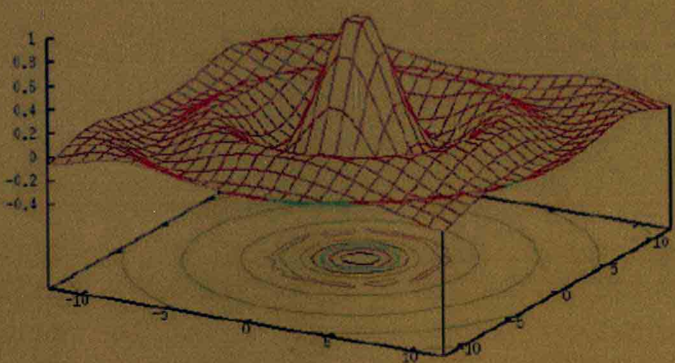
再生核空间引论

AN INTRODUCTION WITH APPLICATIONS
TO REPRODUCING KERNEL SPACES

刘振杰 著



東北林業大學出版社

再生核空间引论

刘振李 著

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

再生核空间引论/刘振杰著. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2008. 12
ISBN 978 - 7 - 81131 - 381 - 9

Ⅰ. 再…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 核空间　Ⅳ. 0177. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 196008 号

责任编辑：卢　伟
封面设计：于学媛

NEFUP

再生核空间引论
ZaiShenghe Kongjian Yinlun
刘振杰　著
东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
哈尔滨天兴速达印务有限责任公司印装
开本 850 × 1168　1/32　印张4. 875　字数121千字
2008 年 1 2 月 第 1 版　2008 年 1 2 月 第 1 次 印 刷
印数 1—1 000 册
ISBN 978-7-81131-381-9
O · 104　定价：28. 00 元

内 容 简 介

本书系统地介绍了再生核空间的基本理论和它在几个方面的典型应用,侧重于再生核的应用技巧及相应的重要结果.全书共分为六章,第一章介绍了再生核的基本理论;第二章至第四章分别介绍了一元再生核空间、二元和多元再生核空间以及具有再生核的乘积空间,为了避免重复讨论,在各自空间中讨论了不同类型的具体应用问题;第五章讨论了一些非线性问题利用再生核处理方法转化为线性问题,得到了相应问题的精确解表达式;第六章介绍了再生核与其他学科相结合,得到了一些新的理论和算法.

本书可供大学数学专业和理工科有关专业的研究生、教师及研究人员参考.

前　　言

再生核最初有两种提法，一种是E. H. Moore提出的，此核 $K(x,y)$ 对函数族 $F(x)$ 中的任一个函数具有再生性[1]，即

$$f(y)=(f(x),K(x,y))$$

另一种是 N. Aronszajn 提出的，一个函数族 $F(x)$ 对应一个核函数 $K(x,y)$，通过此核可再生函数族[2].

第一种提法是研究一个给定的核 $K(x,y)$ 在不同领域（如积分方程、群论、一般度量几何等）的应用问题. 起源于 Hilbert 发展起来的积分方程理论. 那时的核被认为是正定积分算子的连续核. J. Mercer 在 20 世纪 20 年代以及 E. H. Moore 在 20 世纪 30 年代各自发现了所有正定积分方程的连续核具有如下性质：

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(y_i,y_j)\xi_i\xi_j \geqslant 0 \qquad (*)$$

Moore 讨论的是抽象集合上具有上述性质的核函数 $K(x,y)$，在一般的分析中以“正定 Hermite 矩阵”的名词应用在广义积分方程中，他证明了对每一个正定的 Hermite 矩阵，对应一个函数族，形成具有内积为 (f,g) 的 Hilbert 空间，且在此空间中的核具有再生性. 他的这种发现将再生核的两种说法联系起来，这一理论被 S. Bochner 在 20 世纪 30 年代以“正定函数”的名词提出[3]. Bochner 研究的是具有实变量 x 的连续函数 $\varphi(x)$，令核函数 $K(x,y)=\varphi(x-y)$，则此核函数 $K(x,y)$ 具有性质（ * ）式，并将此核应用到 Fourier 变换理论中. 这种思想是被 A. Weil 概括总结出来的[4]，并

被 I. Gelfand, D. Raikoff, R. Godement 和其他一些研究拓扑群的人以“正定函数”或“正定型函数”的名词所应用[5,6].

第二种提法主要是对函数族 $F(x)$ 感兴趣，而相对应的核函数 $K(x,y)$ 基本上作为研究这个族中的函数的工具，这类研究的一个基本问题是对于给定的函数族 $F(x)$，核的显式构造和计算问题. 起源于 20 世纪初由 S. Zaremba[7] 关于调和与双调和函数边值问题. Zaremba 最初是对特殊情形下引入相对应于一个函数族的核，并阐明了它的再生性质，但是他没有发展成一般的理论，这些核的再生性质被 S. Bergman[8] 注意到，直到 20 世纪 30 年代他才引入相对应于一元或多元调和函数与解析函数族的核. 这些核在一元或多元复函数理论中得到许多重要应用. 如在单或多连通保角映射中以及在不变的 Riemann 矩阵中的应用等. Bergman 将 Zaremba 应用再生核解决边值问题的思想进一步深入，在研究中证明了再生核是解决 Eliptic 型偏微分方程边值问题的有利工具. 联系到 Hada - mard 各种方法的运用，建立了再生核与不同区域上微分方程解之间的关系. 对于偏微分方程，在一定区域上解系的核证明是与相应的 Neuman 和格林函数完全不同的函数. 再与再生核在偏微分方程中的应用相对应，又得出了再生核与分析函数的 Bergman 核之间的关系，同时多连通区域上保角映射中的再生核应用作为重要的映射函数也得到了很大进展，且被 Bergman 核简单地表达出来[9,10].

1943 年，N. Aronszajn 概括前人的工作，形成了包括特例 Bergman 核函数在内的较为系统的再生核一般理论[11]，总结了许多再生核的构造方法. 从此，再生核理论为每一个特殊例子的研究奠定了基础，证明了再生核具有正定的 Hermite 矩阵性质，这个理论又将再生核的两种提法再次统一起来.

后来，国内外许多学者在再生核方面的研究做了大量工作，总结出许多再生核的构造方法，以及在再生核空间中利用核函数的

再生性求解方程的近似解.

S. V. Hruscer, N. K. Nikolskii, B. S. Pavlov 把再生核与空间的无条件基概念联系起来,给出 Hardy 空间 H^2 中某类子空间的再生核序列成为无条件基的等价条件[12].

Jacob Burbea[13,14]和 S. Saitoh[15]分别对一些与具体的核函数相关联的再生核空间之间的关系进行了讨论.

徐利治[16]等人把 Bergman 核应用于 $L^2(B)$ 中解析函数二重积分的降维展开问题上,提出了一个能够对一些预先给定的复数域上精确解降维公式确定适合区域的方法.

王小林[17]利用 Hilbert 子空间理论,借助于再生核,给出三次样条函数表达式,并给出 Cauchy 型奇异积分的近似求解公式.

1970 年,F. M. Larkin 给出了具有再生核的 Hilbert 函数空间中最佳逼近原则[18];1974 年,M. M. Chawla 给出在具有再生核 Hilbert 空间中,具有多项式精度的最佳逼近原则[19].

崔明根、邓中兴等人[20~22]引入了再生核空间 W_2^1,给出了再生核的有限表达式,给出了最佳插值逼近泛函的解析表达式,研究了一元的第一类、第二类 Fredholm 积分方程与适定和不适定算子方程求解问题,以及最佳数值原函数等问题.

文松龙等人在 W_2^2 空间中分别讨论了最佳插值逼近算子[23],W 空间中的有界线性泛函最佳逼近[24],W_2^1 空间中有界线性算子方程的数值解法.

吴勃英在 W_2^2 空间中研究了第一类算子方程的近似解[25],最佳 Hermite 插值逼近算子[26],引入了 $W_2^2[0,+\infty)$空间,讨论了该空间中的数值积分公式[27].

钟坦谊等人研究了 $W_2^2[a,b]\otimes W_2^2[c,d]$空间中最佳 Hermite 插值逼近算子[28],W_2^2 空间中一元第一类算子方程的 Hermite 数值解[29],W_2^2 空间中一元第一类 Fredholm 积分方程 Hermite 数值

解[30].

张艳英利用再生核空间技巧给出了 $W_2^1(D)$ 空间中多元第二类 Fredholm 积分方程的解析解[31]. 施云慧也利用再生核空间技巧给出了线性常微分方程组及二元第二类 Fredholm 积分方程的数值解[32]. 李云晖引入了 $W_2^{2,0}[0,+\infty)$ 空间,讨论了一类积分——微分方程解的存在唯一性和精确解的表示[33]. 李春利[34]又利用再生核空间的良好性质求解非线性算子方程,并给出其精确解的表示.

近些年,国外学者 Quiggin, Peter 在再生核空间中讨论了插值理论中的一个乘法因子[35]. Adams, T. Gregory 讨论了解析的再生核和乘法算子[36]. Saitoh, Saburou 研究了再生核 Hilbert 空间中的等距和部分等距变换[37]. S. Saitoh 和 D. Alpay 等人[38,39]概括了前人研究成果,总结并深入研究再生核的基本理论,进一步拓展了再生核的应用范围,建立了线性变换的基本定理;以多种积分变换形式建立多种形式等距恒等式和反演公式;对 Laplace 变换给出了具体的函数逼近应用;讨论了一般情况下的非线性变换,对具体的非线性变换给出自然范数不等式. G. Rodriguez 等给出有限矩问题的数值解[40]. Ling Jie 等人给出计算再生核的一个新方法[41]. 此外,张新建[42]等人给出了与一般线性微分算子有关的 $W_2^m[a,b]$ 空间再生核构造的普遍方法,利用再生核证得了 m 阶微分算子插值样条与 $W_2^m[a,b]$ 中最佳插值逼近算子的一致性,使得文献[21],[43]的结果均为其特例. 最近几年,崔明根和他的博士生们对于再生核空间中解决非线性问题进行了深入研究,有了新的突破和进展,得到了很多相应结果[65-68,76-78].

本书是在作者所撰写的哈尔滨工业大学硕士学位论文基础之上,根据作者多年的科研成果,同时汇集了其他学者的一些最新研究成果编写而成. 全书共分为六章,主要介绍再生核空间的一些基本理论及其具体应用. 再生核空间是研究数值分析的比较理想的空间框架,它

的优良数值表现力就在于该空间中存在一个核函数 $R_x(y)$，使得对于固定的 x 和相应的空间中的函数 $u(y)$，通过内积表现出再生性：$u(x)=(u(y),R_x(y))$，于是对于数值分析中最基本的取值运算 $I_iu=u(x_i)$ 有一个连续的表示 $u(x_i)=(u(y),R_{x_i}(y))$，正是因为这种可以把离散的数值问题连续表现出来的性质，使得各类数值问题的最佳化成为可能. 因此，本书侧重于再生核技巧、方法的应用，这对于从事再生核方面研究的科技人员、教师及学生都能有所帮助，可作为教材或参考用书，真诚地希望能起到抛砖引玉的作用.

本书在撰写过程中，曾分别得到哈尔滨工业大学崔明根教授和吴勃英教授、哈尔滨理工大学邓彩霞教授、哈尔滨学院贾宗福教授和李云晖教授的关怀与帮助，在此表示衷心感谢；同时也感谢东北林业大学出版社的编审同志给予的大力支持与协助.

由于作者缺乏经验，水平有限，书中疏漏和不妥之处在所难免，希望读者不吝赐教，批评指正.

作　者

2008 年元月于哈尔滨

目　　录

第 1 章　再生核理论简介

再生核理论是有关 Hilbert 函数空间的理论，是一种工具性知识. 本书所讨论的内容都是在具有再生核的 Hilbert 函数空间中进行的，为此首先将再生核理论作以简要介绍，详细内容可参见文献[11]和[45,46].

1.1　再生核的定义及基本性质

1.1.1　再生核的定义

定义 1.1　设 H 是 Hilbert 函数空间，其元素是某个抽象集合 B 上的实值或复值函数，内积用下式表示：

$$(f,g)=(f(t),g(t))_t,\quad f,g\in H$$

若对任何 $s\in B$, $K(t,s)$ 作为 t 的函数是 H 中的元素，而且对任何 $s\in B$ 及 $f\in H$，有

$$f(s)=(f(t),K(t,s))_t$$

则称 $K(t,s)$ 是 Hilbert 函数空间 H 的再生核，称 H 是再生核空间.

1.1.2　再生核的基本性质

性质 1　若 Hilbert 函数空间 H 有再生核 $K(t,s)$，则空间 H 的再生核唯一.

性质 2　Hilbert 函数空间 H 有再生核的充分必要条件是 $\forall s\in B$，$f\to f(s)$ 都是 H 上的有界泛函.

性质 3　若 $K(t,s)$ 是 Hilbert 函数空间 H 的再生核，则

$$\max_{\|f\|=1}|f(t)|=\sqrt{K(t,s)}=\|K(t,s)\|_s$$

这里的范数是由内积 $\|\cdot\|_s=(\cdot,\cdot)_s^{\frac{1}{2}}$ 决定的.

性质 4 若 Hilbert 函数空间存在再生核 $K(t,s)$，则当 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$ 时，必有 $f_n\xrightarrow{\text{逐点}}f$；又当 $K(t,t)$ 在 $E\subset B$ 上有界时，必有 $f_n\xrightarrow{\text{一致}}f$.

性质 5 再生核是正定的，即对 $s_1,s_2,\cdots,s_N\in B$ 及复数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$，总有 $\sum\limits_i\sum\limits_j K(s_i,s_j)\overline{\alpha_i}\alpha_j\geqslant 0$.

性质 6 令 $K(t,s)$ 为 Hilbert 函数空间 H 的再生核，则有

$$K(t,t)\geqslant 0;\quad K(t,s)=\overline{K(s,t)};\quad |K(t,s)|^2\leqslant K(s,s)K(t,t)$$

性质 7 设函数 $K(t,s)$ 在抽象集合 B 上是正定的，则可构造一个 B 上的 Hilbert 函数空间 H 以 $K(t,s)$ 为再生核.

性质 8 设 H_1 是 Hilbert 函数空间 H 的子空间，$K(t,s)$ 是子空间 H_1 的再生核，$h\in H$，则公式

$$f(s)=(h(t),K(t,s))_t$$

给出了 H 中的元素 h 在子空间 H_1 上的投影.

性质 9 若 $K(t,s)$ 是 Hlibert 函数空间 H 的再生核，则其所有的闭线性子空间均以 $K(t,s)$ 为再生核.

性质 10 若 $K(t,s)$ 是 Hlibert 函数空间 H 的再生核，$\{g_i(t)\}$ 是 H 中的正交系，$\{\alpha_i\}$ 是满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$ 的数列，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i||g_i(t)|\leqslant\sqrt{K(t,t)}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

例 1 设 $\mathbb{C}$ 是复数集，对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，定义内积 $(\alpha,\beta)=\alpha\overline{\beta}$，则 1 是复数集 $\mathbb{C}$ 在该内积定义下的再生核.

证明 显然 $1\in\mathbb{C}$；又 $(\alpha,1)=\alpha\cdot\overline{1}=\alpha$，进而满足再生性质，

于是由定义 1.1 知,1 为复数集$\mathbb{C}$ 在内积$(\alpha,\beta)=\alpha\bar{\beta}$ 下的再生核.

对于例 1,当内积定义为$(\alpha,\beta)=\frac{1}{\lambda}\alpha\bar{\beta}(\lambda\in\mathbb{R}^+)$时,可验证 λ 是复数集$\mathbb{C}$ 在该内积定义下的再生核. 由此可知虽是同一个数集,当内积定义不同时,所得到的 Hilbert 空间是不同的,此时再生核也是不同的,这与性质 1 是一致的.

例 2 $H^1=\{f(x)\mid f(x)$是$[0,+\infty)$上绝对连续的复值函数且$f(0)=0,f'(x)\in L^2[0,+\infty)\}$,对$\forall f,g\in H^1$,定义内积:

$$(f,g)=\int_0^{\infty}f'(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x$$

则 $K_1(x,y)=\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(|x+y|-|x-y|)$是 H^1 的再生核.

证明 显然$\forall y\in[0,+\infty)$,$K_1(x,y)$作为 x 的函数是 H^1 中的元素;对$\forall f(x)\in H^1$,

$$\begin{aligned}(f(x),K_1(x,y))_{H^1}&=\int_0^{\infty}f'(x)\frac{\partial}{\partial x}K_1(x,y)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{y}f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=f(y)-f(0)=f(y)\end{aligned}$$

进而 $K_1(x,y)$为 H^1 的再生核.

1.1.3 再生核的表示

定理 1.1 若 H 是可分的 Hilbert 函数空间,而且它有再生核 $K(t,s)$,$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$是 H 的标准正交基,则

$$K(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(t)\overline{\varphi_i(s)}$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K(t,s)-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\overline{\varphi_i(s)}\right\|_t=0$$

1.2 再生核的运算

1.2.1 再生核的和

定理 1.2 设 H_1,H_2 是同一个集合 B 上的两个 Hilbert 函数空间，它们的范数分别为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$，$K_1(t,s)$ 与 $K_2(t,s)$ 分别是 H_1,H_2 的再生核，那么 K_1+K_2 是所有形如 $f=f_1+f_2(f_1\in H_1,f_2\in H_2)$ 的函数所形成的 Hilbert 空间 H 的再生核，H 的范数由下式定义

$$\|f\|^2=\min\{\|f_1\|_1^2+\|f_2\|_2^2\}$$

其中极小值是对一切分解 $f=f_1+f_2(f_1\in H_1,f_2\in H_2)$ 而取的.

注 这个定理可以推广到 n 个情形，即 $K(t,s)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,s)$.

1.2.2 再生核的差

设 K_1 与 K 都是 B 上的正定的二元函数，若 $K(t,s)-K_1(t,s)$ 在 B 上正定，则记作 $K_1\ll K$. 可以验证，在 B 上正定的函数族中，“$\ll$”确定了一个偏序.

定理 1.3 设 H,H_1 分别是具有范数 $\|\cdot\|,\|\cdot\|_1$ 的 Hilbert 空间，K,K_1 分别是 H,H_1 的再生核，且 $K_1\ll K$，则 $H_1\subset H$，且对每个 $f_1\in H_1$，均有 $\|f_1\|_1\geqslant\|f_1\|$.

定理 1.4 设 H,H_1 分别是具有范数 $\|\cdot\|,\|\cdot\|_1$ 的 Hilbert 空间，$H_1\subset H$，K 是 H 的再生核，若对每个 $f_1\in H_1$，均有 $\|f_1\|_1\geqslant\|f_1\|$，那么 H_1 具有再生核 K_1，且满足 $K_1\ll K$.

1.2.3 再生核的积

定理 1.5 设 H_1, H_2 是集合 B 上的 Hilbert 函数空间，$K_1(t_1, s_1)$ 与 $K_2(t_2, s_2)$ 分别是 H_1, H_2 的再生核，令

$$K(t_1, t_2, s_1, s_2) = K_1(t_1, s_1) K_2(t_2, s_2)$$

则直积 $H = H_1 \otimes H_2$ 以 $K(t_1, t_2, s_1, s_2)$ 为其再生核.

1.2.4 再生核的极限

设 $\{B_n\}$ 是集合 B 中满足下述条件的集族：

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots, \quad B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots$$

H_n 是定义在 B_n 上的 Hilbert 函数空间，对于每个 $f_n \in H_n$，以 f_{nm} 表示 f_n 在集合 $B_m \subset B_n$ 上的限制（$m \leqslant n, f_{nn} = f_n$）. 设 H_n 在下述意义下构成一个递减序列：对每个 $f_n \in H_n$ 和 $m \leqslant n, f_{nm} \in H_m$；又设 H_n 的范数 $\|\cdot\|_n$ 在下述意义下构成一个递增序列；对每个 $f_n \in H_n$，每个 $m \leqslant n$，$\|f_{nm}\|_m \leqslant \|f_n\|_n$；再设每个 H_n 具有再生核 $K_n(t, s)$，则有如下定理.

定理 1.6 在上述关于 H_n 的假设条件下，再生核序列 $\{K_n(t,s)\}$ 收敛于一个在 B 上定义的函数 $K_o(t,s)$，且 $K_o(t,s)$ 是具有下述性质的定义在 B 上的函数 f_o 所构成的 Hilbert 空间的再生核.

(1) f_o 在 B_n 中的限制 $f_{on} \in H_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_{on}\|_n < \infty$，

其中 $f_o \in H_o$ 的范数由下式定义：

$$\|f_o\| = \lim_{n\to\infty} \|f_{on}\|_n$$

1.3 再生核的偏导数

设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，再生核 $K(x,y):I\times I\to\mathbb{C}$，定义算子 $\Delta_{x,h}$ 和 $\Delta_{y,h}$ 如下：

$$\Delta_{x,h}K(x,y)=K(x+h,y)$$

$$\Delta_{y,h}K(x,y)=K(x,y+h)$$

其中 $\forall h\in\mathbb{R}$，都有 $(x+h,y),(x,y+h)\in I^2$. 对于 $m\in\mathbb{N}$，$h\in\mathbb{R}$，定义 I_{mh} 区间使得 $\forall x\in I$，都有 $x+mh\in I$，由于 $|h|$ 可以充分小，从而 I_{mh} 非空. 定义 $\delta_{mh}:I_{mh}^2\to\mathbb{C}$，使

$$\begin{aligned}\delta_{mh}(x,y)&=(\Delta_{y,h}-1)^m(\Delta_{x,h}-1)^mK(x,y)\\&=\sum_{p,q=0}^{m}(-1)^{p+q}\binom{m}{p}\binom{m}{q}K(x+ph,y+qh)\end{aligned}$$

定理 1.7 若 $K(x,y)$ 是 I^2 上的再生核，则 δ_{mh} 是 I_{mh}^2 上的再生核.

证明 设 $n\in\mathbb{N}$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I_{mh}^n$，那么只需证明 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\delta_{mh}(x_i,x_j))(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$ 是半正定的.

令 $x_{np+i}=x_i+ph,p=0,1,2,\cdots,m$. 因为 $K(x,y)$ 是再生核，所以 $n(m+1)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(K(x_s,x_t))_{s,t=1}^{n(m+1)}$ 是半正定的[80].

记

$$\boldsymbol{A}^{pq}=(K(x_i+ph,x_j+qh))_{i,j=1}^{n},\ p,q=0,1,2,\cdots,m$$

则对任何 $(X_0,X_1,\cdots,X_m)\in C^{m+1}$，$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}=\sum\limits_{p,q=0}^{m}\boldsymbol{A}^{pq}X_p\overline{X}_q$ 是半正定的(详见文献[80]命题 2.1). 取

$$X_p=(-1)^p\binom{m}{p},\ p=0,1,2,\cdots,m$$

则 n 阶方阵