

高等学校教学用书

彈性理論

A. M. 卡茲編著



机械工业出版社

高等学校教学用书

彈性理論

A. M. 卡茲編著

王知民譯



机械工业出版社

1959

內容簡介

本書系根据苏联技术理論書籍出版社 1956 年出版的 A. M. Кац 著“彈性理論”(Теория упругости) 譯出。原書經苏联高等教育部批准作为高等工业学校教科書。

本書对有关机械制造專業所常遇到的問題：如各种形状的杆件的扭轉問題、接触問題、热应力問題、薄板及壳体的应力分析等都有較詳細的叙述，并在有关各章中例举了許多結合机械制造專業的实例。

本書叙述簡要而內容完備，可供我国高等院校机械制造各專業作为教材，也可供从事机械制造的工程技術人員閱讀。

苏联 A. M. Кац 著“Теория упругости”(Государственное издательство технико-теоретической литературы 1956 年第一版)

*

*

*

NO. 3091

1959 年 12 月第一版 1959 年 12 月第一版第一次印刷

787×1092¹/₂₅ 字数 167 千字 印張 7¹⁷/₂₅ 0,001— 3,800 册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第 008 号 定价(10) 0.94 元

目 录

編者序	6
作者序	7
引言	9
第一章 应力	11
§ 1. 基本概念	11
§ 2. 作用在同一点內各不同方向的面积上的应力間的关系	13
§ 3. 座标軸旋轉时应力張量分量的計算	15
§ 4. 主应力	17
§ 5. 主应力的某些性質	20
§ 6. 平衡微分方程	23
§ 7. 圓柱座标中的平衡微分方程	24
第二章 变形	27
§ 8. 基本概念	27
§ 9. 座标軸旋轉时变形張量分量的計算	29
§ 10. 主伸長	30
§ 11. 連續条件	33
§ 12. 按变形計算位移	34
§ 13. 圓柱座标中的变形表达式	38
第三章 应力与变形間的关系	41
§ 14. 变形位能	41
§ 15. 广义虎克定律	43
§ 16. 各向同性体的虎克定律	45
第四章 彈性理論的普遍方程	49
§ 17. 彈性理論的全部基本方程組。唯一性	49
§ 18. 解彈性理論的位移問題	51
§ 19. 解彈性理論的应力問題	53
§ 20. 有关彈性理論普遍方程的几点說明	56
第五章 彈性理論問題的提出与解法	58

§ 21. 彈性理論問題的提出	58
§ 22. 彈性理論問題的近似解法	60
§ 23. 彈性理論的實驗方法	61
第六章 最簡單的軸對稱問題	69
§ 24. 厚壁管	69
§ 25. 旋轉圓盤	72
第七章 薄板的彎曲	77
§ 26. 問題的提出	77
§ 27. 對稱載荷圓板彎曲的微分方程	78
§ 28. 對稱載荷圓板彎曲微分方程的解	82
§ 29. 等厚板彎曲的普遍微分方程	87
§ 30. 矩形板的邊界條件	90
§ 31. 矩形板彎曲的若干情況	93
§ 32. 彎曲板的位能	97
第八章 對稱載荷圓柱壳體的彎曲	99
§ 33. 問題的提出	99
§ 34. 對稱載荷圓柱壳體的彎曲方程	100
§ 35. 沿邊緣載荷的半無限壳体	106
§ 36. 帶加強環的無限壳体	110
§ 37. 均布扭矩環的變形	112
第九章 杆的扭轉	115
§ 38. 問題的提出	115
§ 39. 扭轉應力函數的某些性質	119
§ 40. 薄膜比拟	122
§ 41. 橢圓斷面杆	124
§ 42. 帶半圓槽的圓杆	126
§ 43. 矩形斷面杆	128
§ 44. 薄壁杆件的扭轉	132
§ 45. 關於更複雜的扭轉情況的概念	137
第十章 平面問題	139
§ 46. 問題的提出	139
§ 47. 平面變形狀態的普遍方程	141

§ 48. 平面应力状态的普遍方程	144
§ 49. 应力函数的某些性質	147
§ 50. 平面問題的极坐标方程	151
§ 51. 悬臂梁的弯曲	153
§ 52. 曲杆的純弯曲	155
§ 53. 尖端承受集中力的楔体	157
§ 54. 帶小圓孔板的拉伸 (克尔希問題)	160
第十一章 接触問題	165
§ 55. 問題的提出	165
§ 56. 承受垂直于边界的集中力的彈性半平面 (弗萊蒙問題)	165
§ 57. 軸綫平行的二接触圓柱体	168
§ 58. 承受垂直于边界的集中力的彈性半空間 (波西涅斯克問題)	172
§ 59. 两接触球体	176
第十二章 热应力	180
§ 60. 基本方程	180
§ 61. 溫度軸对称分布的圓板	181
§ 62. 溫度沿徑向有落差的圓板	185
§ 63. 溫度沿徑向有落差的厚壁管	187
§ 64. 溫度沿半徑和軸綫有落差的薄圓管	189

編 者 序

已故的 A. M. 卡茨教授多年来在列宁格勒加里宁工业学院講授彈性理論課程的講稿，以后曾在該校出版供內部应用，但印数不多(500册)。該書叙述簡要而內容完整，可供高等院校机械制造各專业作为主要教材。

在編訂 A. M. 卡茨写的这本书时，我們力求保持作者原有的風格；所作的变动，仅限于某些內容的补充，例如，稍为扩充了張量的概念；加入了关于双調和函数定义的說明；在第八章中研究了軸向力对壳体应力状态的影响；增加了§42，在此节中說明了关于帶半圓形槽孔的圓軸扭轉問題；在§58中相当詳細地研究了波西涅斯克問題。

上述的內容补充是为了使書中所叙述的材料更臻完备。我們希望达到这一目的，并且对所作的全部变动承担責任。

B. 普罗柯波夫

作者序

作者在 1947~1951 年間曾數次在列寧格勒加里寧工業學院動力機製造系和機器製造系中講授彈性理論課程，所講的內容經重新改寫并略加補充，即成本書。

本書的讀者應具有普通工程數學的修養。書中包括必需的普遍方程和彈性理論方法（第一~五章）的知識，和一系列特殊問題的解法（第七~十二章），這些解法都是一般原理的例證，同時，對機器製造人員也是有實際意義的。

本書并沒包含新的研究成果，但是，許多公式的推導與一般文獻中所遇到的比較起來是經過修改的，修改的目的是使敘述盡量簡單而清楚。

作者對動力學及機器強度教研組的全體同志和教研組主任 A. И. 盧里葉教授，在本書出版時所作的幫助和寶貴的指示表示謝忱。

春

春風吹綠柳，燕子剪輕盈。
大地生機發，萬物競欣榮。
桃李爭芳艷，鶯鶯啼曉晴。
兒童追蝶舞，牧笛響村東。
布穀催耕急，農家喜意濃。
辛勤耕耘處，金穀滿田塍。
綠陰成後，正是納涼時。
避暑山房內，清涼勝舊時。
松風搖翠蓋，竹露滴清池。
麝香熏綉幃，冰簟展涼席。
呼童烹紫蟹，洗盥趁涼時。
正是江南好，風景最宜詩。

引 言

变形固体力学由两部分組成：

a) 物理部分，是用实验方法研究固体的机械性质：强度，弹性，塑性，疲劳等；

b) 数学部分，是根据一般力学定律和经过实验所建立的应力与变形间的关系，以数学方法去研究各种形状的固体在各种外载荷作用下的应力状态与变形状态。

关于变形固体学说的物理学部分的原理和在实践中最常遇到的而能用初等方法解决的简单问题，都包含在材料力学教程中。

关于变形固体学说的数学部分分为弹性理论与塑性理论。

在弹性理论中所研究的是理想弹性体，即其变形是应力的单值函数，并且，在外载荷取消后变形即行消失的物体。反之，在塑性理论中，所研究的物体，在足够大的应力作用下引起载荷取消后也不消失的残余变形。

弹性理论是一门目的在于确定外力作用时理想弹性体中的内力及各部分的相对位移的科学。实际上，所有物体多少总具有一些塑性，亦即，具有在载荷取消后保留一部分变形的性质。真实物体的这种特性与在载荷作用下所达到的最大应力的数值、温度及材料的其他工作条件有关。

工程中所采用的主要材料（金属，合金等），在常温下及当应力不超过弹性极限时，可以十分正确地当作理想弹性体。

在弹性理论课程中通常包括连续介质的应力状态和变形状态一般性质的研究和那些要求以较材料力学课程中更严格更复杂的数学方法来解决的特殊问题。这两门课程的界限在很大程度上是由人们规定的：通常属于弹性理论的结构元件的某些计算方法（薄板的弯曲理论，旋转圆盘的应力计算，细长杆件理论等），有时包括在材料力学中。

1638年，伽利略首先研究了关于梁的弯曲问题。但是材料力学学

說仅在建立了彈性物体的变形与載荷成比例的虎克定律(1660年)后,才得到了稳固的基础。到十九世紀初,这一学說的发展在于解釋个别問題,主要是杆的弯曲問題。彈性理論的普遍方程是由納維埃和哥西導出的(1821~1822年)。在这些方程的基础上,聖維南得出了棱柱杆的扭轉理論(1855年)及更加精确的弯曲理論。此后,各国的許多学者也都参加了彈性理論的研究工作。

第一章 应力

§1 基本概念

现在研究在外力作用下，处于平衡的任意形状的物体。

外力可以加在物体的表面——表面力（如，与此物体相接触的气体、液体或固体的压力），或者加在物体的所有单元上——体积力（重力、离心力）。

用加在单位面积上的载荷的大小与方向来表示表面力，而以单位体积上的载荷的大小与方向来表示体积力。

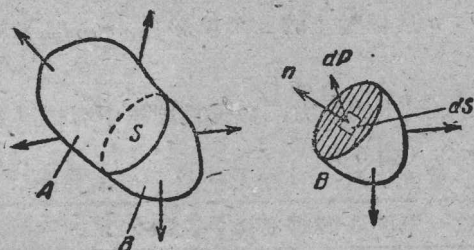


圖 1

我們設想以任意表面 S 將所研究的物体剖为 A 与 B 两部分(圖1)。一部分对另一部分的作用，例如， A 部分对 B 部分的作用，是在 S 面上作用着一些力，这些力对整个物体来講是內力。

在这些內力与外力的作用下，物体的各部分是处于平衡的。

一般說来，內力在断面上不是均匀分布的。若在單元面积 dS 上作用着力 dP ，則其比

$$p_n = \frac{dP}{dS} \quad (1.1)$$

称为在面积 dS 上的应力向量。脚注 n 表示面积 dS 的外向法綫的方向为 n 。

例如，假設横断面为 S_0 的長杆，由加在杆端的两个 P 力拉伸着(圖2)，則在离开杆端足够远并与長杆軸綫垂直的断面中，單元面积上的应力向量等于

$$p_y = \frac{dP}{dS} = \frac{P}{S_0}, \quad (1.2)$$

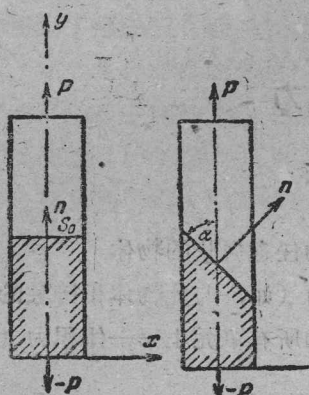


圖 2

圖 3

因为在这种情况下，力是沿断面均匀分布的。

p 的脚注 y 表示所研究的断面的法线方向 n 与 y 轴的正方向重合。

假如在这同一杆内作一与轴夹 α 角的断面 (圖 3)，则此断面面积等于 $\frac{S_0}{\sin \alpha}$ ，而其任一单元面积上的应力等于

$$p_n = \frac{F \sin \alpha}{S_0} \quad (1.3)$$

在这个例子中，我们看到，一般来讲应力不仅仅决定于物体内部单元面积 dS 的中心位置，而且还决定于此面积的方向。

向量 p_n 可以用它在 x, y, z 座标轴上的三个投影 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 来表示 (圖 4)。

作用在与各座标轴垂直的面积上的应力，在弹性理论中有极其重要的意义。这些应力可以表示为 (圖 5)：

外向法线的方向	向 量	投 影		
		在 x 轴上	在 y 轴上	在 z 轴上
x	p_x	p_{xx}	p_{xy}	p_{xz}
y	p_y	p_{yx}	p_{yy}	p_{yz}
z	p_z	p_{zx}	p_{zy}	p_{zz}

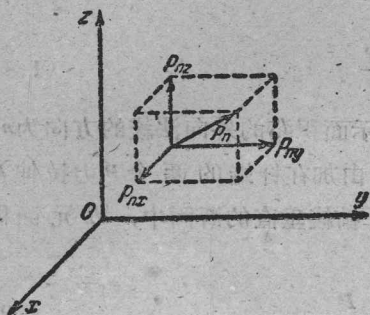


圖 4

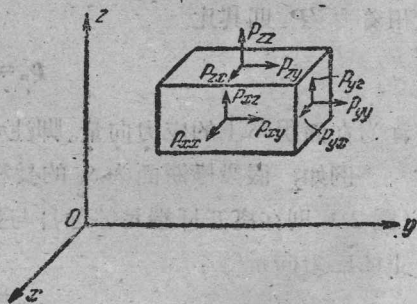


圖 5

这里 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 是垂直应力，因为它们垂直于相应的面积；以后将用符号 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 来表示它们。其余的分量位于相应面积的平面内，是剪应力，我们以后用符号 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ 来表示它们。

必须指出，正的垂直应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 表示拉伸，而负的表示压缩。剪应力的符号与坐标轴方向的选择有关。

现在来研究某一具有外向法线 n 的任意面，其外向法线指向物体的 A 部分这一边（图 6）；应力 p_n 表示经面积 dS 传递的 A 对 B 的作用。经同一面积传递的 B 对 A 的作用有相同的大小，但方向相反。因此

$$p_{-n} = -p_n. \quad (1.4)$$

例如，若所研究的面积的外向法线的方向平行于负 x 轴，则在此面积上的应力向量是：

$$p_{-x} = -p_x \quad (1.5)$$

这向量在各坐标轴上的投影等于 $-\sigma_x, -\tau_{xy}$ 与 $-\tau_{xz}$ 。

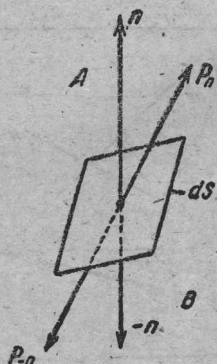


图 6

因此，只要外向法线与 x 轴方向重合，则 yOz 坐标平面上的，正的应力向量分量就与坐标轴的方向相一致；同样可以确定 xOz 与 xOy 坐标平面上的应力向量分量。

同样，若面积的外向法线与坐标轴的方向相反，则此面积上正的应力向量分量就与坐标轴相反的方向相一致。

§2 作用在同一点内各不同方向的面积上的应力间的关系

现在研究单元（无穷小的）四面体（图 7），这四面体的三个面与坐标平面平行，而第四个面的法线 n 与坐标轴成 $(n, x), (n, y)$ 和 (n, z) 角。四面体平行于坐标轴的棱边长用 dx, dy 和 dz 来表示。

作用在四面体各面上的应力及这些面的面积示于下表。

在四面体各面上作用的力等于应力与相应面积的乘积。所有这些力都是 dx, dy, dz 的二阶微量，而且可以认为它们是作用于相应面的重心上。

面的名称	外向法綫 的 方 向	面 积	应 力 的 投 影		
			在 x 軸上	在 y 軸上	在 z 軸上
yOz	$-x$	$\frac{1}{2} dydz$	$-\sigma_x$	$-\tau_{xy}$	$-\tau_{xz}$
xOz	$-y$	$\frac{1}{2} dzdx$	$-\tau_{yx}$	$-\sigma_y$	$-\tau_{yz}$
xOy	$-z$	$\frac{1}{2} dxdy$	$-\tau_{zx}$	$-\tau_{zy}$	$-\sigma_z$
傾斜面	n	dS	p_{nx}	p_{ny}	p_{nz}

此外,四面体上还作用着体积力,其投影为: $K_x dV$, $K_y dV$, $K_z dV$; 这里 $dV = \frac{1}{6} dxdydz$ 是四面体的体积。这些力是 dx, dy, dz 的三阶微量,因此,与前者相比,这些力可以忽略不計。

现在来建立作用于四面体上各力在 x 軸上投影的平衡方程。

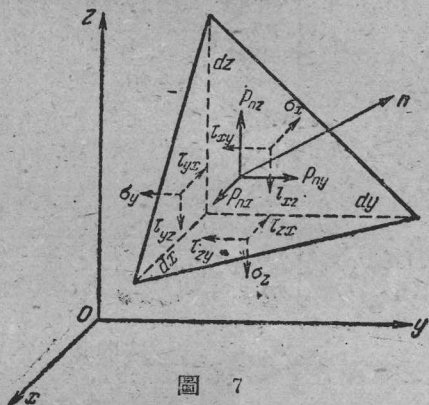


圖 7

$$-\sigma_x \frac{1}{2} dydz - \tau_{yx} \frac{1}{2} dzdx - \tau_{zx} \frac{1}{2} dxdy + p_{nx} dS = 0. \quad (2.1)$$

然而根据平面圖形面积投影的理論

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} dydz &= dS \cos(n, x), \\ \frac{1}{2} dzdx &= dS \cos(n, y), \\ \frac{1}{2} dxdy &= dS \cos(n, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

运用这些等式,就得到下列三个公式(第二与第三个公式是由各力在 y 与 z 軸上投影的平衡方程导出的):

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z), \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z), \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

因此,作用在任一傾斜面上的应力向量分量,可以用作用在与座标軸垂直的三个面上的应力向量分量来表示。这些公式是由哥西导出来的。

現在我們来建立四面体其余的三个平衡方程——力矩方程。

最方便的是取对通过傾斜面重心 C 并与座标軸平行的直綫的力

矩。圖 8 中繪出了其中一根与 z 軸平行的直線 z' 。点 C 至四面体各垂直及水平面的距离各为 $\frac{1}{3}dx$, $\frac{1}{3}dy$ 与 $\frac{1}{3}dz$ 。因而, 点 C 在这些面上的投影与这些面的重心重合。所以作用在四面体各面上的全部 12 个分力, 除二个应力 τ_{yx} 和 τ_{xy} 以外, 要不是平行 z' 軸, 就是通过 z' 軸。

对直線 z' 的力矩方程有下列形式:

$$\tau_{xy} \frac{1}{2} dy dz \frac{dx}{3} - \tau_{yx} \frac{1}{2} dx dz \frac{dy}{3} = 0, \quad (2.4)$$

由此得到下列三个等式中的第一个等式 (其余两个可以类似地导出):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

这些等式表示出剪应力的相关定律。

公式 2.3 和 2.5 指出連續体一定点的应力状态完全决定于 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ 和 τ_{zx} 六个量。这些量称为应力張量分量。

若无穷小四面体的傾斜面与所研究的連續体的單元表面相重

合, 则应力向量的投影 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 就等于單位表面上外载荷的投影 F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} 。所以在物体的表面上有下列等式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) &= F_{nx} \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) &= F_{ny} \\ \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) &= F_{nz} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中 n 是表面的外向法綫。

§3 座标軸旋轉时应力張量分量的計算

命 1, 2, 3 是由負荷物体的 O 点引出的笛卡尔直角坐标系的軸。使座标系統繞 O 点旋轉, 使新座标軸得到 $1', 2', 3'$ 位置 (圖 9)。

現在以原座标系 1, 2, 3 中的这个張量的分量来表示新座标系 $1', 2', 3'$ 中的应力張量分量。

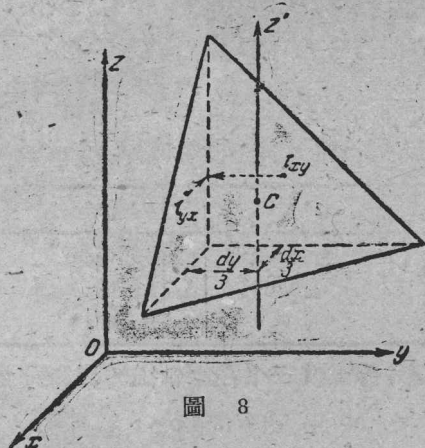


圖 8

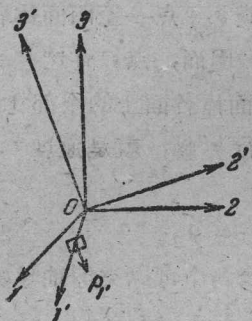


圖 9

新旧軸間的夹角余弦列表如下，其中 $\alpha_{im} = \cos(i, m')$ 表示原軸 i 与新軸 m' 間的夹角余弦。

現在来研究垂直于新座标軸 m' (这里 $m' = 1', 2'$ 或 $3'$) 的无穷小面积。

作用在这面积上的应力向量 $p_{m'}$ 在原軸上的投影用公式 2.3 来表示：

$$p_{m'1} = p_{11}\alpha_{1m} + p_{21}\alpha_{2m} + p_{31}\alpha_{3m} \quad (3.1)$$

并类似地可得 $p_{m'2}$ 和 $p_{m'3}$ ；或普遍形式：

$$p_{m'k} = \sum_{i=1}^3 p_{ik}\alpha_{im} \quad (3.2)$$

	1'	2'	3'
1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

向量 $p_{m'}$ 在任一新軸 n' 上的投影，等于其三个在原軸上的应力分量在这軸上的投影之和，

$$p_{m'n'} = p_{m'1}\alpha_{1n} + p_{m'2}\alpha_{2n} + p_{m'3}\alpha_{3n} = \sum_{k=1}^3 p_{m'k}\alpha_{kn} \quad (3.3)$$

将 3.2 代入 3.3，就求出了要求的轉移到新座标軸的应力張量分量的变换公式：

$$p_{m'n'} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ik}\alpha_{im}\alpha_{kn} \quad (3.4)$$

回想到 $p_{ik} = \tau_{ik}$ 和 $p_{ii} = \sigma_i$ ，我們写出此式的展开式：

$$\begin{aligned} \sigma_{1'} &= p_{1'1'} = \sigma_1\alpha_{11}^2 + \sigma_2\alpha_{21}^2 + \sigma_3\alpha_{31}^2 + 2\tau_{12}\alpha_{11}\alpha_{21} + 2\tau_{23}\alpha_{21}\alpha_{31} + 2\tau_{31}\alpha_{31}\alpha_{11}, \\ \tau_{1'2'} &= \sigma_1\alpha_{11}\alpha_{12} + \sigma_2\alpha_{21}\alpha_{22} + \sigma_3\alpha_{31}\alpha_{32} + \tau_{12}(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}) + \tau_{23}(\alpha_{21}\alpha_{32} \\ &\quad + \alpha_{31}\alpha_{22}) + \tau_{31}(\alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{11}\alpha_{32}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

并可相似地得出其余四个分量。

公式 3.4 是二級張量的定义。实际上，当座标系像座标的逐对的