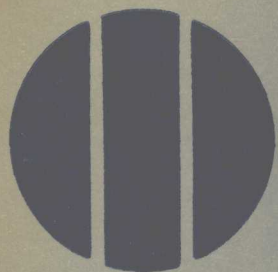


西南交通大学出版社



层析成像的数学方法
与应用

陈立成

· 获地震科学联合基金会资助 ·

层析成像的数学 方法与应用

陈立成 编著

前 言

计算机断层扫描 (Computerized Tomography—CT) 或称计算机层析成像, 简称层析成像。它同遗传工程、新粒子发现和宇航技术一起被称为七十年代国际四大科技成果。它是近十几年蓬勃发展起来的一门边缘性学科, 涉及数学、物理、计算机等学科, 有着广泛的应用价值。在国内外成功应用于医疗诊断, 它在医学上起了划时代的作用。

它还广泛地被应用于地球物理、射电天文学、遥感技术、显微技术、磁流体力学、材料科学以及分子生物等领域, 应用前景广阔。

在地球物理当前有多方面的应用, 如: 地球物理勘探层析成像 (用物探设备采集数据), 如地震层析成像; 天然地震预报层析成像等。

CT 新技术在铁道事业中也有广阔的应用前景。其研究方向有二, 第一, 用物探手段应用于铁道选线, 探明地质 (如岩溶、采空区及“桥基”等); 应用于铁道旧线, 探测路基“病害”。第二, 应用于铁道材料和设备的 CT 扫描探测, 比通常的超声无损探伤分辨率高, 且可层析成像。

它还可具体应用于交通、地质、建设、冶金、石油以及煤炭等部门。

层析成像与数学关系密切。它的数学理论基础是拉东 (Radon) 变换。J. Radon (奥地利数学家) 于 1917 年发表著名的数学论文: 《论如何根据某些流形上的积分以确定函数》, 此文对 CT 技术的形成和发展起到了指导性作用。射线层析成像其理论指导是沿直线积分的古典拉东变换, 它与偏微分方程和计算数学

等密切相关。随着CT理论的应用与发展，需要考虑散射层析成像，从而要研究沿曲线积分的拉东变换。研究广义拉东变换，要用到偏微分方程中的抽象理论——线性偏微分算子现代理论（如傅立叶算子理论等）。

目前国内除医学外，不少非医学领域正开展CT技术的理论与应用研究，在科研和教学上需要一本论述CT技术中的数学理论和计算方法的书。为此，本人决定写这本书。此书有两个目的，一是讲述内容以数学为主，是一本应用数学书，系统阐述层析成像所用数学的基本理论和方法；二是在应用上以非医学层析成像为主，其中着重讲述在地球物理学中的应用，并指出了研究多波长层析成像的重要性。

本书主要取材于几年来给研究生和本科生讲授的讲义，和近几年来我们的科研工作，并参考有关图书和文献。由于篇幅有限，只讲述层析成像中常用的最基本的数学理论。对于它所用到的抽象数学理论，书中仅从应用的角度给予简单介绍。有兴趣的读者，请查阅有关专著。

由于层析成像是边缘学科，涉及的内容极为丰富，作者水平有限，书中的错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

作者

1992年2月

目 录

第一章 绪 论

§ 1 层析成像原理	1
§ 2 层析成像系统与图像重建类型	4
1. CT 成像系统	4
2. 图像重建类型	5
§ 3 层析成像发展简史	6
1. 医学 CT	6
2. 地震层析成像(地震 CT)	7
3. 其它物探层析成像	9
4. Radon 变换与广义 Radon 变换	10
§ 4 当前层析成像需要解决的主要问题、展望及 我们的几个研究方向	12
1. 存在的主要问题	12
2. 展望	13
3. 我们的几个研究方向	14

第二章 Radon 变换及其性质

§ 1 引 言	15
1. Radon 变换的来源	15

2.	X—CT 中的积分几何	15
3.	δ -函数是奇异广义函数	16
§ 2	Radon 变换的定义	19
1.	二维情况	19
2.	Radon 变换的表式	20
3.	$n(\geq 3)$ 维情况	21
4.	例	22
§ 3	Radon 变换的性质	24
1.	齐次性	24
2.	线性性	25
3.	线性变换	25
4.	平移性质	28
5.	导数的变换	29
6.	含有 Hermite 多项式的变换	31
7.	变换的导数	32
8.	褶积的变换	34

第三章 Radon 变换与其它变换的关系

§ 1	Radon 变换与 Fourier 变换的关系	35
§ 2	Radon 变换与 Gegenbauer 变换的关系	38
1.	n 次球面调和函数	38
2.	Radon 变换与 Gegenbauer 变换的关系	58

第四章 Radon 变换几种求逆方法

§ 1	Radon 求逆法	60
-----	-----------------	----

1.	Radon 定理	60
2.	两种不同求逆公式	64
§ 2	Fourier 变换法	66
§ 3	解析延拓法	70
§ 4	高维空间的 Radon 变换及其求逆方法	75

第五章 图像重建几个基本算法

§ 1	引 言	79
1.	图像重建的数学基础	79
2.	研究图像重建算法的必要性	80
3.	计算机模拟分析的重要性	80
4.	离散重建问题	81
5.	重建算法的种类	82
6.	反投影法图像重建	82
§ 2	系列重建法	86
1.	系列重建法的离散重建问题	86
2.	代数重建法	88
3.	联合迭代重建法	103
4.	二次最优化方法	105
§ 3	变换重建法	111
1.	卷积重建法	111
2.	傅立叶重建法	121
§ 4	其它重建法	125
1.	级数重建法	125
2.	逐次逼近二乘法在层析成像中的应用	129

第六章 由不完全投影数据重建图像的 两种方法

§ 1 压缩恢复法	130
1. 引言	130
2. 压缩恢复法的数学推导	131
3. 压缩恢复法的实现	135
4. 图像重建质量的评价	136
5. 压缩恢复法在井间层析成像中的应用	138
§ 2 稀疏投影数据的重建算法 ——投影域上的插值方法	139
1. 引言	139
2. PSIRR FAN 公式的理论推导(扇形束)	140
3. 平行束的 PSIRR 公式	146
4. 评论	148

第七章 两个新重建算法及算法分析

§ 1 格栅的选取	151
1. 平行束情形	151
2. 扇形束情形	155
§ 2 重建算法介绍	156
1. 滤波反投影法	156
2. Marr 算法	157
§ 3 梯形法则的误差估计	160
§ 4 滤波反投影法的精确度分析	164

§ 5 Marr 算法的精确度分析	169
-------------------------	-----

第八章 程函方程及数字射线寻迹

§ 1 引 言	176
§ 2 光程及费马原理	177
1. 光程、光程差	177
2. 费马原理	179
§ 3 程函方程的推导	181
§ 4 程函 $\varphi(\vec{r})$ 的物理意义	184
1. 能流密度矢量	184
2. 射束方程	189
§ 5 数字射线寻迹	194
1. 柯西(Cauchy)方法(特征线法)	194
2. 数字射线寻迹	195
3. 数字射线寻迹的应用	199
4. 数值模拟理论计算之例	202

第九章 两种代数重建算法及其分析

§ 1 最优化判别函数的乘积算法	205
1. 乘积算法	206
2. 简化的乘积算法	208
3. 几何解释	211
§ 2 对不相容线性系统下的 Kaczmarz 方法的加速	213
1. 迭代方法	213

2.	收敛的性质	215
3.	收敛的加速	217

第十章 广义 Radon 变换与多波震相分析以及小波分析在图像重建中的应用

§ 1	引 言	220
§ 2	Fourier 积分算子与广义 Radon 变换	221
1.	偏微分算子与 Schwartz 空间	221
2.	拟微分算子	222
3.	Fourier 积分算子	225
4.	广义 Radon 变换	226
§ 3	广义 Radon 变换在散射层析成像中的应用	229
1.	引言	230
2.	一种广义 Radon 变换及 Fourier 变换	231
3.	波动方程的反问题, 散射层析成像法	233
4.	计算实例	238
§ 4	多波震相分析概要	239
§ 5	多波震相层析成像应用前景	242
§ 6	小波分析简介及其应用	243

第十一章 层析成像模型试验与工程实例

§ 1	制造三维超声隧道模型、轴颈模型及其试验初步	248
1.	制造三维超声隧道模型和轴颈模型	248
2.	三维超声地震模型实验初步	250

§ 2	界面为斜平面地层的地震数字层析成像	252
1.	正演方法	252
2.	反演方法	253
3.	评论及计算结果	255
§ 3	数学与多波震相分析应用于界面反演	257
1.	用 Radon 变换法进行曲界面的理论反演	257
2.	多波震相分析	266
§ 4	隧道施工掌子面前方层界面多波反射层析 成像预报	273
1.	理论模型及逐层反演思路	274
2.	理论模型、隧道模型及工程实例	276
§ 5	井间电磁波衰减系数层析成像软件研制与 应用(工程实例)	284
1.	数学模型	284
2.	软件开发	285
3.	理论模型实验	285
4.	工程实例	285
	参考文献	289

第一章 绪 论

§ 1. 层析成像原理

层析成像概括来说,是指在不损伤研究“对象”内部结构的条件下,对某种射线源,根据从“对象”外部用检测设备所获得的投影数据,运用一定的数学模型和重建成像技术,使用计算机生成对象内部二维图像,再从一系列二维图像构成三维图像,重现“对象”内部特征。现人们把函数分布称为图像。对象内部的某物理量的图像是未知的,CT技术就是由投影数据去建立此未知图像,简称为**图像重建**。它不是一般的图像处理

例1 医学 X—CT (图 1.1)

医学 X—CT 装置是由 X 射线源、检测器、计算机、图像显示器等几个主要部分组成。由图 1.1 可见, X 射线源与检测器同步地围绕人体作旋转运动,同时在每次旋转之间,作大量的平移。由 X 射线源发出的均匀的 X 射线束穿过人体后,由于人体的不同组织对 X 射线的吸收系数(此吸收系数分布函数,就是 CT 所要重建的图像)不同,因而检测器在接收到的不同强度的 X 射线的投影数据中,含有反映人体组织的信息。将从检

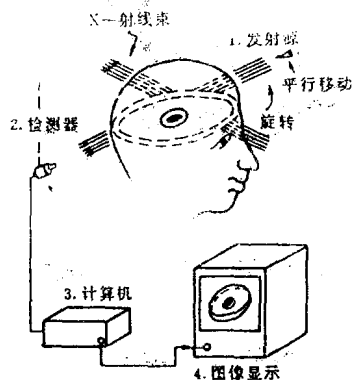


图 1.1 CT 扫描机的组成

测器得到的资料数据送入计算机进行一定程序的处理，最后可以在显示器上看到人体所探测部位的横断面图像（即光的吸收系数分布函数）的重建。这就是人们所希望的，不经过解剖手段而得到的剖视图。医院大夫根据此图像对病情作诊断。X—CT 重建的图像，不同于以往大家熟悉的将器官都重叠在一起的整体 X 光照相。CT 扫描产生一个很薄的人体取样横断面薄片图形，而且其图像质量大大优于以往的 X 光照相。此薄片图像，使病人体内的异常组织或病变能更充分、更精确地暴露出来，以尽早得到及时治疗。

例 2 钻孔电磁波法井间层析成像（图 1.2）

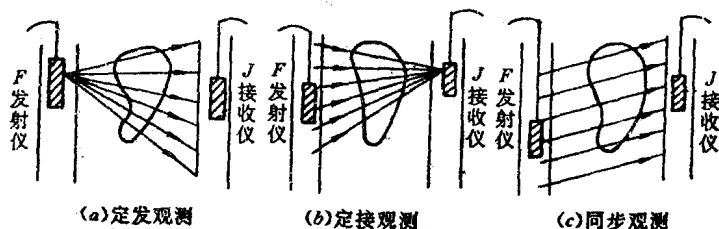


图 1.2 观测方式

大家知道，地球物理勘探方法甚多，大体可分为航空物探，地面物探和地下物探等三类。“钻孔电磁波法”是地下物探方法之一，它是把无线电波发射仪和接收仪放入井中，在钻孔与钻孔之间寻找矿体或其它地质异常体（包括溶洞，采空区等），以期取得较好的地质效果。

钻孔电磁波法野外数据采集，类似 X—CT 的数据采集。电磁波射线源，发射天线和接收天线皆可用电缆置放在井内，并可上、下移动。例如在一个钻孔内置放发射天线，在另一钻孔置放接收天线。观测频率为点频。对一工作频率，有以下三种观测方式来获取振幅数据，即用电磁波射线作 CT 扫描。

定发观测：发射天线在孔内某处固定，接收天线在另一孔内

适当上、下移动位置，进行观测扫描（图 1.2(a)）。

定接观测：与定发观测完全类似（图 1.2(b)）。

同步观测：（图 1.2(c)）。

观测点频一般为：

0.5, 1, 3, 5, 8, 10, 20, 30, 50 (Hz)。

人们可控制场源频率、位置和观测方式。

电磁波在地下不均匀介质传播时，媒质结构不同，吸收系数就不同。此吸收系数分布函数是未知的，但可根据上述所获得的投影数据，按层析成像原理，获得井间吸收系数图像。这就是物探“大夫”所期望得到的图像。此图像反映了钻孔间介质的电性差异及其分布。

例 3 跨孔和坑道地震 CT^[3]

利用主频为 10 kHz—1 MHz 的声波在井孔间或坑道内测量波的走时和振幅，然后，可用 CT 技术对井孔或坑道之间的介质成像，其应用环境与医学上的 CT 技术最为接近。

例 4 利用天然地震体波记录的层析成像（图 1.3）。

全球性分布的天然地震台网已经接收了大量地震波记录，它们可以用来研究地球内部波速结构，如图 1.3 所示。研究反射地震 CT。

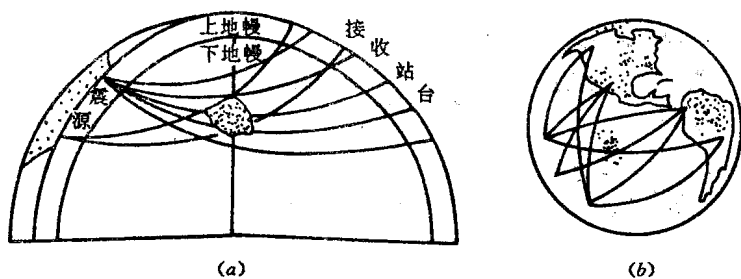


图 1.3 利用天然地震记录研究地幔波速结构的示意图

(a) 地球截面图，研究区域位于震源区和接收台站之间；

(b) 震源和测站在地球表面分布的示意图。

§ 2. 层析成像系统与图像重建类型

计算机层析成像有三个组成部份：一是数据采集系统；二是图像重建；三是图像后处理和显示。它所研究的问题是：怎样在不损研究“对象”的前提下去探知“对象”内部的情况，即通过对携带有对象内部信息的物理参数的测量，并用一定的重建方法去处理测得的数据，以把对象内部的情况用无重叠、清晰的二维或三维图像的形式再现出来。本书将着重介绍图像重建的数学基本理论和方法。

顺便提一下两个相邻的领域：

(i) 数字图像处理：研究如何对所获得的图像或图像系列进行处理。例如研究图像的量化、滤波、变换、增强、修复、识别、编码等。

(ii) 计算机绘图：研究如何借助于计算机把有用的信息用图像的形式表现出来。即研究图像输入、输出、产生、转换、处理、传送的理论和技術。

1. CT 成像系统

(1) 按发射源分类。按发射源有相应的 CT 成像系统。发射源很多，有 X 射线、电磁波射线、 γ 射源、超声波、地震波、电子注、射频和微波场以及激光束等十余种，且有相应的物理量。

(2) 按人们对射源或能量源的控制程度来划分，可把成像系统分为三类。

① 遥测型成像系统 (Remote-Probing CT) 采用人们可以加以控制的、位于被成像物外部的发射源来进行成像。成像方式：

a. 透过式：X—CT、电磁波 CT (如例 2)、衍射型 CT 等；

b. 回波式：合成孔径成像、反射 CT、多频全息成像等。

② 遥感型成像系统 (Remote-sensing CT) 采用人们无法在成像过程中直接控制的, 而是从被测物内部发射出来的发射源 (我们称之为内部源), 如人的心电信号, 温度的辐射场等等来进行成像。

属于遥感型的 CT 系统有: ECT、PECT、ECG、EEG、辐射式测温仪、射电望远镜等。

③ 混合型成像系统 典型的例子如核磁共振断层扫描技术 (NMRCT), 解决了穿透率和分辨率的矛盾, 不同于一般的光学成像原理。

2. 图像重建类型

我们考虑按几何光学和非几何光学来分类, 所以称之为几何光学, 是因为在波长趋近于零的条件近似成立时, 光学的许多定律可以用几何学上的许多语言来描述。

(1) 几何光学图像重建.

① 射线为直线行进下的重建.

这是 CT 中最基本的重建图像, 本书将详细介绍。

② 考虑折射、反射后的修正.

当探测源不是 X 射线或高能粒子流, 而是声波和电磁波时, 波穿过被测物将产生折射、反射、散射等物理过程, 在进行图像重建时, 必须加以考虑。

无论是声波, 还是电磁波, 只要它们的波长小于成像系统中任何散射体的线性尺寸时, 可以认为波长趋近于零, 不考虑这些波的波动特性, 而把它们传播看成以射束 (Ray) 传播, 也就是说可以用几何光学的研究方法来进行图像重建。

本书将介绍数字射线寻迹法及它的物理基础, 即正演特征线法。

(2) 非几何光学图像重建.

① 散射理论; ② 相应的数学理论.