四川师范大学成都学院

独立学院“十一五”规划
课题子项目系列教材

经济数学基础

主　编　李继陶　尉　慰
副主编　陈　勇　沈艳霞

JINGJI
SHUXUE JICHU

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/李继陶,尉慰主编. —成都:电子科技大学出版社,2009.9

(独立学院“十一五”规划课题子项目系列教材)

ISBN 978-7-5647-0386-8

I. 经… Ⅱ.①李…②尉… Ⅲ.经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 161419 号

独立学院“十一五”规划课题子项目系列教材

经济数学基础

主　编　李继陶　尉　慰

副主编　陈　勇　沈艳霞

出　　版:电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编:610051)

策划编辑:曾　艺

责任编辑:曾　艺　李述娜

主　　页:www.uestcp.com.cn

电子邮件:uestcp@uestcp.com.cn

发　　行:新华书店经销

印　　刷:成都市天金浩印务有限公司

成品尺寸:185mm×260mm　**印张**　11.25　**字数**　260 千字

版　　次:2009 年 9 月第一版

印　　次:2009 年 9 月第一次印刷

书　　号:ISBN 978-7-5647-0386-8

定　　价:22.00 元

前　　言

为了贯彻教育部加强对独立学院的支持和管理的精神，根据四川师范大学成都学院的战略发展目标和人才培养的总体目标，结合独立学院的特点和我院的实际情况，在学院、教务处和经济与管理系领导鼓励和支持下，为满足管理学各专业教学的需求，数理教研室组织我院教师编写了《经济数学基础》教材。

经济数学所含内容必须为我院各专业服务。内容以“必须”和“够用”为度，表述上以应用为目的，知识之间的因果关系，力求使学生知道，让学生学会在经济问题和数学问题之间的切换，从而学会使用数学工具的思想方法和技能。根据整合课程体系、减少课程重复内容的原则，对经济问题也作了提炼和抽象。课程教学约108学时。

作为独立学院的教材，理念由李宜蓬、龙运书确定，篇章体系由李继陶、尉慰设计，具体撰写人分别是：尉慰（第一、第二、第三、第四、第五、第六章）、沈艳霞（第七、第八、第九章）、陈勇（第十、第十一章），数理教研室羊富彬对书中的作图给予了技术上支持。在此，对李宜蓬（博士）、龙运书（教授）、李继陶（教授）和所有为此书作出努力工作的专家、教授和工作人员表示感谢。

由于编者水平和经验有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2009年6月

目　　录

第一章　极限与连续

在中学数学的学习中,已对函数有了一定的认识,也应用函数的知识,解决了一些简单的实际问题,为了解决和研究较为复杂的问题,需要新的方法和工具.极限的概念和方法便由此产生,从而也为微积分的建立奠定了基础.

第一节　函　　数

函数是描述客观世界变量与变量之间的相互依赖(对应)的关系,是微积分研究的对象.

一、函数的定义

【例1】　某工厂生产某种设备,固定成本100万元,每生产一台成本为0.5万元.如果用x表示产量,y表示当产量为x时的总成本,那么变量y与变量x之间有如下关系:

$$y = 100 + 0.5x$$

变量x可在$\{0,1,2\cdots\}$中取值,即$x\in\{0,1,2\cdots\}$.比如当$x=100$时,通过上述关系(也叫法则)可知总成本为150万元.即通过上述法则,有150万元与100台对应.

【定义1】　设D是一非空集合,如果对于D中每一个x,按照某种法则,都有唯一确定的y值与之对应,则称y是x的函数,记为

$$y = f(x)$$

其中x称为自变量,y也可称为因变量,D称为函数的定义域,此时也可称函数$y=f(x)$在D上有定义,$\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

由于自变量只有一个,所以上述定义的函数也称一元函数(简称函数).

当$x_0\in D$,与x_0对应的值是y_0,记作$y_0=f(x_0)$,叫做当$x=x_0$时的函数值为y_0.

变量及代表法则符号,也可以用其他字母来表示,比如$y=g(x)$,$u=\varphi(t)$等,也可以用$y=y(x)$来表示.比如总成本C是产品产量q的函数,可记为$C=C(q)$.

只要能区别,用什么字母来表示变量并不重要,重要的是定义域和法则.

比如,$y=0.5x+100\quad x\in\{0,1,2,\cdots,300\}$与$C=0.5Q+100\quad Q\in\{0,1,2,\cdots,300\}$表示相同的函数关系.

而$y=0.5x+100\quad x\in\{0,1,2,\cdots,100\}$与$y=0.5x+100\quad x\in\{0,1,\cdots,300\}$就是两个不同的函数.

【例2】　已知函数$f(x)=ax+b$,(a,b为常数),求$f(0)$,$f(1)$,$f(x^2)$.

解　$f(0)=a\cdot 0+b=b$,$f(1)=a+b$,$f(x^2)=ax^2+b$.

二、一元函数的几何特性

设 $y=f(x), x\in D$，在平面直角坐标系下，$(x,f(x))$（或(x,y)）表示平面上一点，称 $\{(x,f(x))\mid y=f(x), x\in D\}$ 为 $y=f(x)$ 的图（或曲线或图形）.

即函数 $y=f(x), x\in D$ 的几何意义：在平面直角坐标系下表示曲线（也可能是一些点），如图 1-1 所示. 其经济学意义在于，日常所遇到的问题，既可用数量关系表示，又可用图形描述，从学习角度来看，对问题的研究，可以“看”和“想”并用.

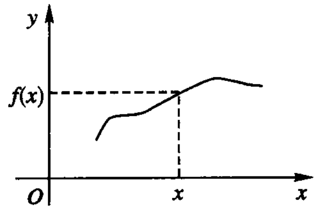

图 1-1

比如，$y=ax+b$ 的图形为一条直线，a 称为斜率. 又比如，X 表示投资品的产量，Y 表示消费品产量，则 (X,Y) 的图形在《政治经济学》中称为生产可能性曲线（严格的讲是点 (X,Y) 在曲线上，即曲线上的其他点可能已没有实际意义）.

掌握函数的性质有助于对函数进行研究，从而也便于函数的应用. 即掌握共性，便知个性.

1. 函数的有界性

【定义 2】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使得对任意 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的正数不存在，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

有界不过是术语，实际就是范围的意思，不过此范围由自变量的范围和法则来确定.

有界函数的图形特点是，图形介于 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 R 上有界（$|\sin x|\leqslant 1$）. 函数 $y=\dfrac{1}{x}, x\in[1,+\infty)$ 也是有界的（$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$），而函数 $y=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$ 是无界的，如图 1-2.

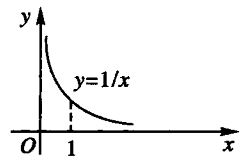

图 1-2

从应用的角度讲，此性质说明在不需要一一检验的情况下，可判断函数的范围（当然需要通过法则和定义域）.

2. 函数单调性

【定义 3】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D, I\subset D$，

如果对于 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立. 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的.

如果对于 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立. 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数，对应的区间称为单调区间. 当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），称 $f(x)$ 是单调不减的（或单调不增的）.

从几何意义上看，单调性描绘了曲线是上升还是下降（与自变量的范围有关）.

从应用角度上讲，当自变量增加时，函数是增加还是减少可通过函数的单调性来判断.

【例 3】 证明函数 $Q=a-bp$（a,b 是常数，$b>0$）在 R 上是单调减少的.

证　任意 $x_1,x_2\in R$，设 $x_1<x_2$，则 $(a-bx_1)-(a-bx_2)=b(x_2-x_1)$. 由 $b>0$ 以及 $x_1<x_2$ 知 $b(x_2-x_1)>0$，从而 $a-bx_1>a-bx_2$，由定义知 $Q=a-bp$ 在 R 上是单调减少的.

在第二章，应用导数可更为方便地对函数的单调性做出判断，仅由定义来判断是不

太方便的. 新知识的学习有助于问题的解决.

3. 函数的奇偶性

【定义4】 设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),

如果对于任意 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任意 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

其几何意义是:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

比如,$y=\cos x$ 是偶函数,$y=\sin x$ 是奇函数. 此性质在第四章定积分的计算时,是有帮助的(在一定条件下).

4. 函数的周期性

【定义5】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对任意 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指最小正周期(当然是最小正周期存在时).

从应用上讲,对于周期函数的研究在一个周期上进行即可.

时间在变化,但手表的指针只在一个界面上运动,指针的位置是时间的函数,此函数就是周期函数.

【例4】 设 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数,证明 $|T|$,nT(n 为不等于零的整数)都是 $f(x)$ 的周期.

证　由 $f(x)=f(x+T)$ 及 $f(x)=f(x-T+T)=f(x-T)$ 知,

$f(x)=f(x+|T|)$,即 $|T|$ 为 $f(x)$ 的周期.

由 $f(x+nT)=f(x+nT+T-T)=f(x+(n-1)T+T)=f(x+(n-1)T)$ 便可推知,

$f(x+nT)=f(x)$,故 nT 为 $f(x)$ 的周期.

此例说明若函数是周期函数,则它有无穷多个周期.

第二节　常用的函数

对于所有的函数一一研究是不可能的,而对典型的函数掌握有助于对较为复杂的函数的研究. 认识并记住这些函数是非常重要的. 此过程是特殊到一般的递进的过程,即由浅入深.

一、基本初等函数

1. 常值函数 $y=c$(c 是常数)$x\in R$.
2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 是常数,$\alpha\in R$),定义域由 α 的情况而定.
3. 指数函数 $y=a^{x}$(a 是常数,$a>0,a\neq1$),$x\in R$.
4. 对数函数 $y=\log_a x$(a 是常数,$a>0,a\neq1$),$x\in(0,+\infty)$.
5. 三角函数 $y=\sin x,x\in R$;$y=\cos x,x\in R$;

$y=\tan x,x\in R-\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2\cdots\}$;

$y=\cot x,x\in R-\{x\mid x=k\pi,k=0,\pm1,\pm2\cdots\}$;

$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$;$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

6. 反三角函数

$y=\arcsin x \quad x\in[-1,1]$；$y=\arccos x \quad x\in[-1,1]$；

$y=\arctan x \quad x\in R$；$y=\operatorname{arccot} x \quad x\in R$.

以上六类函数统称为基本初等函数. 即基本初等函数指的就是上述函数.

二、复合函数

基本初等函数之间通过运算可得到较为复杂的函数,反之复杂的函数也可以“分解”为简单的函数的“组合”.

比如,函数 $y=e^u$(基本初等函数),$u=x^2$(基本初等函数),可得到函数 $y=e^{x^2}$(通过代入),也就是说,函数 $y=e^{x^2}$(不是基本初等函数)可看成 $y=e^u$ 与 $u=x^2$“组合”而成的,u 起到中间“桥梁”作用,自变量 x 通过 u 与 y 对应.

【定义 1】 设函数 $y=f(u)$,定义域为 D_u,函数 $u=\varphi(x)$,定义域为 D_x,$D\subset D_x$,如果 $\{u|u=\varphi(x),x\in D\}\subset D_u$,且对于任意 $x\in D$,通过 $u=\varphi(x)$ 及 $y=f(u)$ 有唯一的 y 与之对应,称 y 为 x 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D$,而 u 称为中间变量.

比如,函数 $y=\sin x^2$ 是复合函数,因为 $y=\sin x^2$ 可通过 $y=\sin u$,$u=x^2$ 而得到.

又比如,复合函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 可通过 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin x$ 而得到.

有时也称 $y=\sqrt{\sin x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin x$ 复合而成.

以上的“分解”很重要,而“分解”的标准是初等函数. 后续的导数计算需要会这样的看出“分解”.

复合函数也可由两个以上的函数复合而成.

例如,$y=\sqrt{\sin x^2}$ 可由 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin v$,$v=x^2$ 复合而成.

如上过程,是通过代入来实现的,但形式的代入不能忽略函数的定义. 即不是所有形如 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 的函数都能复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$.

例如,$y=\sqrt{u}$,$u=-1-x^2$ 就不能复合成函数.

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除或复合而成的函数统称为初等函数.

例如,$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$,$y=\frac{\sin x}{x}$,$y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 都是初等函数.

对于初等函数,主要是掌握它是由哪些函数(即分解问题)通过怎么的过程(即运算问题)而得到的. 掌握上述问题有助于导数的计算.

例如,$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,可看成由 $y=A\sin u$,$u=\omega x+\varphi$ 复合而成;$y=\frac{\sin x}{x}$ 可看成 $\sin x$ 和 x 通过除法运算而得到的. 而函数 $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 可看成 $y=\ln u$ 与 $u=\frac{1-x}{1+x}$ 复合而成,而 $u=\frac{1-x}{1+x}$ 又通过 $1-x$ 和 $1+x$ 的除法运算而得到.

四、分段函数

下面以例题来说明分段函数的概念,分段点是关键的一个点.

【例 1】 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.15 元，当超过 50kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求上海到该地的行李费 y（元）与重量 x（kg）之间的函数关系式.

解 根据题意，得 $y=\begin{cases}0.15x & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.15\times 50+0.25(x-50) & x>50\end{cases}$

如果一个函数在定义域的不同"范围"，用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & -1\leqslant x<2\\ 9-x^2 & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(3)$.

解 $f(0)=1$，$f(2)=5$，$f(3)=0$.

其中 $x=2$，称为分段点. 它的左右对应着不同的表达式.

第三节 常用的经济函数

在经济领域里，变量与变量之间的函数关系，称为经济函数. 变量都有实际经济意义，这样的变量的取值由实际问题来决定的，为了便于研究，一般把变量取值扩充到使函数有意义的点（自然定义域）.

一、需求函数与供给函数

1. 需求函数

需求量 Q 是价格 p 的函数，称为需求函数，记为 $Q=Q(p)$. 一般情况下是减函数，通常降价使需求量增加，涨价使需求量减少. 这里作了理想化的假设，实际情况有可能相反，但在复杂与简单共存的情况下，先考虑简单的情况. 以下对问题的探讨均基于这种思维.

2. 供给函数

供给量 S 是价格 p 的函数，称为供给函数，记为 $S=S(p)$. 一般是增函数，通常价格上涨使供给量增加，即价格上涨使生产者向市场提供更多的商品，反之减少.

价格 p 的变化，既影响需求量 Q 的变化，又影响供给量 S 的变化（供需矛盾）. 当 $p=p_0$，有 $Q(p_0)=S(p_0)=q_0$ 时，即需求曲线和供给曲线的交点所对应的价格（几何意义）. 称 p_0 为均衡价格，q_0 就是市场均衡量，此时也称供需平衡（经济学意义）. 方程

$$S(p)=Q(p)$$

称为局部均衡市场模型.

但往往是 $Q(p)>S(p)$ 或 $S(p)>Q(p)$，但一般当 $|S(p)-Q(p)|$ 很小时，就可以认为供需平衡.

【例 1】 当鸡蛋收购价为 5 元/千克时，某收购站每月能收购 5000kg. 若收购价格每千克提高 0.1 元时，则收购量可增加 400kg. 求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为 $S=c+dp$（c，d 是常数），由题意有

$$\begin{cases}5000=c+5d\\ 5400=c+5.1d\end{cases}$$

解方程组,得 $d=4000$,$c=-15\ 000$,所求供给函数为 $S=-15\ 000+4000p$.

【例2】 设某商品的需求函数为 $Q=-ap+b$,供给函数为 $S=cp-d$,其中 a,b,c,d 均为正常数,$cb-ad>0$. 求:市场均衡价格 p_0 及市场均衡量 q_0.

解 解方程 $Q=S$,得 $p_0=\dfrac{b+d}{a+c}$,$q_0=Q(p_0)=S(p_0)=\dfrac{cb-ad}{a+c}$.

后面的学习可以知道,随着时间的推移,这种平衡是可以达到的(理想的结果).

二、成本函数、收入函数和利润函数

1. 成本函数

总成本(总成本 = 固定成本 + 可变成本)C 是产量或销售量 q 的函数,称为成本函数,记为 $C=C(q)$.

一般来说,$C(q)=C_0+C_1(q)$. C_0 为常数,表示固定成本,$C_1(q)$ 称为可变成本,$C(q)$ 是增函数.

如果 $C(q)$ 是线性函数,即 $C(q)$ 的图形是直线,那么 $C(q)$ 在 y 轴上的截距为 C_0(固定成本的几何意义).

【例3】 已知某种产品的总成本函数为 $C=1000+\dfrac{q^2}{8}$,求:当生产 100 单位该产品时的总成本和平均成本.

解 由题意,产量为 100 单位时的总成本为 $C(100)=1000+\dfrac{100^2}{8}=2250$,

平均成本为 $\dfrac{2250}{100}=22.5$.

用平均反映个体是对个体的不公平,换言之,仅靠算术运算对函数的研究是不够的,新的运算有待产生. 这种运算是在变化过程中进行的,称为极限运算.

2. 总收入函数

总收入 R 是销售量 q 的函数,称为总收入函数,记为 $R=R(q)$.

当产品的价格为 p 时,有 $R(q)=pq$(收入 = 商品价格 × 商品销售量).

3. 利润函数

设总利润函数为 $L(q)$,则有 $L(q)=R(q)-C(q)$(利润 = 收入 − 成本).

第四节 函数的极限

由函数的定义知,函数(变量)是变量之间的对应,但变量的变化与变化的对应更为重要,研究这种问题,极限是有利的工具. 而这种问题的两大模型是微分和积分(简称微积分).

极限是导出微积分的基础. 若将极限看成一种运算(与结果对应),则本节将介绍这种重要的运算.

先来看极限产生的背景.

我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆的面积,其方法就是极限的思想方法. 总结如下:

用圆内接正 n 边形的面积 A_n 作为圆面积 A 的近似值(A_n 是 n 的函数).

其过程可记录为,$A_3,A_4,A_5,\cdots,A_n\cdots$,$n$ 越大,近似程度越高. 当 n 无限增大时,记为 $n\to\infty$(读作 n 趋近于无穷大),A_n 依 n 的变化而变化,当 $n\to\infty$ 时,A_n 的最终变化结果是圆的面积 A(一个确定的值).

一、数列的极限

按某一法则排列的数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\cdots$$

称为数列,记为$\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项(法则).

例如,数列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1}\cdots$可记为$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$,一般项为 $x_n=\frac{n}{n+1},n=0,1\cdots$

当 $n\to\infty$ 时,可以直观地看出,$x_n=\frac{n}{n+1}$与 1 无限接近. 也就是说$\frac{n}{n+1}$与 1 的距离,

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|$$

要多小就有多小(只要让 n 无限增大就可以实现).

比如,让$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.01$,解不等式得 $n>99$,即$|x_n-1|<0.01(n>99)$. 又比如,让$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$($\varepsilon$ 为任意正数),解不等式,得 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. 即$|x_n-1|<\varepsilon$($n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的正整数). 这样,当 $n\to\infty$ 时,$x_n=\frac{n}{n+1}$是否与某一数 a(此例 $a=1$)无限接近,就只需验证能否找到与 ε 有关的正整数 N(此例 N 为大于$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的正整数),使$|x_n-1|<\varepsilon$ 成立即可($n>N$).

【定义 1】　如果数列$\{x_n\}$与常数 a 有下列关系:任意给定的正数 ε,总存在正整数 $N(\varepsilon)$,使得对 $n>N$ 的一切的 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于 a. 记为,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或 } x_n\to a(n\to\infty)$$

否则称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在或称$\{x_n\}$发散.

下面的例 1,将对上述直观结果给出证明.

【例 1】　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

证　任给 $\varepsilon>0$,

为了让$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$,而$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$,只需$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$,或 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$,取 N 为大于$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的正整数,那么当 $n>N$ 时,有$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$. 由定义知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

二、函数的极限

自变量的变化是多样化的.

根据自变量的变化情况,分两种情况($x\to\infty$,$x\to x_0$)给出函数极限的定义.

【定义 2】 如果函数 $y=f(x)$ 与常数 a 有下列关系:对任意给定的正数 ε,总存在正数 $X(\varepsilon)$,使得当 $|x|>X$ 时的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

那么 a 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 记为,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a \quad 或 f(x)\to a(x\to\infty).$$

将定义 2 中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$ 就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 的定义.

同样将 $|x|>X$ 改为 $x<-X$ 就可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 的定义.

不难证明

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a.$

【例 2】 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}.$

证 对任给正数 ε,

要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,而 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$,只要 $\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$ 即可,

解不等式,得

$|x|>\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$. 取 $X=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时,就有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon.$

由定义知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}.$

【例 3】 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$

证 对任给正数 ε,

要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,而 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$ 即可,解不等式,得 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,则当 $x>X$ 时,就有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$. 由定义知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$

【定义 3】 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域($\{x|0<|x-x_0|<r\}$,r 为大于零的某个常数)有定义,对于数 a 有下列关系:对任意给定的正数 ε,总存在正数 $\delta(\varepsilon)$ ($\delta\leqslant r$),使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$,不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

成立,则称 a 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 记为,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to x_0).$$

将定义3中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x-x_0<\delta$，可得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$ 的定义（$x\to x_0^+$ 意为 $x>x_0$ 且 $x\to x_0$）.

同样，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x_0-x<\delta$ 便可得，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$ 的定义（$x\to x_0^-$ 意为 $x<x_0$ 且 $x\to x_0$）.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$ 称为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的右极限，也记为 $f(x_0^+)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$ 称为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的左极限，也记为 $f(x_0^-)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$.

【定理1】 **$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$.**

【例4】 设 $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$，证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

证　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x$. 下面证明 $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$.

设 $x>0$，对任给 $\varepsilon>0$，要使 $(x-0)<\varepsilon$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<x<\delta$ 时，就有 $(x-0)<\varepsilon$，由定义知 $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$. 又显然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$，由定理1知，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

此例对分段点处的极限的研究方法用到了左右极限的概念. 换句话来说，左右极限是研究分段点的有力工具.

三、极限的性质

以下将 $n\to\infty$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$ 统称自变量的变化过程.

对应定义中的 N, X, δ 统称时刻.

满足不等式

$n>N$，$|x|>X(x>X, x<-X)$，$0<|x-x_0|<\delta(0<x-x_0<\delta, 0<x_0-x<\delta)$ 的自变量统称时刻后的自变量.

下面不加证明地给出函数（包括数列）极限的几个重要的性质.

性质1（唯一性）　如果函数在自变量的某一变化过程中有极限，则极限必唯一.

性质2（局部有界性）　如果函数在自变量的某一变化过程中有极限，则在某个时刻后的自变量对应的函数必有界.

性质3（局部保号性）　如果函数在自变量的某一变化过程中有极限，且极限大于零（或小于零），则在某个时刻后的自变量对应的函数值必大于零（或小于零）.

第五节　极限的运算法则

一、无穷小与无穷大

下面对有两种特殊极限的函数给出定义.

【定义1】　在自变量 x 的某个变化过程中，若函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 在该

变化过程中为无穷小量,简称无穷小.

【定义 2】 在自变量 x 的某个变化过程中,对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称 $f(x)$ 在该变化过程中为无穷大量,简称为无穷大.

【定理 1】 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$,其中 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha = 0$.

证 下面就 $x \to x_0$ 的情形给出证明.

必要性. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,令 $f(x) - A = \alpha$.

下面证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

任给 $\varepsilon > 0$,由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,那么存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|\alpha| = |f(x) - A| < \varepsilon$$

这样就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} a = 0$,且 $f(x) = A + \alpha$.

充分性. 设 $f(x) = A + \alpha$,且 $\lim\limits_{x \to x_0} a = 0$.

下面证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

任给 $\varepsilon > 0$,由于 $\lim\limits_{x \to x_0} a = 0$,那么存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - A| = |\alpha| < \varepsilon$$

这样就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 1 给出函数的一种"分解",这样表示在运算上是方便的.

【定理 2】 在自变量同一变化过程中,有

(1)有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2)有限个无穷小的积是无穷小.

(3)有界变量与无穷小之积是无穷小.

(证明略)

定理 1、2 在下面推导极限的四则运算法则中将发挥作用.

二、极限的四则运算法则

下面出现的"lim"没有标明自变量的变化过程,表示对任意自变量的变化过程都成立,只要在同一问题中变化过程相同即可.

【定理 3】 若 $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$,则

(1) $\lim cf(x) = c\lim f(x) = ca$ (c 为常数)

(2) $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = a + b$

(3) $\lim[f(x) \times g(x)] = \lim f(x) \times \lim g(x) = ab$

(4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{a}{b}$ ($b \neq 0$)

证 由 $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$ 及定理 1 知,

$f(x) = a + \alpha$, $g(x) = b + \beta$ ($\lim \alpha = \lim \beta = 0$).

(1) $cf(x) = ca + c\alpha$ 由定理 2 知, $\lim c\alpha = 0$,故 $\lim cf(x) = ca = c\lim f(x)$.

(2)$f(x)+g(x)=(a+b)+(\alpha+\beta)$ 由定理2知,$\lim(\alpha+\beta)=0$,

故 $\lim[f(x)+g(x)]=(a+b)=\lim f(x)+\lim g(x)$.

(3)$f(x)\times g(x)=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)$ 由定理2知,$\lim(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)=0$,

故 $\lim[f(x)\times g(x)]=ab=\lim f(x)\times\lim g(x)$.

(4)$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a+\alpha}{b+\beta}=\dfrac{a}{b}+\left(\dfrac{a+\alpha}{b+\beta}-\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b\alpha-a\beta}{bg(x)}=\dfrac{a}{b}+\left[\dfrac{1}{bg(x)}(b\alpha-a\beta)\right]$

容易证明 $\lim\left[\dfrac{1}{bg(x)}(b\alpha-a\beta)\right]=0$.

故 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

注:法则(2)(3)可推广到有限个函数情况,即

(1)$\lim[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\lim f_1(x)+\lim f_2(x)+\cdots+\lim f_n(x)$

(2)$\lim[f_1(x)\times f_2(x)\times\cdots\times f_n(x)]=\lim f_1(x)\times\lim f_2(x)\times\cdots\times\lim f_n(x)$

由(2)知,$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$

【例1】 证明(1)$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.(3)$\lim c=c$.

证 (1)对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|x-x_0|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

(2)对任意 $\varepsilon>0$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$,当 $|x|>X$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(3)对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$(或 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$),当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)时,有

$|c-c|=0<\varepsilon$,故 $\lim c=c$.

由法则知,$\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ $(n\in N)$.

由例1的结论,再运用极限的四则运算法则,就可以计算某些初等函数的极限.

【例2】 求 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to1}2x-\lim\limits_{x\to1}1=2\lim\limits_{x\to1}x-1=2\times1-1=1$.

【例3】 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-5x+3)=2^2-5\times2+3=-3\neq0$,$\lim\limits_{x\to2}(x^3-1)=7$,由运算法则,知

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=-\frac{7}{3}$$

【例4】 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$,不能直接使用法则. 而 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$,

另有 $\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}(x\neq2)$,则 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

【例5】 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to1}(2x-3)=-1\neq0.$

故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$（极限不存在），$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=0.$

【例6】 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{3x^2+1}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+1}{8x^2+2x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{3+\dfrac{1}{x^4}}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+1}{8x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\dfrac{1}{x^2}}{8+\dfrac{2}{x}}=\infty.$

一般来说，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & \text{当 } m=n \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m>n \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } m<n \text{ 时}\end{cases}$

其中 $a_n\neq0,b_m\neq0.$

第六节 两个极限及应用

一、两个极限及应用

【定理1】 如果 $\lim f(x)=0$，**且** $f(x)\neq0$. **那么** $\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1=\lim\dfrac{\tan f(x)}{f(x)}.$

（证明略）

【定理2】 如果 $\lim f(x)=0$，**且** $f(x)\neq0$. **那么** $\lim\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$，
其中 e 是无理数，$\mathrm{e}\approx2.7183$.

（证明略）

中学数学讲到的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 以及自然对数 $y=\ln x$ 中的底 e 就是这个常数.
下面应用定理1、2求某些类型的函数（数列）的极限.

【例1】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\tan x}{x}}=1\quad(f(x)=x).$