高等学校教学用書

彈性理論

A. M. 卡兹 編著

机械工业出版社

高等学校教学用書

彈性理論

A. M. 卡茲編著
王知民譯

机械工业出版社

1959

內容簡介

本書系根据苏联技术理論書籍出版社 1956 年出版的A. M. Кац 著“彈性理論”(Теория упругости) 譯出。原書經苏联高等教育部批准作为高等工业学校教科書。

本書对有关机械制造專业所常遇到的問題：如各种形状的杆件的扭轉問題、接触問題、热应力問題、薄板及壳体的应力分析等都有較詳細的叙述，并在有关各章中例举了許多結合机械制造專业的实例。

本書叙述簡要而內容完备，可供我国高等院校机械制造各專业作为教材，也可供从事机械制造的工程技术人員閱讀。

苏联 A. M. Кац 著 ‘Теория упругости’(Государственное издательство технико-теоретической литературы 1956 年第一版)

*　　*　　*

NO. 3091

1959 年 12 月第一版　1959 年 12 月第一版第一次印刷

787×1092 1/25　字数 167 千字　印張 7 17/25　0,001— 3,600 册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第 008 号　定价(10) 0.94 元

目　录

編者序

已故的 A. M. 卡茨教授多年来在列宁格勒加里宁工业学院講授彈性理論課程的講稿，以后曾在該校出版供內部应用，但印数不多(500册)。該書叙述簡要而內容完整，可供高等院校机械制造各專业作为主要教材。

在編訂A. M. 卡茨写的这本書时，我們力求保持作者原有的風格；所作的变动，仅限于某些內容的补充，例如，稍为扩充了張量的概念；加入了关于双調和函数定义的說明；在第八章中研究了軸向力对壳体应力状态的影响；增加了§42，在此节中說明了关于带半圓形槽孔的圓軸扭轉問題；在§58中相当詳細地研究了波西涅斯克問題。

上述的內容补充是为了使書中所叙述的材料更臻完备。我們希望达到这一目的，并且对所作的全部变动承担責任。

B. 普罗柯波夫

作 者 序

作者在 1947～1951 年間曾数次在列宁格勒加里宁工业学院动力机制造系和机器制造系中講授彈性理論課程，所講的內容經重新改写并略加补充，即成本書。

本書的讀者应具有普通工程数学的修养。書中包括必需的普遍方程和彈性理論方法（第一～五章）的知識，和一系列特殊問題的解法（第七～十二章），这些解法都是一般原理的例証，同时，对机器制造人員也是有实际意义的。

本書并沒包含新的研究成果，但是，許多公式的推导与一般文献中所遇到的比較起来是經过修改的，修改的目的是使敘述尽量簡單而清楚。

作者对动力学及机器强度教研組的全体同志和教研組主任 A. И. 盧里叶教授，在本書出版时所作的帮助和宝貴的指示表示謝忱。

引　言

变形固体力学由两部分組成:

a）物理部分，是用实驗方法研究固体的机械性質：强度，彈性，塑性，疲劳等;

б）数学部分，是根据一般力学定律和經过实驗所建立的应力与变形間的关系，以数学方法去研究各种形状的固体在各种外載荷作用下的应力状态与变形状态。

关于变形固体学説的物理学部分的原理和在实踐中最常遇到的而能用初等方法解决的簡單問題，都包含在材料力学教程中。

关于变形固体学説的数学部分分为彈性理論与塑性理論。

在彈性理論中所研究的是理想彈性体，即其变形是应力的單値函数，并且，在外載荷取消后变形即行消失的物体。反之，在塑性理論中，所研究的物体，在足够大的应力作用下引起載荷取消后也不消失的殘余变形。

彈性理論是一門目的在于确定外力作用时理想彈性体中的內力及各部分的相对位移的科学。实际上，所有物体多少总具有一些塑性，亦即，具有在載荷取消后保留一部分变形的性質。眞实物体的这种特性与在載荷作用下所达到的最大应力的数値、溫度及材料的其他工作条件有关。

工程中所采用的主要材料（金屬，合金等），在常溫下及当应力不超过彈性極限时，可以十分正确地当作理想彈性体。

在彈性理論課程中通常包括連續介質的应力状态和变形状态一般性質的研究和那些要求以較材料力学課程中更严格更复杂的数学方法来解决的特殊問題。这两門課程的界限在頗大程度上是由人們規定的：通常屬于彈性理論的結构元件的某些計算方法（薄板的弯曲理論，旋轉圓盘的应力計算，細長杆件理論等），有时包括在材料力学中。

1638年，伽利略首先研究了关于梁的弯曲問題。但是材料力学学

說仅在建立了弹性物体的变形与載荷成比例的虎克定律（1660年）后，才得到了稳固的基础。到十九世紀初，这一学說的發展在于解釋个别問題，主要是杆的弯曲問題。弹性理論的普遍方程是由納維埃和哥西导出的（1821～1822年）。在这些方程的基础上，聖維南得出了棱柱杆的扭轉理論（1855年）及更加精确的弯曲理論。此后，各国的許多学者也都参加了弹性理論的研究工作。

第一章　应力

§1　基本概念

現在研究在外力作用下，处于平衡的任意形状的物体。

外力可以加在物体的表面——**表面力**（如，与此物体相接触的气体、液体或固体的压力），或者加在物体的所有單元上——**体积力**（重力、离心力）。

用加在單位面积上的载荷的大小与方向来表示表面力，而以單位体积上的载荷的大小与方向来表示体积力。

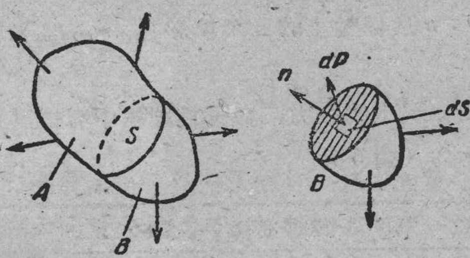

圖　1

我們設想以任意表面 S 将所研究的物体剖为 A 与 B 两部分(圖1)。一部分对另一部分的作用，例如，A 部分对 B 部分的作用，是在 S 面上作用着一些力，这些力对整个物体来講是內力。

在这些內力与外力的作用下，物体的各部分是处于平衡的。

一般說来，內力在断面上不是均匀分布的。若在單元面积 dS 上作用着力 dP，則其比

$$p_n = \frac{dP}{dS} \tag{1.1}$$

称为在面积 dS 上的**应力向量**。脚注 n 表示面积 dS 的外向法綫的方向为 n。

例如，假設横断面为 S_0 的長杆，由加在杆端的两个 P 力拉伸着（圖 2），則在离开杆端足够远并与長杆軸綫垂直的断面中，單元面积上的应力向量等于

$$p_y = \frac{dP}{dS} = \frac{P}{S_0}, \tag{1.2}$$

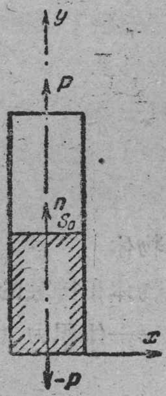

圖 2

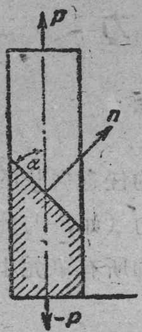

圖 3

因为在这种情况下，力是沿断面均匀分布的。

p 的脚注 y 表示所研究的断面的法綫方向 n 与 y 軸的正方向重合。

假如在这同一杆內作一与軸夹 α 角的断面（圖 3），則此断面面积等于 $\frac{S_0}{\sin\alpha}$，而其任一單元面积上的应力等于

$$p_n=\frac{F\sin\alpha}{S_0}。\qquad (1.3)$$

在这个例子中，我們看到，一般来講应力不仅仅决定于物体內部單元面积 dS 的中心位置，而且还决定于此面积的方向。

向量 p_n 可以用它在 x，y，z 座标軸上的三个投影 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 来表示(圖 4)。

作用在与各座标軸垂直的面积上的应力，在彈性理論中有極其重要的意义。这些应力可以表示为（圖 5）:

外向法綫的方向	向　量	投　　影		
		在 x 軸上	在 y 軸上	在 z 軸上
x	p_x	p_{xx}	p_{xy}	p_{xz}
y	p_y	p_{yx}	p_{yy}	p_{yz}
z	p_z	p_{zx}	p_{zy}	p_{zz}

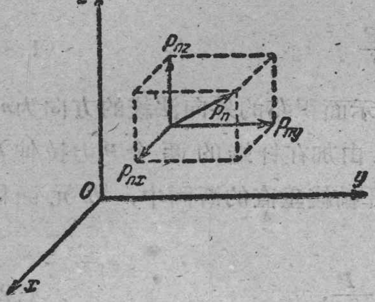

圖 4

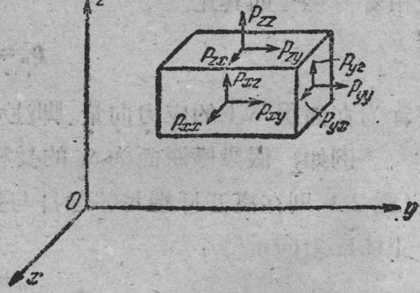

圖 5

这里 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 是垂直应力，因为它們垂直于相应的面积；以后将用符号 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 来表示它們。其余的分量位于相应面积的平面內，是剪应力，我們以后用符号 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ 来表示它們。

必須指出，正的垂直应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 表示拉伸，而負的表示压縮。剪应力的符号与座标軸方向的选擇有关。

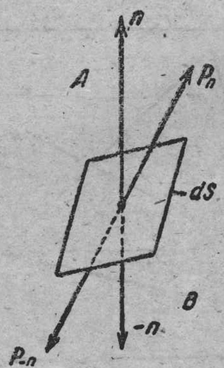

圖 6

現在来研究某一具有外向法綫 n 的任意面，其外向法綫指向物体的 A 部分这一边（圖 6）；应力 p_n 表示經面积 dS 傳遞的 A 对 B 的作用。經同一面积傳遞的 B 对 A 的作用有相同的大小，但方向相反。因此

$$p_{-n} = -p_n。\tag{1.4}$$

例如，若所研究的面积的外向法綫的方向平行于負 x 軸，則在此面积上的应力向量是:

$$p_{-x} = -p_x \tag{1.5}$$

这向量在各座标軸上的投影等于 $-\sigma_x$，$-\tau_{xy}$ 与 $-\tau_{xz}$。

因此，只要外向法綫与 x 軸方向重合，則 yOz 座标平面上的，正的应力向量分量就与座标軸的方向相一致；同样可以确定 xOz 与 xOy 座标平面上的应力向量分量。

同样，若面积的外向法綫与座标軸的方向相反，則此面积上正的应力向量分量就与座标軸相反的方向相一致。

§2 作用在同一点內各不同方向的面积上的应力間的关系

現在研究單元（无窮小的）四面体（圖 7），这四面体的三个面与座标平面平行，而第四个面的法綫 n 与座标軸成 (n, x)，(n, y) 和 (n, z) 角。四面体平行于座标軸的棱边長用 dx, dy 和 dz 来表示。

作用在四面体各面上的应力及这些面的面积示于下表。

在四面体各面上作用的力等于应力与相应面积的乘积。所有这些力都是 dx、dy、dz 的二阶微量，而且可以認为它們是作用于相应面的重心上。

面的名称	外向法綫的方向	面　积	应力的投影		
			在 x 軸上	在 y 軸上	在 z 軸上
yOz	$-x$	$\frac{1}{2}dydz$	$-\sigma_x$	$-\tau_{xy}$	$-\tau_{xz}$
xOz	$-y$	$\frac{1}{2}dzdx$	$-\tau_{yx}$	$-\sigma_y$	$-\tau_{yz}$
xOy	$-z$	$\frac{1}{2}dxdy$	$-\tau_{zx}$	$-\tau_{zy}$	$-\sigma_z$
傾斜面	n	dS	p_{nx}	p_{ny}	p_{nz}

此外，四面体上还作用着体积力，其投影为：$K_x dV$，$K_y dV$，$K_z dV$；这里 $dV=\frac{1}{6}dxdydz$ 是四面体的体积。这些力是 dx, dy, dz 的三阶微量，因此，与前者相比，这些力可以忽略不計。

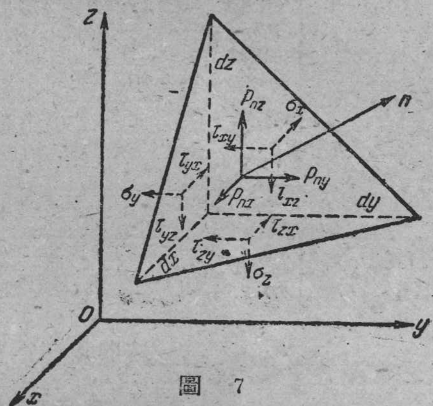

圖　7

現在来建立作用于四面体上各力在 x 軸上投影的平衡方程。

$$-\sigma_x\frac{1}{2}dydz-\tau_{yx}\frac{1}{2}dzdx-\tau_{zx}\frac{1}{2}dxdy+p_{nx}dS=0。\qquad(2.1)$$

然而根据平面圖形面积投影的理論

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}dydz&=dS\cos(n,x),\\ \frac{1}{2}dzdx&=dS\cos(n,y),\\ \frac{1}{2}dxdy&=dS\cos(n,z)。\end{aligned}\right\}\qquad(2.2)$$

运用这些等式，就得到下列三个公式（第二与第三个公式是由各力在 y 与 z 軸上投影的平衡方程导出的）：

$$\left.\begin{aligned}p_{nx}&=\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{yx}\cos(n,y)+\tau_{zx}\cos(n,z),\\ p_{ny}&=\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)+\tau_{zy}\cos(n,z),\\ p_{nz}&=\tau_{xz}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)+\sigma_z\cos(n,z)。\end{aligned}\right\}\qquad(2.3)$$

因此，作用在任一傾斜面上的应力向量分量，可以用作用在与座标軸垂直的三个面上的应力向量分量来表示。这些公式是由哥西导出来的。

現在我們来建立四面体其余的三个平衡方程——力矩方程。

最方便的是取对通过傾斜面重心 C 并与座标軸平行的直綫的力

矩。圖 8 中繪出了其中一根与 z 軸平行的直綫 z'。点 C 至四面体各垂直及水平面的距离各为 $\frac{1}{3}dx$，$\frac{1}{3}dy$ 与 $\frac{1}{3}dz$。因而，点 C 在这些面上的投影与这些面的重心重合。所以作用在四面体各面上的全部 12 个分力，除二个应力 τ_{yx} 和 τ_{xy} 以外，要不是平行 z' 軸，就是通过 z' 軸。

对直綫 z' 的力矩方程有下列形式：

$$\tau_{xy}\frac{1}{2}dy\,dz\frac{dx}{3}-\tau_{yx}\frac{1}{2}dx\,dz\frac{dy}{3}=0, \tag{2.4}$$

由此得到下列三个等式中的第一个等式（其余两个可以类似地导出）：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yx}&=\tau_{xy},\\ \tau_{zy}&=\tau_{yz},\\ \tau_{xz}&=\tau_{zx}。\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

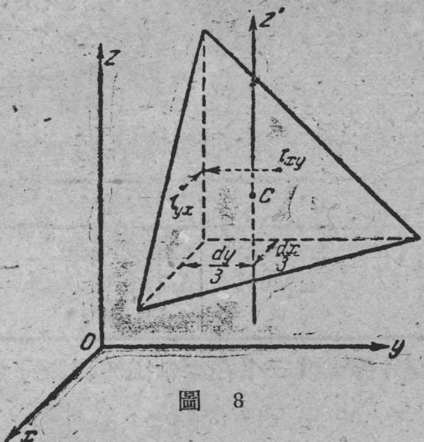

圖 8

这些等式表示出剪应力的**相关定律**。

公式 2.3 和 2.5 指出連續体**一定**点的应力状态完全决定于 σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} 和 τ_{zx} 六个量。这些量称为**应力張量分量**。

若无穷小四面体的傾斜面与所研究的連續体的單元表面相重合，則应力向量的投影 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 就等于單位表面上外載荷的投影 F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}。所以在物体的表面上有下列等式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)+\tau_{zx}\cos(n,z)&=F_{nx},\\ \tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)+\tau_{yz}\cos(n,z)&=F_{ny},\\ \tau_{zx}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)+\sigma_z\cos(n,z)&=F_{nz}。\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中 n 是表面的外向法綫。

§3 座标軸旋轉时应力張量分量的計算

命 1, 2, 3 是由負荷物体的 O 点引出的笛卡尔直角座标系的軸。使座标系繞 O 点旋轉，使新座标軸得到 1′, 2′, 3′ 位置（圖 9）。

現在以原座标系 1, 2, 3 中的这个張量的分量来表示新座标系 1′, 2′, 3′ 中的应力張量分量。

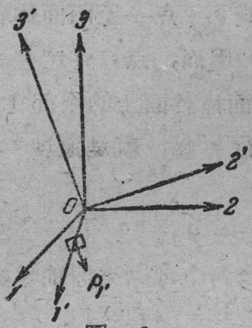

圖 9

新旧軸間的夹角余弦列表如下，其中$\alpha_{im}=\cos(i,m')$表示原軸 i 与新軸 m' 間的夹角余弦。

現在来研究垂直于新座标軸 m'(这里 $m'=1', 2'$ 或 $3'$)的无穷小面积。

作用在这面积上的应力向量 $p_{m'}$ 在原軸上的投影用公式 2.3 来表示：

$$p_{m'1}=p_{11}\alpha_{1m}+p_{21}\alpha_{2m}+p_{31}\alpha_{3m} \tag{3.1}$$

并类似地可得 $p_{m'2}$ 和 $p_{m'3}$；或普遍形式：

$$p_{m'k}=\sum_{i=1}^{3}p_{ik}\alpha_{im}。 \tag{3.2}$$

	$1'$	$2'$	$3'$
1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

向量 $p_{m'}$ 在任一新軸 n' 上的投影，等于其三个在原軸上的应力分量在这軸上的投影之和，

$$p_{m'n'}=p_{m'1}\alpha_{1n}+p_{m'2}\alpha_{2n}+p_{m'3}\alpha_{3n}=\sum_{k=1}^{3}p_{m'k}\alpha_{kn}。 \tag{3.3}$$

将3.2代入 3.3，就求出了要求的轉移到新座标軸的应力張量分量的变换公式：

$$p_{m'n'}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}p_{ik}\alpha_{im}\alpha_{kn}。 \tag{3.4}$$

回想到 $p_{ik}=\tau_{ik}$ 和 $p_{ii}=\sigma_i$，我們写出此式的展开式：

$$\begin{aligned}\sigma_{1'}=p_{1'1'}&=\sigma_1\alpha_{11}^2+\sigma_2\alpha_{21}^2+\sigma_3\alpha_{31}^2+2\tau_{12}\alpha_{11}\alpha_{21}+2\tau_{23}\alpha_{21}\alpha_{31}+2\tau_{31}\alpha_{31}\alpha_{11},\\ \tau_{1'2'}&=\sigma_1\alpha_{11}\alpha_{12}+\sigma_2\alpha_{21}\alpha_{22}+\sigma_3\alpha_{31}\alpha_{32}+\tau_{12}(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{21}\alpha_{12})+\tau_{23}(\alpha_{21}\alpha_{32}\\ &\quad+\alpha_{31}\alpha_{22})+\tau_{31}(\alpha_{31}\alpha_{12}+\alpha_{11}\alpha_{32})\end{aligned} \tag{3.5}$$

并可相似地得出其余四个分量。

公式 3.4 是二級張量的定义。实际上，当座标系像座标的逐对的