高 等 数 学

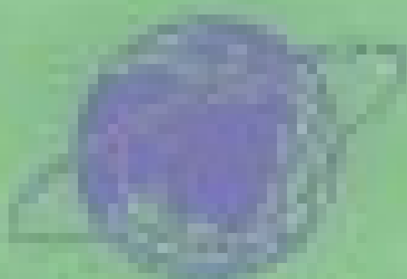
GAO DENG SHU XUE

下册

楚天舒
刘晓君 主编

讯 通 出 版 社

高等数学



高 等 数 学

下 册

楚天舒
主 编
刘晓君

讯 通 出 版 社

责任编辑：胡　秦
封面设计：陈庆国

内 容 提 要

本书是根据现行有关课程的教学大纲编写而成的，分为上、下两册。下册的内容包括无穷级数、多元函数微分法、常微分方程、重积分、曲线积分与曲面积分、矢量分析与场论初步。

该书可作为高等师范院校的物理、化学、电子、计算机等专业的高等数学课的教学用书，也可以作为电视大学有关专业的教学参考书。

高 等 数 学
下 册
楚天舒 刘晓君 主编
讯通出版社出版发行
（香港九龙大角嘴6－80号）
山东农业大学印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 印张10.7 字数268千字
版次1999年7月第1版 印次1999年7月第1次印刷
印数1－3000
ISBN 962－8311－34－4

定价：12.50元

前　言

本书是根据现行有关课程的教学大纲的要求编写而成的，分为上、下两册。

该书本着教学改革的精神，力图体现非数学专业的高等数学课程的特点，编写时注意精选内容，降低难度，适当拓宽知识面。作者根据多年讲授该课的实践经验和体会，力求加强基本概念和定理的阐述，深入分析教学内容的重点和难点，着重于培养学生分析和解决问题的实际能力。

本书力求具有简而明的特色，以便更好地让任课教师发挥自己的教学风格和培养学生的自学能力。书中不带“*”号的章节，理论体系完整，适用于各专业。带“*”号的章节，各专业可根据本专业的特点选讲。

参加本书编写工作的有主编：楚天舒（第一、七、九、十、十一章）、刘晓君（第八章）；副主编：武世文（第十三、十四章）、杨瑞峰（第十二章）、张占英（第二、三章）；编委：郝建丽（第六章）、张凤霞（第五章）、牛裕琪（第四章）。楚安夫教授完成了全书的统稿工作，并提出了许多修改意见，在此表示衷心地感谢。

由于编者水平所限，本书的缺点或错误在所难免，敬请读者批评指正。

编者

1999年7月

目　　录

第九章　无穷级数

无穷级数和微分、积分一样，是高等数学的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的一种强有力的工具．在自然科学、工程技术中都有广泛的应用．在这一章里，主要讨论常数项级数、幂级数以及付里叶级数，并结合着研究与此有关的某些问题．

§9.1　常数项级数的一般概念

一　基本概念

我们先来看一个例子．

例 1　一尺之棰，日取其半，求逐日所截下的木棍之累计长度．

解　先看 5 日累计截下的长度

$$A_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32}$$

一般地 n 日累计截下

$$A_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

现在要问，日复一日永无止境地截下去，究竟"共计"截下多少长度呢？我们形式地把这个长度记作

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \tag{1}$$

这里出现了对无穷多个数量依次相加求和的问题，从这个简单的

例子.可以引出无穷级数的定义如下：

定义 1 设给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots \tag{2}$$

形式地依次把它们加起来，写成式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3}$$

我们把式子(3)称为无穷级数，简称级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

(2)式中的各数称为级数(3)的项，u_n 称为第 n 项或称通项(一般项). 各项都是常数的级数称为常数项级数(或数项级数). 以后我们还会遇到每一项都是函数的级数，称这样的级数为函数项级数. 为书写简便，在不引起混乱的情况下，我们把$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 简记为$\sum u_n$.

上述级数的定义只是一个形式上的定义，怎样理解级数中无穷多个数量相加呢？它有没有"和"呢？联系上面截木棍的例子，可以从有限项相加求和出发，来观察它们的变化趋势，由此来理解无穷多个数量相加求和的含义.

实际上，我们没有办法把无穷个数真的一一加起来，我们只能把(1)中的第一项加上第二项，再加上第三项，等等，但无论如何也加不完所有的项，然而另一方面我们清楚地看到，所加的项数越多得到的和就越接近于 1，即

$$\lim_{n \to \infty} A_n = 1$$

这个 1 我们就称为(1)的和. 这与实际情况也是相符的，不过这个和不是用普通的算术方法求得的，而是经过了一个从有限到无限的极限运算过程，下面给出级数和的定义.

定义 2 设给定一个常数项级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

作其前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

S_n 称为该级数的前 n 项和(或部分和). 当 $n=1,2,3$ ……时,它们构成了一个新数列 $\{S_n\}$:

$$S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$$

当 n 无限增大时,若部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

则称该级数收敛,S 称为该级数的和,并写成

$$S=\sum u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

若 $\{S_n\}$ 没有极限,则称该级数发散,此时亦称该级数无和.

由此可知,级数 $\sum u_n$ 是否收敛,取决于部分和数列 $\{S_n\}$ 有无极限. 当级数收敛时,其前 n 项和 S_n 是级数的和 S 的近似值,它们之间的差

$$R_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

称为该级数的余项,用 S_n 代替 S 所产生的误差为 $|R_n|$.

例 2 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots aq^{n-1}+\cdots$$

的敛散性($a\neq0$,q 为公比).

解 当 $q\neq1$ 时,它的部分和

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

若 $|q|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$

若 $|q|>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$,故部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限,因此级数发散.

当 $q=1$ 时,$S_n=na\to\infty(n\to\infty)$,故级数发散.

当 $q=-1$ 时，$S_n=\begin{cases}0, & 当 n 为偶数\\ a, & 当 n 为奇数\end{cases}$

故当 $n\to\infty$ 时，S_n 没有极限，因此级数发散.

总之，当 $|q|<1$ 时，级数收敛；当 $|q|\geqslant 1$ 时，级数发散.

例 3 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛并求其和.

证 级数的部分和是

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

因此，该级数收敛，且和 $S=1$.

例 4 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

发散.

证 容易看出，这个级数的项是递减的，因此，

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，所以级数发散.

虽然级数 $\sum u_n$ 的敛散性与其部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性是一回事，但研究级数决不是多余的，因为 S_n 的极限一般不易求出，且用级数处理某些问题更为方便，级数理论决不是数列极限理论的重复，而是有其崭新丰富的内容.

二 无穷级数收敛的必要条件

定理 若级数$\sum u_n$收敛，则其通项的极限为零，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 设级数$\sum u_n$的部分和为S_n，由级数收敛知S_n的极限存在，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

又 $u_n=S_n-S_{n-1}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$

注意 该定理的逆命题并不成立，就是说，由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，并不能推知级数收敛(请参看上面例3). 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数收敛的必要条件而不是充分条件，由该定理，可得下面的推论.

推论 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$(包括极限不存在)，则级数$\sum u_n$必发散.

此推论是判断级数发散的一个有用工具. 例如级数

$1+2+\cdots+n+\cdots$与$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$

都是发散的. 因为这两个级数的通项u_n在$n\to\infty$时都不趋于零.

三 收敛级数的基本性质

从前面几个例子可以看到，判断一个级数敛散性的基本方法是看部分和数列的极限是否存在，此种方法有局限性，因此，需要寻找一些简便易行的判别法. 为此，先要研究级数的性质.

性质1 一个级数加上或去掉有限项，不会改变其敛散性，即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n$同时收敛或同时发散($k$为常数)，但在收敛时，级数的和可能会改变.

证 因为当$n>k$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n$的前$n-k$项部分和为

$$S'_{n-k}=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_n$$

注意到 $$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_k+S'_{n-k}$$

由于 k 是确定的自然数，因此，$u_1+u_2+\cdots+u_k$ 也是常数. 所以 S_n 与 S'_{n-k} 具有相同的敛散性. 即

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散.

当收敛时，其级数的和满足下面的关系

$$\lim_{n\to\infty}S_n=u_1+u_2+\cdots+u_k+\lim_{n\to\infty}S'_{n-k}$$

性质 2 收敛级数的各项乘同一常数所成的级数仍收敛，即若级数 $\sum u_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum cu_n$ 也收敛且收敛于 cS. 这里 c 为常数.

证 设 $\sum u_n$ 的部分和为 S_n，则 $\sum cu_n$ 的部分和为

$$S'_n=\sum_{k=1}^{n}cu_n=c\sum_{k=1}^{n}u_k=cS_n.$$

因 $\sum u_n$ 收敛于 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，故 S'_n 的极限也存在且有 $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n=cS$，即级数 $\sum cu_n$ 收敛且收敛于 cS.

性质 3 若两级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，则级数 $\sum(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且 $\sum(u_n\pm v_n)=\sum u_n\pm\sum v_n$.

性质 3 请读者自己证明.

性质 4 收敛级数加括号后所成的新级数仍然收敛于原来的和.

证 设级数 $\sum u_n$ 收敛于 S，即

$$S=u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n+\cdots$$

按照某一规律加括号后所成的级数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

用 σ_m 表示第二个级数的前 m 项和，而 S_n 表示相应于 σ_m 的第一个级数的前 n 项和，于是有

$\sigma_1=S_2, \sigma_2=S_5, \cdots, \sigma_m=S_n, \cdots$ 显然，当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$. 因此，有 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$

注意 性质 4 的逆命题不成立. 即一个级数若加括号后收敛，不能断言该级数收敛. 例如级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

从首项起每两项加一个括号，得级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

后者收敛而前者却发散.

反之，可以看出，收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛.

另外，根据性质 4 可得如下推论.

推论 若加括号后所成的级数发散，则原来级数也发散.

例 5 判断下列级数的敛散性.

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{10}{3^n}\right)$

解 (1)因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ 发散.

(2)因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln 1=0$，不能说明该级数收敛与发散. 事实上，有

$$S_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，所以该级数发散.

(3)由例 2 等比级数的结果知道，级数

$$\sum\frac{1}{2^n}\text{与}\sum\frac{10}{3^n}\text{都收敛}$$

因此级数$\sum\left(\frac{1}{2^n}-\frac{10}{3^n}\right)$也收敛.

例6 试证调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

证 这里$u_n=\frac{1}{n}$,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,只具备了收敛的必要条件,还不能由此断定该级数收敛或发散.下面证明该级数发散.

依次地把级数的两项、两项、四项、八项、…、2^m项、…括在一起得

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^m+2^m}\right)+\cdots$$

由于 $1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^m+2^m}$$
$$>\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{2^m}{2^{m+1}}=\frac{1}{2},\cdots\cdots$$

因此,这个加括号级数的前$m+1$项的和大于$(m+1)\cdot\frac{1}{2}$,从而这个加括号级数发散,根据性质4的推论,可知调和级数发散.

习　题　9.1

1. 根据下列各级数前几项的规律,写出其一般项.

(1)$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$

(2) $-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$

(3) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$

(4) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$

(5) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$

2. 按定义证明下列级数的收敛性并求其和.

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

(3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

3. 判断下列级数的敛散性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$

(3) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$

(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10^n}+\cdots$

4. 判断下列命题是否正确,正确的给出证明,错误的举出反例.

(1)若 $\sum u_n$ 发散,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

(2)若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散,则 $\sum(u_n\pm v_n)$ 也发散.

(3)若 $\sum u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.