BQ 是异面直线。

②取 OC 中点 E ，连 QE, EB ，则 $QE \parallel PC$ ，

异面直线 PC 与 BQ 所成角即为 QE 与 BQ 所成的角。

在 $\triangle BEQ$ 中，由余弦定理：

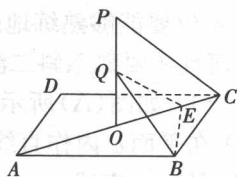
$$\cos \angle BQE = \frac{QB^2 + QE^2 - BE^2}{2QB \cdot QE} = \dots = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \text{异面直线 } PC \text{ 与 } BQ \text{ 所成角为 } \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

联想类比

关于异面直线

1. 已知 a, b 为异面直线，它们分别在平面 α, β 内，若 $\alpha \cap \beta = l$ ，则 l ()



图(D)



- (A) 分别与 a, b 相交 (B) 至少与 a, b 中之一相交
 (C) 与 a, b 都不相交 (D) 至多与 a, b 中之一相交

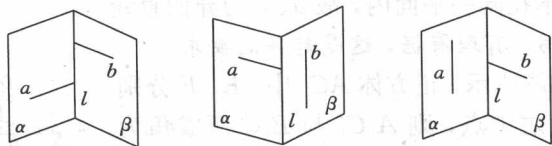
【解析】 设 l 与 a, b 都不相交，

$\therefore a, l \not\subseteq \alpha$ ，且 a 与 l 不相交，故 $a // l$ ，

同理 $b // l$ ，由公理 4， $a // b$ ，与题设矛盾。

从而 a, b 中至少有一条与 l 相交，如下图。

选(B)。



2. 给出下列命题：

- ①与两条异面直线中的一条异面的直线与另一条也异面；
- ②平面内一点与平面外一点的连线和平面内的直线是异面直线；
- ③空间两条直线不相交，则它们异面；
- ④和两条异面直线都垂直的直线是异面直线的公垂线。

其中正确命题的个数是 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【提示】 ①错. 与两条异面直线中的一条异面的直线与另一条可以平行或相交。

②错. 异面直线的判定定理：平面内一点与平面外一点的连线和平面内不经过这点的直线是异面直线。

③错. 空间两直线不相交，可以平行。

④错. 异面直线的公垂线必须垂直相交。

疏忽、遗漏、粗枝大叶，这样的错误最常见。

选(A)。

3. 求证：平行于异面直线中的一条而不与另一条相交的直线必与另一条是异面直线。

【解析】 这个问题读起来有点费劲，多读几遍，先把已知和求证弄明白。



已知：如图所示， a 、 b 为异面直线，直线 $c \parallel b$ ， c 与 a 不相交。

求证： a 与 c 是异面直线。

【证明】 假设 a 、 c 在同一平面 α 内，明显 a 、 c 不重合。

①若 $a \parallel c$ ，则由 $b \parallel c$ 知 $a \parallel b$ ，与题设矛盾；

②若 a 、 c 相交，直接与题设矛盾，

$\therefore a$ 、 c 不在同一平面内，故 a 、 c 为异面直线。

严格书写，有理有据，这是起码的要求。

1.6 如图所示，正方体 AC_1 中， E 、 F 分别是 AB 、 BB_1 之中点，则 A_1C_1 与 B_1C 所成角为 _____； A_1E 与 C_1F 所成角是 _____。

【解析】 B_1C 与 A_1D 平行， $\triangle A_1DC_1$ 为等边三角形，因此 A_1C_1 与 B_1C 所成角为 60° 。

取 A_1B_1 中点 G ， GB_1 中点 H ，连 GB 、 HF 、 C_1H ，则 $A_1E \parallel GB \parallel HF$ 。

$\angle HFC_1$ 即为 A_1E 与 C_1F 所成的角。

设正方体棱长为 1，可知 $HF = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ， $FC_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ， $HC_1 = \frac{\sqrt{17}}{4}$ 。

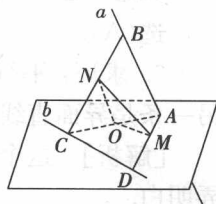
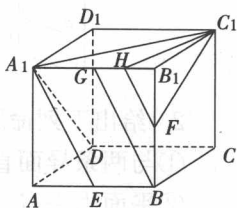
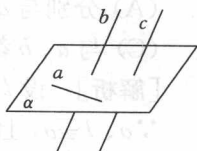
由余弦定理， $\cos \angle HFC_1 = \frac{2}{5}$ ，

故 A_1E 与 C_1F 所成角为 $\arccos \frac{2}{5}$ 。

注 把两条异面直线中的一条平移到另一条所在的平面中来，在同一平面中求相交直线所成的角。这种平移法是求异面直线所成角的常规方法。

1.7 已知 a 、 b 是异面直线， a 上两点 A 、 B 的距离是 8， b 上两点 C 、 D 的距离为 6， AD 、 BC 的中点分别为 M 、 N ，且 $MN=5$ ，求 a 、 b 所成的角。

【解】 如图所示，连 AC ，取 AC 中点 O ，连 OM 、 ON ，





则 OM 平行且等于 $\frac{1}{2}CD$,

ON 平行且等于 $\frac{1}{2}AB$,

因此 $\angle MON$ 为异面直线 a 、 b 所成的角.

$\triangle OMN$ 中, $OM=3$, $ON=4$, $MN=5$, 则 $\angle MON=90^\circ$.

\therefore 异面直线 a 、 b 所成的角为 90° .

注 将两条异面直线分别平移到同一平面中来, 是有较大的困难的. 但在分析题意的过程中, 充分注意到 M 、 N 为 AD 与 BC 的中点, 构造三角形 MON 也就觉得思路十分自然了.

联想类比

异面直线所成的角(一)

1. 已知 AB 、 CD 为异面直线, 且 $AB=CD=3$, E 、 F 分别是 AD 、 BC 上的点, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = 2$, $EF = \sqrt{7}$, 则 AB 与 CD 所成的角是 ()

- (A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120°

[解析] 如图所示, 连 BD , 在 BD 上取点 G , 使 $\frac{BG}{GD} = 2$,

连 EG 、 FG ,

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = 2,$$

$$\therefore EG \parallel AB, FG \parallel CD,$$

$$\therefore EG = 1, FG = 2, \text{ 又 } EF = \sqrt{7},$$

$$\therefore \triangle EFG \text{ 中, } \cos \angle EGF = \frac{4+1-7}{2 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

\therefore 异面直线 AB 、 CD 所成角为 60° .

注 当求到 $\cos \angle EGF = -\frac{1}{2}$ 时, 切莫轻率地下结论 $\angle EGF = 120^\circ$, 不要忘了异面直线所成角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$.

深刻理解定义, 注意每一个字或词.

