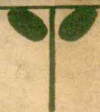
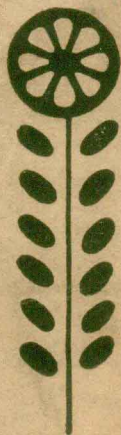


算學小叢書



點線面體量法詳論

徐韞知編



商務印書館發行

序

誰都不能否認“量法”在日常生活方面的廣大用途，誰都不能否認“量法”在高深科工方面的相當地位，其實不僅這樣，就從量法的性質，內涵而言，它也顯然自成一個一貫的系統，而有單獨研究的必要。

其次，再從事實方面來考驗：我們教天算或工程的人，每每感到大學的同學對於形體的量法，知識異常零碎，而缺乏一種有系統的明晰的認識。這一個事實自然是由於他們高中時代的準備未能充分；換句話說，他們僅憑高中算術和幾何學中一點片斷的量法知識，當然是不夠的。

所以，在他們進修高深課程之先，我時常將“量法”的原理和應用對他們作一個系統的講述；這就輯成了本書。就中理論方面多採自 Weber Todhunter 和吾師 Dr. Prof. Hilbert 諸氏的論著；所有習題則就實用有關者選編；並在書末附有答案，以便讀者驗算。但是日常生活中，儘不少我們還沒有收羅到的和量法有關的問題，我希望能夠隨

時有增訂的機會。

最後，書名上冠點線面體四字，不過使讀者一目了然本書的內容，其實“量法”二字就已含有“點”“線”“面”“體”四字在內了。

徐韞知 二十三年，十月。

目 次

第一編 幾何學與量法

一	定義	2
二	定理	9
三	問題	17

第二編 長度

四	長度表	26
五	直角三角形	29
六	相似形	36
七	弦	42
八	圓周	50
九	圓弧	56

第三編 面積

十	面積單位表	62
---	-------------	----

十 一	矩形	64
十 二	平行四邊形.....	71
十 三	三角形.....	77
十 四	四邊形.....	83
十 五	直線形.....	91
十 六	圓.....	95
十 七	扇形和弓形	103
十 八	西姆森公式	111
十 九	相似形	119

第四編 體積

二 十	定義	127
二十一	立體度量表	138
二十二	正平行六面體	140
二十三	平行六面體, 角壩, 圓柱體	148
二十四	正圓柱體割分, 環	154
二十五	角錐, 圓錐	158
二十六	角錐或圓錐的截體	163
二十七	尖劈	167

二十八	稜柱體	172
二十九	球	177
三十	球帶和球割分	182
三十一	不規則立體	186
三十二	相似體	189

第五編 立體表面積

三十三	平表面	195
三十四	正圓柱體	202
三十五	一個正圓柱體的割分, 環	207
三十六	正圓錐	211
三十七	一個正圓錐的截體	216
三十八	球	221
三十九	球帶, 球割分	225

第六編 量法應用

四十	概說	231
四十一	木材量法	234
四十二	測容量	238

四十三	土地測量	242
四十四	雜題	249
附 錄	習題答案	260

點線面體量法詳論

第 一 編

幾 何 學 與 量 法

無論在純理的科學或實用的工程各方面，關於度量空間的問題；都是一種最基本的研究。

高深的暫不必提起，即以淺易的初等數學和物理學言，空間度量實就已佔有一個重要的部位。

將度量空間的問題作一系統的研究，就是“量法”，或稱“求積法 (Mensuration)”。換句話說，“量法”就是計算“長度 (Lengths)”，“面積 (Areas)”和“體積 (Volumes)”的一切法則。“長度”“面積”“體積”等，都是一種幾何形或體；所以直截說“量法”就是幾何形體的量法。

學習“量法”之先，讀者應該對於算術中加減乘除四則開方等演算和符號，有相當的準備，除此以外，當然還應具備一些幾何學方面的知識。

本書爲便利初學起見，除算術的材料用不着贅說外，特別在本編提述一點用得着的幾何學知識。讀者如已習過幾何學，不妨利用它作復習。要是讀者僅懂得算術，尙未習過幾何學，那麼這一點材料也足夠使他對幾何形體的性質，有相當的認識；而且這種認識就是學習量法必須具備的先決條件。

本編共分三章：第一章專解釋各種平面形的定義；二、三兩章就是關於這類平面形的定理和問題。這三章所有材料在“量法”上，都大有用處，讀者應特別注意。

一 定 義

§ 1. 我們通常所謂的“點”(Point)和“線”(Line)其實在幾何學上，卻另有一種嚴格的解釋。

通常對於“點”的表示係在紙上用墨筆畫一小點，這樣畫出來的點雖極細微，究竟仍有相當的大小；而在幾何學上，“點”只有位置，並無大小。

“線”可分爲“直線 (Straight line)”和“曲線 (Curved line)”兩種。通常係用畫極狹的一條“直線”或“曲線”，來代表它們。但是在幾何學上，卻像“點”一樣，“線”根本就

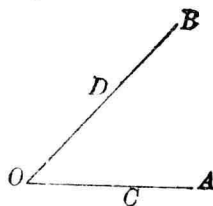
沒有寬度。

§ 2. 常見的還有一個“面 (Surface)”字。“面”分砥平和彎曲二種。幾何學上的“平面 (Plane surface)”即指砥平的面而言。這所謂的面並沒有“厚”。

§ 3. 歸納上述的定義；所以我們可以說：“點”沒有“長”“寬”或“厚”；“線”只有“長”；“面”只有“長”和“寬”。“立體 (Solid body)”既有“長”和“寬”，並且有“厚”；在第四編，我們就可以說到。現在將四個定義；列成一表，以便記憶。

	點	線	面	體
位置	×	×	×	×
長	—	×	×	×
寬	—	—	×	×
厚	—	—	—	×
(空間度數)	零度	一度	二度	三度

§ 4. “角” (Angle) 就是不在一直線上兩相交線傾斜的度數。如圖，在 O 點相交的 AO , BO 二直線即成一角。



成這個角的直線長短縱有變更，角卻完全不變；所以 CO 和 DO 所成角與 AO 和 BO 所成角相同。

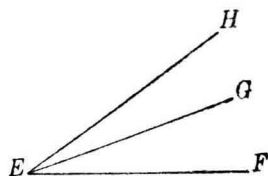
§ 5. 如果在一點只作成一角，這個角就可以用角點的那個文字來表示：例如前圖的角，就可以說做 O 角。

如果在一點作成多角，每個角就得用三個文字來表示：角點的文字居中，其他兩個文字用成角的二線的文字，即取每一直線上的一個文字。如圖

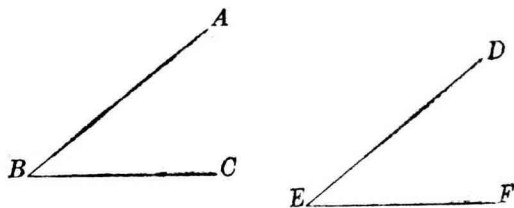
FEG 表 FE 和 GE 所成的角；

GEH 表 GE 和 HE 所成的角；

FEH 表 FE 和 HE 所成的角。



§ 6. 如果成一角的二直線及角點和成另一角的直線及角點，恰可彼此疊合；這二個角就叫做“相等 (Equal)”。如圖，設 BC 與 EF 相疊， B 落在 E 上，並且 BA 與



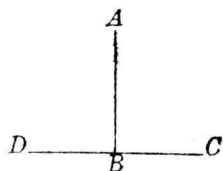
ED 相疊，則 ABC 角就叫做等於 DEF 角。我們對於角相等 (Equality of angle) 應該存這樣清楚的一個觀念：讀

還可以實在用紙切成兩個等角，疊合以作試驗。但是在幾何學內，卻須在疊合法之外，設法證明兩角相等。

§ 7. 假設在第五節圖內， FEG 角等於 GEH 角；則 FEH 整個角等於 FEG 的兩倍。同理可以明白某角爲他角三倍，四倍等所指的意義。

§ 8. 當一直線在他線上所成兩隣角相等時，每個角就叫做一“直角 (Right angle)” 在他線上的這條線就叫做垂直於 (Perpendicular to) 他線。

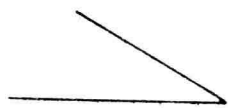
如圖，設 ABC 角等於 ABD 角，每個角就是一直角， AB 就是垂直於 DC 。



“鈍角 (Obtuse angle)” 就是大於直角的一個角。



“銳角 (Acute angle)” 就是小於直角的一個角。



§ 9. “平行直線 (Parallel lines)” 就是同在一平面上，無論怎樣延長不相交的直線。



§ 10. “直線形” (Rectilineal figure) 是直線作界限的

圖形；圖形的這種界限就叫做“邊 (Sides).”

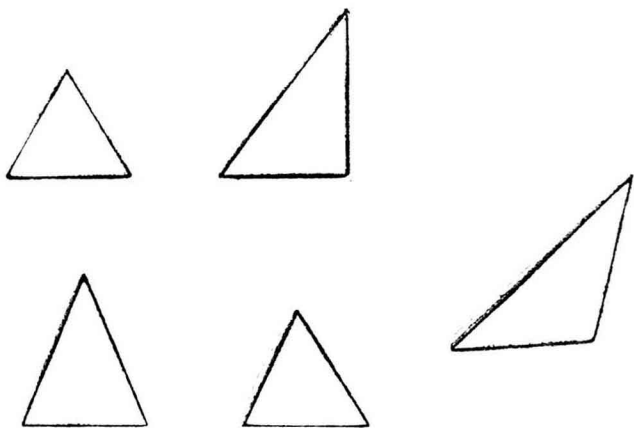
一個“三角形 (Triangle)”爲一有三邊的直線形。

一個“四邊形 (Quadrilateral)”爲一有四邊的直線形。

在四邊以上的直線形；叫做“多邊形”又叫做“多角形 (Polygon)”；如有五邊，就叫做“五邊形 (Pentagon)”，有六邊，就叫做“六邊形 (Hexagon)”，由此類推，

一個“正多邊形” (Regular polygon) 所有各邊；都彼此相等，並且所有各角也彼此相等。

§ 11. 三角形有許多種類，所用名稱如下：



“等邊三角形”，(Equilateral triangle) 就是各邊都相等的三角形。

“等腰三角形, (Isosceles triangle)”就是有兩邊相等的三角形.

“直角三角形 (Right angled triangle)”, 就是有一角爲直角的三角形.

在一個直角三角形內, 爲方便起見, “邊” 這個名稱只限於“夾”直角的二直線; 對直角的直線另叫做斜邊, (Hypotenuse).

“鈍角三角形 (Obtuse triangle)”就是內中有一個鈍角的三角形.

“銳角三角形 Acute triangle)”就是三角都爲銳角的三角形.

§ 12. 四邊形也有許多種類, 所用名稱如下:

“平行四邊形 (Parallelogram)”對邊彼此平行並且相等.

“矩形 (又叫長方形) (Rectangle)”就是四角都成直角的平行四邊形.

“正方形 (Square)”就是四邊都相等的“矩形”.

“菱形 (Rhombus)”是各邊相等而各角不成直角的“平行四邊形”.

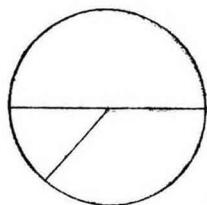
“梯形 (Trapezoid)” 有兩邊平行。

§ 13. 一個三角形的任一邊，都可以叫做“底 (Base)”；如此，這個三角形的“高 (Height)”，就是從對角頂點所作至“底”的垂直線。

一個“平行四邊形”的任一邊，都可以叫做“底”；如此，這個平行四邊形的“高”，就是從對邊任一點所作至“底”的垂直線。

§ 14. 一個四邊形的“對角線 (Diagonal)”就是聯兩對邊的直線。在一多邊形內，聯任何不相隣兩角的直線，也叫做這個多邊形的對角線。

§ 15. “圓 (Circle)”是以叫做“圓周 (Circumference)”為界的平面形；並且在圓內有一點，與圓周上各處的距離都是相等的。這個點叫做“圓心 (Centre of the circle)”。



一個圓的“半徑 (Radius)”就是從圓心作到圓周上的直線。

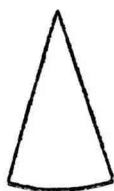
一個圓的“直徑 (Diameter)”就是所作經過圓心，並且兩端在圓周上的直線



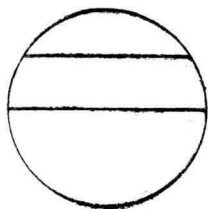
一個圓的“弧 (Arc)”是圓周的一部分。

一個圓的“弦 (Chord)”是聯一個弧的兩端的直線。

一個圓的“弓形 (Segment)”是一個弦和所截弧所界的圖形。



一個圓的“扇形” (Sector) 是以兩半徑和它們中間的弧爲界的圖形。兩個半徑所成的角；叫做扇形的角。



一個圓的“帶 (Zone)”就是兩平行弦中間所包含的圓的一部分。

二 定 理

§ 16. 現在有一些重要的幾何學知識我們應該在先牢記；這些知識在幾何學上，都有很詳盡的解說和證明；讀者如有時間，最好將幾何學翻開來對照參看。不過現在限於篇幅，我們卻未能逐條詳細證明；並且爲便利初學記憶起見，每個定理的解釋；都着重在簡單和扼要二點。

有許多定理差不多無需證明本身即可了解；有許多定理本來就是很簡單的；還有許多須得經幾度實際的度量

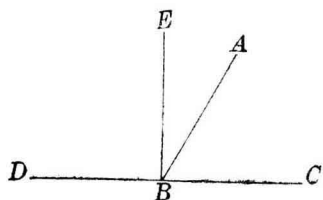
後，方能得真實的結果。

§ 17. 我們現在選述的只是全部研究中的最重要的幾點 但是由這些範例，我們對這方面基本的原理即可以得到相當的領會，而且進一步，並可以因此增進讀者更深入的知識。

§ 18 至 § 21 係關於“角”方面；§ 22 至 § 27 關於面積相等；§ 31 至 § 33 關於“圓”的性質；§ 34 至 § 38 關於相似三角形。

§ 18. 設 AB 直線在 CD 直線一邊成角 ABC 與 ABD ，則此二角之和為二直角。

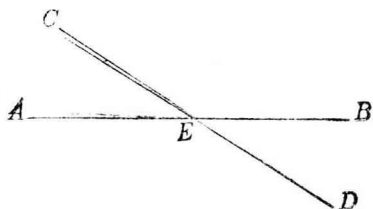
因為如使 BE 垂直於 DC ，
這樣 ABD 角，就是 ABE 和 EBD 二角之和；因此 ABC



和 ABD 二角等於 ABC ， ABE 和 EBD 三角之和。

但是 EBD 是一直角，並且 ABC 和 ABE 二角的和 EBC ，也是一個直角。

所以 ABC 和 ABD 二角共等於二直角。



§ 19. 設 AB 和 CD