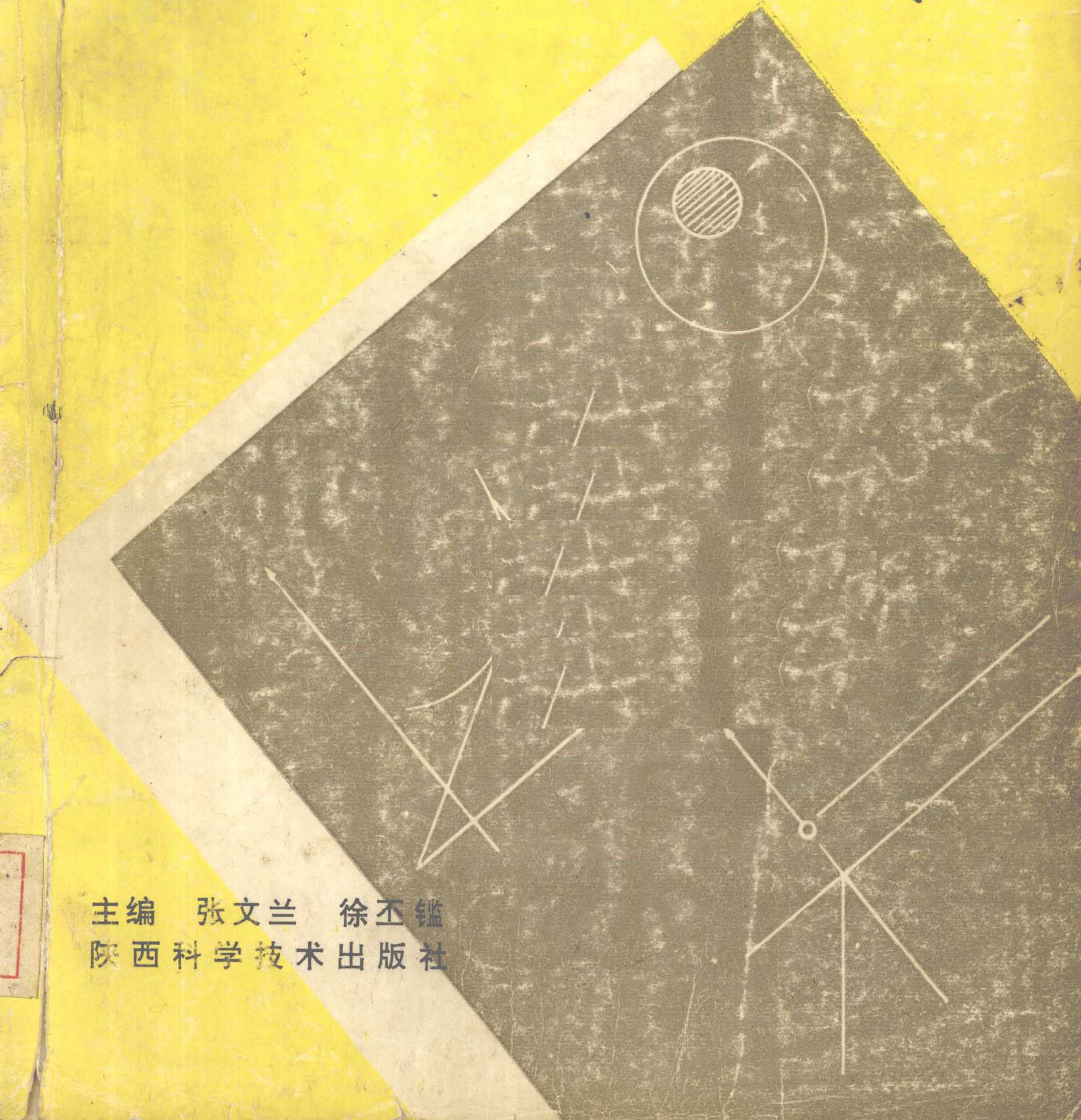
高等工科院校试用教材

高等数学习题课教程



主编 张文兰 徐丕鑑

陕西科学技术出版社

高等工科院校试用教材

高等数学习题课教程

主　编　张文兰　　　　　徐丕鑑
副主编　李林生　赵家瑞　卢孟琳
主　审　马知恩
编　委　(以姓氏笔划为序)
卢孟琳　李林生　张文兰
张新敬　赵家瑞　周永安
徐丕鑑　职桂珍

陕西科学技术出版社

（陕）新登字第 002 号

本书是根据高等工业院校《高等数学课程教学基本要求》为高等数学习题课编写的试用教材．按教学内容的章、节编写，建议按 32—34 学时安排习题课．每次习题课包括：基本要求和主要内容、思考题、例题分析．书后编有阶段检查题和综合练习题是为了培养学生综合分析问题的能力和检查学生的学习效果．

本书结构严谨，条理清晰，综合性较强，并有很强的针对性和可操作性．说理浅显，便于自学，可作为高等工业院校和各类成人高等教育大学一年级本、专科学生"高等数学习题课"试用教材或参考书，也可作为自学高等数学者的指导书．

高等工科院校试用教材
高等数学习题课教程
主编　张文兰　徐丕镒
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街 131 号）
西安市开源新技术研究所排版
新华书店经销　西安理工大学印刷厂印刷
787×1092 毫米　16 开本　19 印张　46.2 万字
1994 年 8 月第 1 版　1994 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3000
ISBN 7-5369-0554-8/G・79
定价：12.60 元

前言

高等数学习题课是完成高等数学基本要求的一个重要的教学环节，是巩固加深教学内容，掌握演题技巧，培养学生分析和解决问题能力等方面的实践性教学环节．为了使高等数学的教学水平再上一个新台阶，为使习题课逐步走上规范化，我们决定编写“高等数学习题课教程”(试用教材).

本书编写中注意到以下几点：

1．努力贯彻高等工业学校《数学课程教学基本要求》.

2．按章、节、次数按排教学内容，建议全书可按 32—34 学时安排习题课．每次习题课包括：基本要求和主要内容，思考题，例题分析，阶段检查题和综合练习题．书后编有各类习题的简单解答.

3．实践性和灵活性是习题课的一个重要特点，本书采用不同风格处理各部分内容．有的章节内容写的全面具体，例题较多，有的章节重点突出，内容简练，有的内容采用表格的形式加以总结，也有的内容通过例题的选取加以概括。任课教师一定要结合学生的具体的情况，灵活处理各部分内容，建议每以习题课重点放在思考题和例题分析两部分，思考题可采用讨论或提问的形式进行，例题分析部分教师可选部分例题加以讲解，另一部分例题可让学生自学完成．书后配有的阶段检查题和综合练习题，可作为学生习题课后的练习题，也可作为学生平时或期末复习之用．我们没有按章、节配备习题，目的是为了培养学生对概念和运算的综合运用能力.

4．本书结构严谨，条理清晰，综合性较强；并有很强的针对性和可操作性，说理浅显，便于自学，可作为高等工业院校和各类成人高等教育大学一年级本、专科学生“高等数学习题课”试用教材，也可作为大学其它年级复习高等数学用书，还可作为教师的教学参考书.

本书在编写过程中得到西安交通大学理学院马知恩教授指导和审阅了全稿，并提出不少宝贵意见．郑洲轻工业学院教材建设委员会，基础部与数学教研室对本书的编写给予了大力支持和指导，在此一并表示忠心的感谢．由于时间仓促，编者水平所限．缺点和错误之处在所难免，希望读者批评、指正.

编者

1994 年 8 月

4.05~5.05

序

高等数学习题课是帮助学生消化、巩固、深入理解教学内容，掌握解题技巧和培养分析问题与解决问题能力的一个重要的实践性教学环节，近年来，由于教学时数的压缩和教室紧张等因素，使习题课这一教学环节在有些学校，受到了一定的影响.郑洲轻工业学院张文兰、徐丕镒等部份数学教师，为了确保习题课的教学质量并使它逐步走上规范化，以进一步提高高等数学课程的教学质量，编写了这本《高等数学习题课教程》，这是值得鼓励的.

本书以高等工业学校工科数学课程教学指导委员会最新修订的教学基本要求为依据，结合我国目前使用面最广的同济大学所编《高等数学》教材，对各章节在提出明确的基本要求的同时，就主要内容进行了简要的概括；书中的思考题是作者们多年教学经验的积累，对消化和深入理解教学内容颇有裨益；典型例题分析可以帮助理解解题思路，掌握解题方法和技巧，供教师选讲和学生自学；阶段检查和综合练习题有助于学生自我检查学习效果，提高综合运用所学知识的能力.

习题课的方式方法根据内容和对象的不同而灵活多样，内容也可根据讲授和对象的具体情况，在保证基本要求的前提下适当增删调整.本书的编排考虑到了这种灵活性.

本书既可作为习题课的教学参考书也可作为读者自学的辅导读物.笔者相信，本书的出版必将会对习题课的建设、对提高高等数学课程的教学质量、产生良好的作用.

西安交通大学理学院院长 教授　马知恩

1994 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函数与极限概念及极限运算

一、基本要求与主要内容

1. 函数

(1) 理解函数概念：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. D 称做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

(2) 了解函数的几个特性

1) 有界性；

2) 单调性；

3) 奇偶性；

4) 周期性.

(3) 了解反函数的概念

(4) 初等函数

1) 掌握基本初等函数(包括幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数) 的定义区间、对应法则、值域及图形.

2) 复合函数，若 $y = f(u), u \in D_1, u = \varphi(x), x \in D_2, W_2 = \{u | u = \varphi(x), x \in D_2\}$ $W_2 \subset D_1$，

则：$y = f(u) = f[\varphi(x)]$ 称为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数.

其中 $x \in D_2$，u 为中间变量.

3) 初等函数，由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数的称为初等函数.

4) 了解双曲函数及反双曲函数.

2. 正确理解数列的极限

(1) 定义：对 $\forall\ \varepsilon > 0$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，总有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称 x_n 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

注意：N 与 n 无关，只与 ε 有关.

(2) 收敛数列的性质

1)(极限唯一性) 数列 x_n 不能收敛于两个不同的数.

2)(极限有界性) 如果数列 x_n 收敛，那么数列 x_n 一定有界.

3. 正确理解函数的极限

(1) 定义如下表格.

	$f(x)\to A$	$f(x)\to 0$	$f(x)\to\infty$
$x\to x_0$ 记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限为 A.	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,即有 $\|f(x)\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小.	任给 $M>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,即有 $\|f(x)\|>M$,称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时无穷大.
$x\to\infty$ 记作 $\lim\limits_{X\to\infty}f(x)$	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $X>0$,使当 $\|x\|>X$ 时,即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A.	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $X>0$,使当 $\|x\|>X$ 时,即有 $\|f(x)\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小.	任给 $M>0$,总存在 $X>0$,使当 $\|x\|>X$ 时,即有 $\|f(x)\|>M$,称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.
$x\to x_0+0$ 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $fx_0+0)$	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时的右极限为 A.	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,即有 $\|f(x)\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时的无穷小.	任给 $M>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,即有 $\|f(x)\|>M$,称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时的无穷大.
$x\to x_0-0$ 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $f(x_0-0)$	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^-$ 时的左极限为 A.	任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,即有 $\|f(x)\|<\varepsilon$,称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时为无穷小.	任给 $M>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,即有 $\|f(x)\|>M$,称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时为无穷大.

(2) 定理

1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且 $A>0$(或 $A<0$),那么就存在点 x_0 的某一去心邻域,当 x 在该邻域内时,就在 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

2) 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

4) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,且当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)时,$f(x)\neq 0$,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{1}{f(x)}=\infty,$$

5) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 α 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

4. 掌握极限的运算

(1) 运算法则

1) 若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm \lim g(x),$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim f(x)\cdot \lim g(x),$$

当$B\neq 0$时,$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

2) 有限个无穷小的和也是无穷小.

3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

4) 若$P(x)$是多项式,则$\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

(2) 判定准则

1) 设在x_0的某一邻域内(x_0可以除外),有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2) 单调有界数列必有根限.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad 或\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

(4) 无穷小的比较

1) 了解高阶、低阶、同阶无穷小,等价无穷小

2) 会用无穷小的代换定理:

$\alpha\sim\alpha,\ \beta\sim\beta$. 如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$存在,则有$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$,注意分子,分母分别整体代换.

3) 当$x\to 0$时,有等价无穷小:

$$\sin x\sim x,\mathrm{tg}x\sim x,\arcsin x\sim x,arc\mathrm{tg}x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,$$

$$\sqrt{1+X}-1\sim\frac{1}{2}x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

二、思考题

1. 在函数的公式表示法中,一个函数是否只能由一个式子表示?

2. 函数$f(x)$满足什么条件时,下列式子才有意义?

(1) $y=\dfrac{1}{f(x)}$, (2) $y=\sqrt[n]{f(x)}$ (n为偶数), (3) $\arcsin\ f(x)$

(4) $y=\log_a^{f(x)}$, ($a>0$且$a\neq 1$)

3. 在数列极限的定义中,ε、N的意义和作用如何?

(1) N是否唯一. (2) N是否与ε有关,是否为ε的函数.

(3) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,前$N$项是否能保证$|x_n-a|<\varepsilon$.

(4) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,就有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{(n+1)}=a$,那么,必有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=1$对吗?

4. 在函数极限的定义中,ε与δ的关系和作用如何?δ是ε的函数吗?

5. 两个无界函数的乘积是否一定无界？

6. 当 $x\to 0$ 时，$\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 与 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 等价，对吗？并计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$.

7. 有人说 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，又有人说是无穷大量，这些说法对吗？

8. (1) 若 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 中一个存在，而另一个不存在，问：$\lim[f(x)\pm g(x)]$ 与 $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 是否存在？

(2) 若 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均不存在，问：$\lim[f(x)+g(x)]$ 与 $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 是否存在？

(3) 若 $\lim f(x)$ 与 $\lim[f(x)g(x)]$ 均存在，问：$\lim g(x)$ 是否一定存在？若 $\lim f(x)=A\neq 0$，结论？

9. 讨论函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？

三、例题分析

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$，　　(2) $y=\lg(\cos(\lg x))$，

(3) $y=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$，　　(4) $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$.

解　(1) 由 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$ 得 $2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi, x\geqslant 0$ 从而

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2.\ (k=1,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

(2) 要使函数有意义，必有 $\cos(\lg x)>0$，$\therefore 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\lg x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$　$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，从而　$10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$　$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(3) 要使函数有意义，必有 $-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x}\leqslant 1, x\neq -1$.

若 $1+x>0$，则有 $-(1+x)\leqslant 2x\leqslant 1+x$，即

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,$$

若 $1+x<0$，则有 $1+x\leqslant 2x\leqslant -(1+x)$ 无解. 所以函数的定义域为 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$.

(4) 当 $\sin 2x\geqslant 0$ 且 $\sin 3x\geqslant 0$ 时，根式才有意义，即 $2k\pi\leqslant 2x\leqslant(2k+1)\pi$. 与 $2k\pi\leqslant 3x\leqslant(2k+1)\pi$ 同时成立. 所以定义域为：$\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cap\left(\dfrac{2}{3}k\pi,\dfrac{2}{3}k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(f(x))]\}=x$，并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x\neq 0,x\neq 1)$.

解　设 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，则 $f_2(x)=f[f_1(x)]$，$f_3(x)=f[f_2(x)]$，$f_4(x)=f[f_3(x)]$，只须证 $f_4(x)=x$ 即可.

$\because f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，　$\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$，

$\therefore f_2(x)=f(f_1(x))=f(f(x))$

$$=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-1+\dfrac{1}{x}}=x,$$

$f_3(x)=f(f_2(x))=f(x)$，　$f_4(x)=f(f_3(x))=f(f(x))=x$，

即　　$f\{f[f(f(x))]\}=x$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x$.

3. 已知 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$ 求 $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\varphi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & \varphi(x)=0,\\ \varphi(x), & \varphi(x)>0.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x. & x>0.\end{cases}=\varphi(x).$

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & \varphi(x)=0,\\ -\varphi^2(x), & \varphi(x)>0.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0.\\ -x^2, & x>0.\end{cases}=\psi(x).$$

$\left.\begin{array}{r}\varphi[\psi(x)]=0\\ \psi[\psi(x)]=0\end{array}\right\}$是因为对一切 x 有 $\psi(x)\leqslant 0$.

4. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

证明 对任意 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$,

$\because \left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x^2+x-2|=|x-1||x+2|$,而 $x\to 1$,不妨设 $0<x<2$,则有 $|x+2|<4$,

$\therefore \left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x-1||x+2|<4|x-1|$ 只要取 $4|x-1|<\varepsilon$, $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ 就行了.

$\therefore$ 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,总有 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$ 成立,即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x-1}=3.$$

5. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$, (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$, (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}=2.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{1}{3}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0.$

注:当分子、分母的极限均为 0 时,我们先将它们共有零因子消去,再求极限. $(x\to 1, x\neq 1)$.

6. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{4x^3-1}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3-1}{x^3-x+3}$, (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x-1)(3x-1)}{(3x+2)^3}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{4-\dfrac{1}{x^3}}=0,$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}=\infty,$

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^3} = \dfrac{1\times2\times3}{3^3} = \dfrac{2}{9}.$

注：当分子、分母都是 x 的有理多项式时，且 $x\to\infty$，我们可以根据它们的次数来求出极限，即：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b^n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\text{ 时},\\ 0, & m<n\text{ 时},\\ \infty, & m>n\text{ 时}.\end{cases}$$

7. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$,

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$,

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4}=\dfrac{9}{2}.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{3-x-(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}=-2\sqrt{2}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}=\sqrt{2}.$

注：当分子或分母中有根式时，先把分子或分母有理化，再求极限.

下面利用极限存在准则和两个重要极限求极限

8. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^n$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{2n}}=\dfrac{1}{e}\cdot e^0=e^{-1}.$

9. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\mathrm{tg}2x}$.

解法 1 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin5x}{5x}\cdot\dfrac{2x}{\mathrm{tg}2x}\cdot\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{2}.$

解法 2 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\sin2x}\cos2x=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin5x}{5x}\cdot\dfrac{2x}{\sin2x}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\cos2x\right)=\dfrac{5}{2}.$

10. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}}\right]^{-6}=e^{-6}$.

11. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$.

12. 求$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}$.

解　令$t=x-\pi$，则$x=t+\pi$，当$x\to\pi$时，$t\to 0$，所以，

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}(\pi+t)}{\sin(\pi+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}t}{-\sin t}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}t}{t}\cdot\frac{t}{\sin t}=-1$.

注意：如果这样做$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\mathrm{tg}x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}=1$时错的，因为这里$x$不是趋向于0.

13. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

证明　$\because\ \frac{1}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{i}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$，$(i=1,2,\cdots,n)$，

$$\therefore\ 1=\frac{1+\cdots\cdots+1}{n}\leqslant\frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$$
$$\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\sqrt[n]{n}$$

又　$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由夹逼定理.

$\therefore$ 有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

下面利用等价无穷小代换求极限.

14. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{e^x-1}$.

解　由于当$x\to 0$时，$\mathrm{tg}x\sim x$，$e^x-1\sim x$，

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}x}{(\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x})(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x})x}=1.$$

15. 设$\alpha(x)=x^3-3x+2$，$\beta(x)=c(x-1)^n$，求c与n使当$x\to 1$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小.

解　$\because\ \alpha(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$，

由$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}=3$，

$\therefore$ 取$c=3$，$n=2$有$\beta(x)=3(x-1)^2$，

当$x\to 1$时，$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

下面利用左、右极限求极限.

16. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$. 即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

17. $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$. 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 $\because f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$,

$f(0+0)\neq f(0-0)$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

其它类型.

18. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

解 $\because \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$,

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$.

19. 证明:数列 $x_0=1, x_n=\sqrt{2\sqrt{x_{n-1}}}, n=1,2,\cdots$ 有极限,并求其极限.

证明 由所设条件 $x_0=1, x_1=\sqrt{2\sqrt{x_0}}=2^{\frac{1}{2}}, x_2=\sqrt{2\sqrt{x_1}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2^2}},\cdots,$

$$x_n=2^{\frac{1}{2}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}.$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0 \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{x\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2$.

第二节　函数的连续性

一、基本要求与主要内容

1. 理解函数的连续性

(1) 概念:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 其中包含三点:

1) $f(x)$ 在 x_0 的某一邻 域内(包含 x_0) 有定义,即 $f(x_0)$ 存在,

2) 当 $x\to x_0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,

3) 二者相等,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 左连续、右连续

左连续即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，右连续即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

(3) 等价定义

1) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

2) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，$\forall\ \varepsilon>0,\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，总在 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处满足：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

2. 会判断间断点及其分类

若函数 $f(x)$ 不满足 1—(1) 中三种情况之一，则称 $f(x)$ 在 x_0 不连续，x_0 为不连续点，即间断点.

对于间断点有以下分类：

Ⅰ类

$f(x_0+0)$

$f(x_0-0)$ 都存在
- 可去间断点：$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$（或 $f(x_0)$ 不确定），
- 跳跃间断点：$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$.

Ⅱ类

不是第 Ⅰ 类间断点的任何间断点是第 Ⅱ 类间断点.

例如：无穷间断点，振荡间断上属于第 Ⅱ 类间断点.

3. 理解初等函数的连续性.

(1) 设函数 $f(x),g(x)$ 都在同一区间上连续，则：$f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 在此区间也连续.

(2) 设 $z=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$z_0=\varphi(x_0)$，$y=f(z)$ 在 z_0 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续. 由此解决了复合函数求极限问题，$\lim[f(\varphi(x)]]=f[\lim\varphi(x)]$.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上单值、单调连续，且 $f(a)=\alpha,f(b)=\beta$，则 $x=\varphi(y)$ 在$[\alpha,\beta]$上也是单调连续的. 由此解决了反函数求极限问题.

(4) 初等函数在其定义区间内都是连续的，如果把"区间"换为"域"，结论如何？

4. 了解闭区间上连续函数的性质.

(1) 最大、最小值定理.

在闭区间$[a,b]$上连续函数 $f(x)$ 在该区间至少取得最大值，最小值各一次.

(2) 介值定理

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$、$f(b)$ 之间的任一实数 C，至少有一点 $\zeta\in(a,b)$，使 $f(\zeta)=c$.

特别地：如 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ζ，使得 $f(\zeta)=0$.

二、思考题

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，则$[f(x)]^2$ 在 x_0 也连续. 设 $f(x)$ 在 x_0 不连续，则$[f(x)]^2$ 在 x_0 处也不连续，这

种说法对吗？

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，$g(x)$ 在 x_0 不连续，问：$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 是否连续？

3. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 都不连续，问：$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 是否连续？

4. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，则在 (a,b) 内函数存在最大值和最小值，这种说法是否正确？

5. 有人说：如果 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，那么，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，对吗？

6. 怎样求幂指函数 $y=[U(x)]^{V(x)}$ 的极限？(另外的方法见本书 31 页)．

三、例题分析

1. 讨论下列函数的连续性

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & (x\neq 0),\\ 1, & x=0.\end{cases}$，　(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) ∵ 当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，

当 $x<0$ 时，$f(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$，

∴ 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 为连续的．

又 ∵ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{\sin x}{x}\right)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$．

∴ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

即 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点且为跳跃间断点．

(2) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 连续．

又 ∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0)$，

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续．

注：讨论分段函数的连续性时，先讨论分段区间的连续性，再利用左，右极限讨论分界点的连续性．若有间断点，要说明其类型．

2. 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}arc\mathrm{tg}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$，　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{ctg}x}$，

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3x-3\sin x+2}{\sin^4x-4\sin x+3}$，　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$．

解　(1) ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

∴ $\lim\limits_{x\to 0}arc\mathrm{tg}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=arc\mathrm{tg}1=\dfrac{\pi}{4}$．

(2) 原式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\cos x}=e$．

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x-1)(\sin^2x+\sin x-2)}{(\sin x-1)(\sin^3x+\sin^2x+\sin x-3)}$