

教育部中小学全效学习方案研究与实验项目

教育部新课程国家级课题成果



新课标全程学案

高中数学

选修2-1

配套人民教育出版社实验教科书

B版

丛书主编◎杨光宇

灵活运用思维方法
全面提高数学素养



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

教育部中小学全效学习方案研究与实验项目

教育部新课程国家级课题成果

新课标全程学案丛书

高中数学

(选修 2-1)

丛书主编 杨光宇

本书编写者 杨光宇



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新课标全程学案. 高中数学. 2-1: 选修/杨光宇主编. —北京: 北京大学出版社, 2008. 7
ISBN 978-7-301-13888-5

I. 新… II. 杨… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 076324 号

书 名: 新课标全程学案·高中数学(选修 2-1)

著作责任者: 杨光宇 主编

责任编辑: 李淑方 蔡文玲

标准书号: ISBN 978-7-301-13888-5/G·2383

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子信箱: zyl@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62767346 出版部 62754962

印 刷 者: 河北滦县鑫华书刊印刷厂

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 23 印张 350 千字

2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 36.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: (010)62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

出版说明

《新课标全程学案·高中数学》丛书是全国数学名师杨光宇在其独创的“学案教学法”基础上编写的一套教案与学案相统一的教学用书。

本丛书以数学课程标准为总纲,以人教社数学教材(B版)为主线,以学生认知水平为标准,结合了多年教学积累的优秀而独特的解题方法,汲取了近几年的全国高考试题以及模拟试题的精华。学案既有条理清晰的知识点总结,经典的例题素材,又有精心挑选的习题;源于教材,又高于教材,从中既能找到课本的影子,又跳出了书本并开阔了学生的视野,使其具有丰富的数学综合能力。学案极具系统性和全面性,是学生同步学习和综合复习的必备资料。

本丛书的特点如下:

深厚的理论背景

本丛书独创的“学案教学法”是在“全效学习”理论的基础上提出的,“全效学习”理论是众多国内著名教育专家历时数年潜心研究的创新性成果,该理论从教学论的视角,探索了如何在不同的教学背景下,引导不同学习条件下的、不同学习风格的中小学生学习建构起适合自己的全面的学习方案。

雄厚的项目依托

“学案教学法”被教育部“十一五”项目办确立为首批实验课题,其母课题“中小学全效学习方案研究与实验”项目是国家教育部“十一五”专项任务项目。该项目是经教育部批准立项的国家级项目,凝聚了众多教育领域的专家学者,旨在进一步探索建构面向全体学生的、全面有效的学习方案,综合应用学习理论,指导中小学生的学习,提高中小学生的学习效率的有效途径。

坚实的实践基础

本丛书在编写之初,各位编者曾进行了广泛的学习现状调查,并组织了大范围的教学实验,根据实验结果形成本学习方案,然后再由众多名师讨论研究,并进一步修正、细化、完善,最终才完成本丛书的编写,所以具有超强的实践效果。

本丛书具有许多新颖之处:

新理论 “学案教学法”“全效学习”理论。

新视角 教学论的视角。

新模式 理论——实践——完善理论——再实践,由师生共同参与编写。

新体例 集教案、笔记、作业、练习于一体,一案一批,一案一评,一案一导。

希望广大师生在本书的指导下,取得学习上的新效果、好成绩!

编者

目 录

第一章 常用逻辑用语	1
1.1 命题与量词	1
1.2 基本逻辑联结词	9
1.3 充分条件必要条件与命题的四种形式	16
1.4 常用逻辑用语练习	26
常用逻辑用语综合题	32
第二章 圆锥曲线与方程	38
2.1 曲线与方程	38
2.2 曲线与方程练习	48
2.3 椭圆	54
2.4 椭圆专题	65
2.5 椭圆练习	76
2.6 双曲线	83
2.7 双曲线专题	95
2.8 双曲线练习	107
2.9 椭圆与双曲线练习	114
2.10 抛物线	122
2.11 抛物线练习	131
2.12 直线与圆锥曲线	140
2.13 直线与圆锥曲线练习	150
平面向量与解析几何综合题	159
第三章 空间向量与立体几何	169
3.1 空间向量的线性运算	169
3.2 空间向量的基本定理	176
3.3 两个向量的数量积	185
3.4 空间向量的直角坐标运算	194
3.5 空间向量的直角坐标运算练习	202
3.6 直线的方向向量与直线的向量方程	209
3.7 直线的方向向量与直线的向量方程练习	220
3.8 平面的法向量与平面的向量表示	230
3.9 直线与平面的夹角	240
3.10 直线与平面的夹角练习	252



3.11 二面角及其度量	263
3.12 二面角及其度量练习	278
3.13 距离	291
3.14 距离练习	304
空间向量与立体几何综合题 1	315
空间向量与立体几何综合题 2	324
空间向量与立体几何综合题 3	344
模块结业测试(选修 2-1)	353

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题与量词

一 课标导引与三维定向

✦ 教学目标

- 知识与技能: 了解命题的概念, 会判断命题的真假.
- 过程与方法: 通过命题的定义及常见命题, 运用有关的定义、性质、公式来判断命题的真假, 并体会举反例的作用.
- 情感态度价值观: 通过学习命题及其符号化表示方式, 体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性.

✦ 重点难点

- 重点: 理解命题的概念, 并进而判断其真假.
- 难点: 与其他知识相联系的命题真假的判断.

二 课程实施与教学互动

● 命题:

我们把用语言、符号或式子表达的, 可以判断真假的陈述句叫做命题. 其中判断为真的语句叫做真命题, 判断为假的语句叫做假命题.

例如: $3 > 2$;

$\lg 100 = 2$;

所有无理数都是实数;

垂直于同一条直线的两个平面平行;

函数 $y = 2x + 1$ 是单调增函数, 这些都是真命题.

再例如: 0.5 是整数;

设 a, b, c, d 是任意实数, 如果 $a > b, c > d$, 那么 $ac > bd$;

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ (α, β 是任意角), 这些都是假命题.

✧ 概念解读:

○ 一般来说, 疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

如: 三角函数是周期函数吗?

但愿每一个三次方程都有三个实数根!

指数函数的图象真漂亮! 这些都不是命题.

○ 在数学或其他科学技术中, 还有一类陈述句经常出现, 如“每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和”(哥德巴赫猜想), “在 2020 年前, 将有人登上火星”等, 虽然现在不能确



定这些语句的真假,但是随着科学技术的发展与时间的推移,总能确定它们的真假,人们把这一类猜想仍算为命题.

○ 还有一种语句,如“ $x>5$ ”、“ $x^2-1=0$ ”等,语句中含有变量 x 或 y ,在没有给定这些变量的值之前,是无法确定语句的真假的,这种含有变量的语句叫做开语句(条件命题).开语句不是命题.

● 量词:

☞ 全称量词与全称命题:

短语“对所有的”“任意一个”在陈述句中表示所述事物的全体,逻辑中通常叫做全称量词,用符号“ $\forall$ ”表示,含有全称量词的命题,叫做全称命题.

✧ 概念解读:

○ 将含有变量 x 的语句用 $p(x), q(x), r(x), \dots$ 表示,变量 x 的取值范围用 M 表示,那么全称命题“对 M 中任意一个 x ,有 $p(x)$ 成立”,可简记为 $\forall x \in M, p(x)$.

如: $p_1: \forall x \in \mathbf{Z}, x^2-1=0$; (假命题)

$q_1: \forall x \in \mathbf{Z}, 5x-1$ 是整数. (真命题)

○ 全称命题就是陈述某集合所有元素都具有某种性质的命题.

☞ 存在量词与存在性命题:

短语“有一个”或“有些”或“至少有一个”在陈述句中表述所述事物的个体或部分,逻辑中通常叫做存在量词,用符号“ $\exists$ ”表示,含有存在量词的命题,叫做存在性命题,也叫特称命题.

✧ 概念解读:

○ 存在性命题“存在 M 中的一个 x ,使 $q(x)$ 成立”可简记为 $\exists x \in M, q(x)$.

如: $p_2: \exists x \in \mathbf{Z}, x^2-1=0$; (真命题)

$q_2: \exists x \in \mathbf{Z}, 5x-1$ 是整数. (真命题)

○ 存在性命题就是陈述在某集合中有(存在)一些元素具有某种性质的命题.

☞ 含有量词命题真假的判定:

★ 要判定全称命题是真命题,需对集合 M 中每个元素 x ,证明 $p(x)$ 成立;

如果在集合 M 中找到一个元素 x_0 ,使得 $p(x_0)$ 不成立,那么这个全称命题就是假命题.就是通常说的“举出一个反例”.

★ 要判定一个存在性命题是真命题,只要在限定集合 M 中,至少能找到一个 $x=x_0$,使 $p(x_0)$ 成立即可.

例1 判断下列语句是否是命题,若是,判断其真假.

(1) 求证 $\sqrt{3}$ 是无理数;

(2) $2x-3>0$;

(3) 你是高二的学生吗?

(4) 一个正整数不是质数就是合数;

(5) 若 $x \in \mathbf{R}$,则 $x^2+4x+7>0$.

解: (1) 祈使句,不是命题;

(2) 是开语句,不是命题;

(3) 疑问句,不是命题;

(4) 是命题,假命题,因为 1 既不是质数也不是合数;

(5) 是真命题,因为 $x \in \mathbf{R}, x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 > 0$ 是恒成立的.

例 2 指出下列命题是全称命题还是存在性命题,并用符号语言表示出来.

(1) 存在实数 a, b , 使 $|a-1| + |b-1| = 0$;

(2) 对于实数 $a \in \mathbf{R}, a^0 = 1$;

(3) 有些实数 x , 使得 $|x+1| < 1$.

解: (1) 存在性命题, 用符号表示为 $\exists a, b \in \mathbf{R}, |a-1| + |b-1| = 0$;

(2) 全称命题, 用符号表示为 $\forall a \in \mathbf{R}, a^0 = 1$;

(3) 存在性命题, 用符号表示为 $\exists x \in \mathbf{R}, |x+1| < 1$.

例 3 试判断以下命题的真假:

(1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$;

(2) $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$;

(3) $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$;

(4) $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 3$.

解: (1) 因为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$, 所以 $x^2 + 2 \geq 2 > 0$, 即 $x^2 + 2 > 0$, 所以命题为真命题;

(2) 因为 $0 \in \mathbf{N}$, 所以当 $x=0$ 时, $x^4 \geq 1$ 不成立, 所以命题为假命题;

(3) 因为 $-1 \in \mathbf{Z}$, 所以当 $x=-1$ 时, 能使 $x^3 < 1$, 所以命题为真命题;

(4) 因为使 $x^2 = 3$ 成立的数只有 $\pm\sqrt{3}$, 而它们都不是有理数, 所以没有任何一个有理数的平方能等于 3, 所以命题为假命题.

三 基础训练与自主探究

1. 下列语句中是命题的个数为()

① 空集是任何集合的真子集;

② $x^2 - 3x - 4 = 0$;

③ $3x - 2 > 0$;

④ 把门关上;

⑤ 垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

⑥ 自然数是偶数.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 下列全称命题中真命题的个数是()

① 末位是 0 的整数, 可以被 2 整除;

② 角平分线上的点到这个角的两边的距离相等;

③ 每一个非零向量都有方向.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

3. 下列存在性命题中假命题的个数是()

① 有的实数是无限不循环小数;

② 有些三角形不是等腰三角形;

③ 有的菱形是正方形.



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
4. 下列存在性命题中真命题的个数是()
- ① $\exists x \in \mathbf{R}, x \leq 0$;
- ② 至少有一个整数,它既不是合数,也不是素数;
- ③ $\exists x \in \{x | x \text{ 是无理数}\}, x^2 \text{ 是无理数}.$
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
5. 下列全称命题中假命题的个数是()
- ① $2x+1$ 是整数($x \in \mathbf{R}$);
- ② 对所有的 $x \in \mathbf{R}, x > 3$;
- ③ 对任意一个 $x \in \mathbf{Z}, 2x^2+1$ 为奇数.
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
6. 下列命题为存在性命题的是()
- A. 偶函数的图象关于 y 轴对称 B. 正四棱柱都是平行六面体
- C. 不相交的两条直线是平行直线 D. 存在实数大于或等于 3
7. 下列全称命题为真命题的是()
- A. 所有素数都是奇数
- B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+1 \geq 1$
- C. 对每个无理数 x, x^2 也是无理数
- D. 所有的平行向量都相等
8. 下列命题中为假命题的是()
- A. 存在实数 α, β , 使 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
- B. 不存在无穷多个 α, β , 使 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
- C. 对任意 α, β , 使 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- D. 不存在这样的 α, β , 使 $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
9. 若 $Q = \{\text{菱形}\}, p(x): \text{“平行四边形”}$. 用简记符号写成全称命题正确的是()
- A. $\forall x \in Q, x$ 是平行四边形 B. $\exists x \in \mathbf{R}, x$ 是平行四边形
- C. 若 $x \in Q$, 则 x 平行四边形 D. 以上都不正确
10. 下列真命题的个数是()
- ① $\exists x \in \{x | x \text{ 是无理数}\}, x^2 \text{ 是有理数};$
- ② $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 > x^2;$ ③ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \leq 0;$
- ④ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 0.$
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
11. 下列全称命题中真命题的个数是()
- ① 所有的素数都是奇数;
- ② $\forall x \in \mathbf{R}, (x-1)^2 + 1 \geq 1;$
- ③ 所有的无理数的平方都是无理数.
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
12. 下列存在性命题中假命题的个数是()
- ① $\exists x \in \mathbf{R}, 2x^2 + x + 1 = 0;$

② 存在两条相交直线垂直于同一个平面；

③ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 0$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

四 能力提高与合作学习

13. 给出下列语句：

① 等边三角形是等腰三角形；

② $x < 3$ ；

③ $(a-3)^2 < 0 (a \in \mathbf{R})$ ；

④ 一个数不是正数就是负数；

⑤ 在一个三角形中，大角所对的边大于小角所对的边；

⑥ 若 $x+y$ 是有理数，则 xy 也是有理数.

其中是命题的有_____，其中真命题有_____.

14. 判断下列命题是全称命题还是存在性命题，并判断真假.

(1) 指数函数都是单调函数；

(2) 至少有一个整数，它既能被 2 整除，也能被 5 整除；

(3) $\forall x \in \{x | x \text{ 是无理数}\}, x^2 \text{ 是无理数}$ ；

(4) $\exists x \in \{x | x \in \mathbf{Z}\}, \log_2 x > 0$ ；

(5) 负数的平方是正数；

(6) 有的实数是无限不循环小数；

(7) 有些三角形不是等腰三角形；

(8) 每个二次函数的图象都与 x 轴相交.

15. 用量词符号“ $\forall$ ”和“ $\exists$ ”表达下列命题：

(1) 实数都能写成小数形式；

(2) 凸 n 边形的外角和等于 2π ；

(3) 任一个实数乘 -1 都等于它的相反数；

(4) 对任意实数 x ，都有 $x^3 > x^2$ ；

(5) 对任意角 α ，都有 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



16. (1) 设集合 $S = \{\text{四边形}\}$, $p(x)$: 内角和为 360° , 试用不同的表述方法写出全称命题“ $\forall x \in S, p(x)$ ”;

(2) 设 $q(x)$: $x^2 = x$, 试用不同的表达方法写出存在性命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, q(x)$ ”.

17. 用全称量词和存在量词表示下列语句:

(1) 有理数都能写成小数形式;

(2) n 边形的内角和等于 $(n-2) \times 180^\circ$;

(3) 两个有理数之间, 都有另一个有理数;

(4) 有一个实数乘任意一个实数都等于 0.

18. 判断以下命题的真假:

(1) $\forall x \in \mathbf{R}, -x^2 + x - 1 < 0$;

(2) $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 使 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$;

(3) $\exists x, y \in \mathbf{Z}$, 使 $3x - 4y = 20$;

(4) $\forall x \in \mathbf{R}, |x| > x$.

19. 若命题: $p: \forall x \in \mathbf{R}, ax^2 + 4x + a \geq -2x^2 + 1$ 是真命题, 求实数 a 的取值范围.

参 考 答 案

三 基础训练与自主探究

1. B 解析: ①⑥是命题.

2. C

3. D

4. C 解析: ① 正确;

② 0, 1, 负数都不是合数, 素数;

③ 若 $x = \sqrt[4]{3}$, $x^2 = \sqrt{3}$ 是无理数.

5. B 解析: ① 错. $x = \frac{1}{3}$ 时, $2x + 1$ 不是整数;

② 错. $x = 2$ 时, $x > 3$ 不成立.

6. D

7. B

8. B 解析: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, 只须 $\sin\alpha \sin\beta = 0$

即可.

9. A 解析: $\{\text{菱形}\} \subsetneq \{\text{平行四边形}\}$.

10. C 解析: ② 不正确.

11. A 解析: ①③ 不正确.

12. B

四 能力提高与合作学习

13. ①③④⑤⑥; ①⑤

14. 解析: 由定义可直接判断:

(1) 全称命题, 真命题.

(2) 存在性命题, 真命题.

(3) 全称命题, 假命题, 如 $\exists x = \sqrt{3}$, x^2 不是无理数.

(4) 存在性命题, 真命题.

(5) 全称命题, 真命题.

(6) 存在性命题, 真命题.

(7) 存在性命题, 真命题.

(8) 全称命题, 假命题, 如 $\exists y = x^2 + x + 1$ 的图象与 x 轴不相交.

15. 解析: (1) $\forall x \in \mathbf{R}$, x 能写成小数形式.

(2) $\forall x \in \{x | x \text{ 是凸多边形}\}$, x 的外角和等于 2π .

(3) $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \cdot (-1) = -x$.

(4) $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^3 > x^2$.

(5) $\forall \alpha \in \{\alpha | \alpha \text{ 是角}\}$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

16. 解析: (1) 对所有四边形 x , x 的内角和为 360° ;



对一切四边形 x , x 的内角和为 360° ;

每一个四边形 x 的内角和为 360° ;

任一个四边形 x 的内角和为 360° ;

凡是四边形 x , 它的内角和都为 360° .

(2) 存在实数 x , 使 $x^2 = x$ 成立;

至少有一个 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 = x$ 成立;

对有些实数 x , $x^2 = x$ 成立;

有一个 $x \in \mathbf{R}$, $x^2 = x$ 成立;

对某个 $x \in \mathbf{R}$, $x^2 = x$ 成立.

17. 解析: (1) 任意一个有理数都能写成小数形式.

(2) 一切 n 边形的内角和都等于 $(n-2) \times 180^\circ$.

(3) 任意两个有理数之间, 都有一个有理数.

(4) 存在一个实数 x , 它乘任意一个实数都等于 0.

18. 解析: (1) 因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, $-x^2 + x - 1 = -(x^2 - x + 1) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$, 所以

命题为真命题.

(2) 因为 $0 \in \mathbf{R}$, 所以当 $\alpha = \beta = 0$ 时, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ 成立, 所以命题为真命题.

(3) 因为当 $x = 8, y = 1$ 时, 能使 $3x - 4y = 20$, 所以命题为真命题.

(4) 因为 $0 \in \mathbf{R}$, 所以当 $x = 0$ 时, $|x| > x$ 不成立, 所以命题为假命题.

19. 解析: 由已知, $ax^2 + 4x + a \geq -2x^2 + 1$, 对任意实数 x 恒成立,

即 $(a+2)x^2 + 4x + a - 1 \geq 0$ 恒成立.

当 $a+2=0$ 时, 即 $a=-2$ 时, $4x-3 \geq 0$ 对任意实数 x 不恒成立;

当 $a \neq -2$ 时, 只需 $\begin{cases} a+2 > 0, \\ \Delta = 4^2 - 4(a+2)(a-1) \leq 0, \end{cases}$

解得 $a \geq 2$.

综上可知 $a \geq 2$.

1.2 基本逻辑联结词

一 课标导引与三维定向

◆ 教学目标

- 知识与技能：理解逻辑联结词的含义，会判断由“且”“或”“非”构成的复合命题的真假。
- 过程与方法：借助实例理解逻辑联结词的含义，学会逻辑联结词的应用。
- 情感态度价值观：体会集合运算与逻辑用语之间的关系，体会类比思想。

◆ 重点难点

- 重点：逻辑联结词含义。
- 难点：含有逻辑联结词命题真假的判断。

二 课程实施与教学互动

● “且”“或”“非”：

☞ “且”：

★ 定义：用联结词“且”把命题 p 和 q 联结起来，得到一个新命题，记作 $p \wedge q$ ，读作：“ p 且 q ”。

★ 命题 $p \wedge q$ 真假判断：当 p, q 都为真命题时， $p \wedge q$ 为真命题；当 p, q 中有一个为假命题时， $p \wedge q$ 为假命题。

☞ “或”：

★ 定义：用联结词“或”把命题 p 和 q 联结起来，得到一个新命题，记作 $p \vee q$ ，读作：“ p 或 q ”。

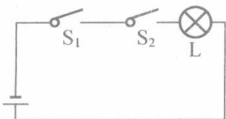
★ 命题 $p \vee q$ 真假判断：当 p, q 中有一个为真命题时， $p \vee q$ 就为真命题；当 p, q 两个命题都为假命题时， $p \vee q$ 就为假命题。

☞ “非”：

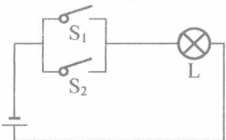
★ 定义：对命题 p 加以否定，得到一个新命题，记作 $\neg p$ ，读作“非 p ”或“ p 的否定”。

❖ 说明：若 $A = \{x | p\}$, $B = \{x | q\}$, 全集 $U = \{x | u\}$. 则

○ 交集： $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$, $A \cap B$ 的特征性质是 $p \wedge q$ ；与门电路：



○ 并集： $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$, $A \cup B$ 的特征性质是 $p \vee q$ ；或门电路：





○ 补集: $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$, $\complement_U A$ 的特征性质是 $U \wedge (\neg p)$.

● 含有逻辑联结词的命题的真值表:

p	q	p 且 q	p 或 q	非 p
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

例 1 把下列各组命题用“且”联结组成新命题,并判定其真、假:

(1) $p: \lg 0.1 < 0; q: \lg 11 > 0$;

(2) $p: y = \cos x$ 是周期函数; $q: y = \cos x$ 是奇函数.

解: (1) 因为 $\lg 0.1 < 0$ 为真, $\lg 11 > 0$ 也为真,所以命题 $p \wedge q$ 为真;

(2) 因为 $y = \cos x$ 是周期函数是真命题, $y = \cos x$ 是奇函数是假命题,所以命题 $p \wedge q$ 为假.

例 2 把下列各组命题用“或”联结成新命题,并判断它们的真假:

(1) $p: 10 = 10; q: 10 < 10$.

(2) $p: \mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}; q: \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

解: (1) 因为 $10 = 10$ 为真, $10 < 10$ 为假,所以命题 $p \vee q$ 为真命题;

(2) 因为 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ 为真, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ 为真,所以命题 $p \vee q$ 为真命题.

例 3 写出下列各命题的否定,并判断真假:

(1) $p: y = \tan x$ 是奇函数;

(2) $q: \sqrt{(-2)^2} = -2$;

(3) $r: \text{抛物线 } y = (x-1)^2 \text{ 的顶点是 } (1, 0)$.

解: (1) $\neg p: y = \tan x$ 不是奇函数;(假)

(2) $\neg q: \sqrt{(-2)^2} \neq -2$, 即 $\sqrt{(-2)^2} > -2$, 或 $\sqrt{(-2)^2} < -2$;(真)

(3) $\neg r: \text{抛物线 } y = (x-1)^2 \text{ 的顶点不是 } (1, 0)$.(假)

例 4 写出下列命题的非(否定),并判断其真假:

(1) $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$;

(2) $q: \text{所有的正方形都是矩形}$;

(3) $r: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$;

(4) $s: \exists x \in \mathbf{R}, x^3 + 1 = 0$.

解: (1) $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$.(假)

因为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ 恒成立.

(2) $\neg q: \text{至少存在一个正方形不是矩形}$.(假)

(3) $\neg r: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$.(真)

因为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ 成立.

(4) $\neg s: \forall x \in \mathbf{R}, x^3 + 1 \neq 0$.(假)

由于 $x = -1$ 时, $x^3 + 1 = 0$.

例 5 已知命题 $p: |x^2 - x| \geq 6, q: x \in \mathbf{Z}$, 若“ $p \wedge q$ ”与“ $\neg q$ ”同时为假命题, 求 x 的值.

解: 因为 $p \wedge q$ 为假, 所以 p, q 至少有一个命题为假.

又 $\neg q$ 为假, 所以 q 为真, 所以 p 为假.

由 p 假 q 真, 得 $\begin{cases} |x^2 - x| < 6, \\ x \in \mathbf{Z}, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x^2 - x < 6, \\ x^2 - x > -6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -2 < x < 3, \\ x \in \mathbf{Z}, \end{cases}$

故 x 的取值为 $-1, 0, 1, 2$.

三 基础训练与自主探究

- 命题“方程 $|x| = 1$ 的解为 $x = \pm 1$ ”, 使用逻辑联结词的情况是()
A. 没有使用联结词 B. 使用了联结词“或”
C. 使用了联结词“非” D. 使用了联结词“且”
- 以下判断正确的是()
A. 命题 p 是真命题时, 命题 $p \wedge q$ 一定是真命题
B. 命题 $p \wedge q$ 是真命题时, 命题 p 一定是真命题
C. 命题 $p \wedge q$ 是假命题时, 命题 p 一定是假命题
D. 命题 p 是假命题时, 命题 $p \wedge q$ 不一定是假命题
- 若命题 $p: 0$ 是偶数, 命题 $q: 2$ 是 3 的约数, 则下列命题中为真的是()
A. $p \wedge q$ B. $p \vee q$ C. $\neg p$ D. $\neg p \wedge \neg q$
- 由下列各组命题构成的“ $p \vee q$ ”, “ $p \wedge q$ ”形式的命题均为真命题的是()
A. $p: 4 + 4 = 9, q: 7 > 4$ B. $p: a \in \{a, b, c\}, q: \{a\} \subsetneq \{a, b, c\}$
C. $p: 15$ 是质数, $q: 8$ 是 12 的约数 D. $p: 2$ 是偶数, $q: 2$ 不是质数
- 若命题“ $p \vee q$ ”与命题“ $\neg p$ ”都是真命题, 那么()
A. 命题 p 不一定是假命题 B. 命题 q 一定是真命题
C. 命题 q 不一定是真命题 D. 命题 p 与命题 q 真值相同
- 下列命题中既是“ $p \wedge q$ ”形式的命题, 又是真命题的是()
A. 10 或 15 是 5 的倍数
B. 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的两根是 -4 和 1
C. 方程 $x^2 + 1 = 0$ 无实数根
D. 有两个内角为 45° 的三角形是等腰直角三角形
- 设 $p: x = 1, \neg q: x^2 + 8x - 9 = 0$, 则下列各选项为真命题的是()
A. $p \wedge q$ B. $p \vee q$ C. 若 p , 则 $\neg q$ D. 若 $\neg p$, 则 q
- 对于命题的否定, 下列说法错误的是()
A. p : 能被 3 整除的整数是奇数; $\neg p$: 存在一个能被 3 整除的整数不是奇数
B. p : 存在一个四边形的四个顶点不共圆; $\neg p$: 每一个四边形的四个顶点都共圆
C. p : 有的三角形为正三角形; $\neg p$: 所有的三角形不都是正三角形