

高中三角
校訂
附錄

升學 · 參考必備

高中三角複習指導

洪翔編

北新書局印行

1 9 5 1

高中三角複習指導目次

一.	導言	1
二.	銳角之三角函數	2
	(一) 三角函數之定義	2
	(二) 三角函數間之關係	4
	(三) 角之兩種表示法	9
三.	任意角之三角函數	16
	(一) 各象限內之三角函數	16
	(二) 負角函數	24
四.	許多角之三角函數	25
	(一) 許多角之三角函數公式	25
	(二) 由許多角三角函數公式，求三角函數之值	32
五.	三角函數之和差	35
六.	三角函數之反函數	37
七.	三角恆等式	41
八.	直角三角形解法	55
九.	斜三角形解法	94
十.	面積	85
十一.	三角方程式	89

高中三角複習指導

一 導 言

1. 何謂三角學?

【解】三角學者，乃藉三角形之邊與角之關係，推求幾何圖形之邊長角廣與面積之科學也。

2. 三角學在數學中地位若何?

【解】三角學實乃幾何學之一分科，與幾何學中之計算問題相當，惟以特殊方法（如三角函數）推求幾何圖形之邊角及面積，與純粹之幾何稍形不同耳。

3. 三角學分幾部？內容若何？

【解】三角學分平面三角學及球面三角學兩部，平面三角學所討論之幾何圖形圖形上諸點均在同一平面內，而球面三角學所討論之幾何圖形圖形上諸點均在立體之球面上；易言之，圖形上諸點在許多平面內。本書所討論者，乃平面三角學。球面三角學之討論，當俟諸異日。

4. 吾人爲何須研究三角學？

【解】高山廣河，沃野荒漠，吾人勢不能以尋常之木尺度量之。然吾人亟欲知其高廣面積，於是三角學乃應運而生。昔埃及國王欲知金字塔之高而無法測之，一數學家自言能測，王怪而問之，數學家乃指手之杖曰：唯此即可。蓋數學家藉塔影與杖影之長短而以三角學之方法推算之也。降乎近世，水利及鐵道等建設

廣大土地之墾殖，無不藉三角測量之結果從事規劃，而於科學研究上借助亦多。

5. 研究三角之方法為何？

【解】(1) 將緊要之公式分類記熟——此項極為重要，因三角學問題之計算實即此等公式之應用也。(2) 解問題時所作之圖務求正確——因正確之圖能將問題之主要關係看出，幫助問題解答極多也。

二 銳角之三角函數

一 三角函數之定義

1. 角及邊之表示法 三角學上之角，恆以角頂所書之大寫字母表示之。例如 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, (見圖1) 若遇三角形有一直角，

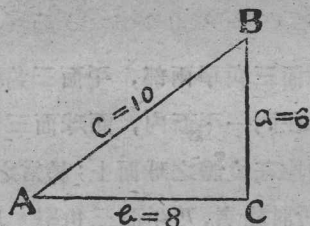


圖 1

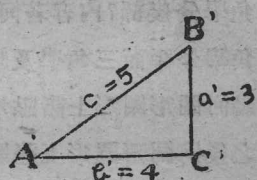


圖 2

則通常恆以 $\angle C$ 表示直角。三角學上之邊，恆以其所對角頂之大寫字母，變成小寫字母表示之。例如 $\angle A$ 之對邊為 a , $\angle B$ 之對邊為 b , $\angle C$ 之對邊為 c , 因 $\angle C$ 通常恆表示直角，故 c 亦恆表示斜邊（即弦）。若以 $\angle A$ 而論， a 為 $\angle A$ 之對邊， b 為 $\angle A$ 之鄰邊， c 為 $\angle A$ 之斜邊。

2. 三角函數 直角三角形中，每兩邊之比，稱為三角函數。(Trigonometric Function) 例如圖1中 $a:c$, $b:c$, $a:b$, $c:a$, $c:b$, $b:a$

(即 $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$) 皆為三角函數。因由幾何定理, 設兩直角三角形, 有一銳角相等, 則兩三角形相似, 又曰相似三角形相當邊成比例, 故若 $\angle A = \angle A'$, (見圖1及圖2)

則必 $a:a' = b:b'$ 即 $a:b = a':b'$ 書成分式為 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ 若

$a=6$, $b=8$, $a'=3$, $b'=4$ 代入 $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, 即 $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ 。故角若一定, 則無論三角形之大小若何, 其每兩邊之比, 亦必一定。設角變, 則無論變後三角形與原來三角形之大小若何, 其每兩邊之比, 亦必隨之而變, 因變後之三角形不與原來之三角形相似也。故某角有某角特有之兩邊之比, 其值一定不變, 例如 $\angle A$ 之對邊及鄰邊之比, 為 $\frac{a}{b} \left(= \frac{6}{8} \right) = \frac{3}{4}$, 若 $\angle A$ 不變, 則無論三角形如何增大或縮小, 對邊及鄰之比, 必仍為 $\frac{3}{4}$ (如圖2), 故若知一角, 即可求其兩邊之比, 反之, 已知兩邊之比, 亦可求其一角。三角學中恆將兩邊之比, 化成整數或小數與相應之角, 列成一表, 名曰函數表, 以便檢查。而上述直角三角形每兩邊之比, (即函數) 共有六種, 各有專名, 今分述於下。

3. 正弦 $\angle A$ 之對邊與斜邊之比, 稱為 $\angle A$ 之正弦 (sine), 以略號 $\sin A$ 表示之, 故

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} \quad (\text{圖1})$$

[注意] $\sin A$ 乃表示對邊與斜邊之比, 以比值表示之, 例如 $\sin A = \frac{3}{5} = 0.6$, 與 $\angle A$ 不同, 不可相混, 因與 $\sin A = 0.6$ 相應之 $\angle A$ 為 $36^\circ 52'$ 也。

4. 餘弦 $\angle A$ 之鄰邊與斜邊之比, 稱為 $\angle A$ 之餘弦 (cosine), 以略號 $\cos A$ 表示之, 故

$$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c}$$

5. 正切 $\angle A$ 之對邊與鄰邊之比，稱為 $\angle A$ 之正切 (tangnet)，以略號 $\tan A$ 表示之，故

$$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{a}{b}.$$

6. 餘割 $\angle A$ 之斜邊與對邊之比，稱為 $\angle A$ 之餘割 (cosecant)，以略號 $\csc$ 表示之，故

$$\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} = \frac{c}{a},$$

因
$$\frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a},$$

故
$$\csc A = \frac{1}{\sin A}.$$

7. 正割 $\angle A$ 之斜邊與鄰邊之比，稱為 $\angle A$ 之正割 (secant)，以略號 $\sec A$ 表示之，故

$$\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A}.$$

8. 餘切 $\angle A$ 之鄰邊與對邊之比，稱為 $\angle A$ 之餘切 (cotangent)，以略號 $\cot A$ 表示之，故

$$\cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}.$$

二 三角函數間之關係

【公 式】

1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$

2. $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A.$

3. $\cot^2 A + 1 = \csc^2 A.$

$\csc A = \frac{1}{\sin A}.$

$$5. \sec A = \frac{1}{\cos A} \checkmark$$

$$6. \csc A = \frac{1}{\sin A} \checkmark$$

$$7. \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \checkmark$$

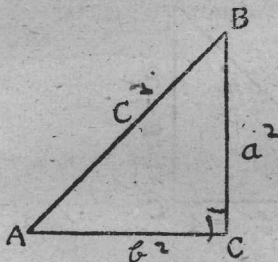
$$8. \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \checkmark$$

$$9. \sin A \csc A = 1 \checkmark$$

$$10. \cos A \sec A = 1 \checkmark$$

$$11. \tan A \cot A = 1 \checkmark$$

【證明】

公式1:—— $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

因

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

以 c^2 除之

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

即

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

 $\therefore$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

公式2:—— $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$,

因

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

以 b^2 除之

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2},$$

即

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A.$$

公式4,5,6:——證見(1)定義.

公式7:—— $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A.$$

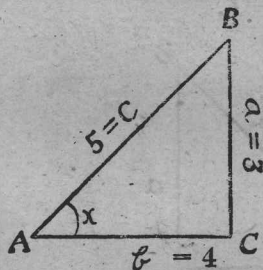
公式9:—— $\sin A \csc A = 1,$

$$\sin A \csc A = \sin A \cdot \frac{1}{\sin A} = 1.$$

【例題】

1. 已知 $\sec x = \frac{5}{4}$, 求 x 之其他五函數.

【解】



$$\sec x = \frac{c}{b} = \frac{5}{4},$$

∴

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = 3,$$

$$\sin x = \frac{3}{5},$$

∴

$$\cos x = \frac{4}{5},$$

$$\tan x = \frac{3}{4},$$

$$\cot x = \frac{4}{3},$$

$$\csc x = \frac{5}{3}.$$

2. 試將 $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 之各函數, 以 $\tan x$ 表之.

【解】

$$\textcircled{a} \sin x = \frac{1}{\csc x} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\tan x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan x} \sqrt{\tan^2 x + 1}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}}; \quad \frac{\sqrt{\tan^2 x + 1}}{\sqrt{\tan^2 x + 1}}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x};$$

$$\sec x = \sqrt{1 + \tan^2 x};$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}}} = \frac{\sqrt{\tan^2 x + 1}}{\tan x}.$$

3. 已知 $\cos A = \frac{2}{3}$, 求 $\sin A \tan A$ 及 $\sec A$ 之值.

$$\text{【解】} \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{3}{2}.$$

④ 4. 化簡 $\sin A + \cot A \cos A$.

【解】

$$\begin{aligned}
 & \sin A + \cot A \cos A \\
 &= \sin A + \frac{\cos A}{\sin A} \cos A \\
 &= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A} \\
 &= \frac{1}{\sin A} = \csc A.
 \end{aligned}$$

5. 化簡 $\frac{\tan A}{\cot A \csc A} + \sin A$.

【解】

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tan A}{\cot A \csc A} + \sin A \\
 &= \frac{\tan A}{\frac{1}{\tan A} \csc A} + \sin A \\
 &= \frac{\tan^2 A}{\csc A} + \sin A \\
 &= \frac{\tan^2 A + \sin A \csc A}{\csc A} \\
 &= \frac{\tan^2 A + 1}{\csc A} = \frac{\sec^2 A}{\csc A} \\
 &= \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin A}} = \frac{\sin A}{\cos^2 A} = \frac{\tan A}{\cos A}.
 \end{aligned}$$

【習題】

1. 已知 $\frac{15}{17}$, 求 A 角其餘各函數.

【答】 $\csc A = \frac{17}{15}$, $\cos A = \frac{8}{17}$, $\sec A = \frac{17}{8}$,

$\tan A = \frac{15}{8}$, $\cot A = \frac{8}{15}$.

2. 試以 $\sin x$ 表其餘各函數。

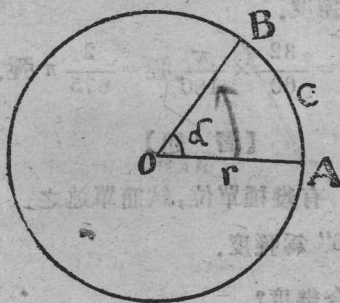
3. 化簡 $\frac{\sin A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A}$.

$$\frac{\sin A}{\frac{1}{\sin A}} + \frac{\cos A}{\frac{1}{\cos A}} = \sin A \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos A = \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

[答] 1.

(三) 角之兩種表示法

1. 角度制——將一直角，分為 90 等分，每 1 等分，謂之一度 (degree)，以 1° 表示之，每度分成 60 等分，每 1 等分謂之一分 (minute)，以 $1'$ 表示之，每分又分成 60 等分，每 1 等分謂之一秒 (second)，以 $1''$ 表示之。簡言之，以三角形一邊，繞三角形一邊繞角頂旋轉一周之 $\frac{1}{360}$ 為一度 (因一周角，等於四直角) 故 5 度 16 分 7 秒，可書作 $5^\circ 16' 7''$ 。
2. 弧度制——以與半徑等長之弧所張之圓心角為單位，名此單位曰徑 (radian)，又名弧度。例如：



弧 $ACB = AO$ ，則 $\angle \alpha = 1$ 徑。

因圓周 $= 2\pi r$ ，即在圓周上截與 r 等長之弧，可截 2π 個，而與 r 等長之弧為 1 徑，故圓周角 $(360^\circ) = 2\pi$ 徑，一平角 $(180^\circ) = \pi$

徑，即 360° 通常可以 2π 表示之（徑字恆略去）， 180° 通常可以 π 表示之。

3. 弧度制與角度制之關係。——因

圓周角 $=2\pi$ 徑，

即 $360^\circ = 2\pi$ 徑。

$$\therefore \frac{1 \text{ 徑}}{2\pi} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.1416}.$$

$$= 57^\circ 17' 44''.2'',$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ 徑} = \frac{\pi}{180} \text{ 徑}.$$

【例題】

1. $\frac{3}{2}\pi$ 合幾度？

【解】因 π 徑 $=180^\circ$ ，

$$\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2} \times 180^\circ = 270^\circ.$$

2. 試將 $32'$ 化成徑度。

$$32' = \frac{32^\circ}{60} = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ 徑} = \frac{2}{675} \pi \text{ 徑}.$$

【習題】

1. 量三角形角度，有幾種單位，試簡單述之。

2. 試化 $45^\circ 48' 36''$ 為徑度。

3. $\frac{\pi}{18}$ ， $\frac{\pi}{4}$ 各合幾度？

四 三角函數之數值

【公式】

12.

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	0
$\tan$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

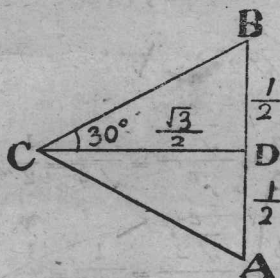
 (附注) $\sqrt{1}=1$,

 $\sqrt{2}=1.4142$,

 $\sqrt{3}=1.7321$,

 ∞ 爲無窮大之符號.

【證明】

 1. 求 $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ$ 之值.

 以 1 爲邊長，作等邊三角形 ABC 。

 自 C 至 AB 作垂線 CD 。

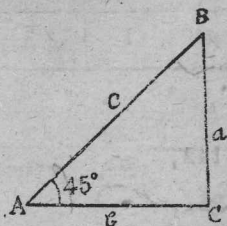
 則 $\angle BCD = 30^\circ$, $BD = \frac{1}{2}$, $CD = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

 故得 $\sin 30^\circ = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$,

 $\cos 30^\circ = \frac{CD}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

2. 求 $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\tan 45^\circ$ 之數值.



今 $\angle A = 45^\circ$, 則 $\angle B = 45^\circ$, 直角三角形爲二等邊.

即 $a = b$,

則 $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

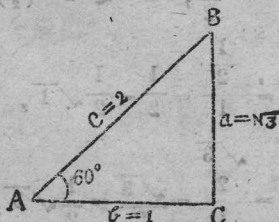
$$a = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1.$$

3. 求 60° 之三角函數之值.



設 $\angle A = 60^\circ$, $b = 1$, $c = 2$,

$$\therefore a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1},$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3},$$

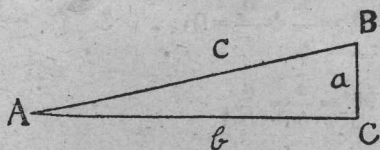
$$\csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3},$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2,$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

〔注意〕 由此可知自 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 三函數, 可推知其餘 $\csc x$, $\sec x$, 及 $\cot x$ 三函數, 故普通三角函數表祇列 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 三函數。

4. 求 0° 之三角函數之值。



設 $\angle A$ 為極小之角, a 為其對邊, b 為鄰邊, c 為斜邊,
今 $\angle A$ 設漸次減小而至於 0 , 則必 $a = 0$,

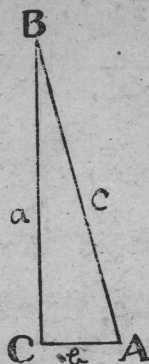
b 及 c 合成一線, 即 $b = c$. 故

$$\sin 0^\circ = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0,$$

$$\cos 0^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{a}{b} = \frac{0}{b} = 0.$$

5. 求 90° 之三角函數之值。



設 $\angle A$ 爲甚大之角， a 爲其對邊， b 爲其鄰邊， c 爲斜邊，
則 $\angle A$ 漸次增大而至於 90° ，則必 $b=0$ ， a 與 c 合成一線，
即 $a=c$ ，

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\cos 90^\circ = \frac{b}{c} = \frac{0}{c} = 0,$$

$$\tan 90^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{0}.$$

$\frac{a}{0}$ 在代數上言，殊無意義（見高中代數複習指導），然吾人設想

$b \neq 0$ ，而無限趨近於零，易言之， b 爲無窮小時，則 $\frac{a}{0}$ 成

$\frac{a}{\text{無窮小}}$ ，吾人知設被除數爲一定，而除數逐漸減小，則其商

必逐漸增大。例如 $\frac{4}{0.4} = 10$ ，而 $\frac{4}{0.004} = 1000$ 也，由此推論，

設被除數 a 爲普通之數，且爲一定，而除數爲無窮小之數，則其