高职高专教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

岳贵新 [主编]

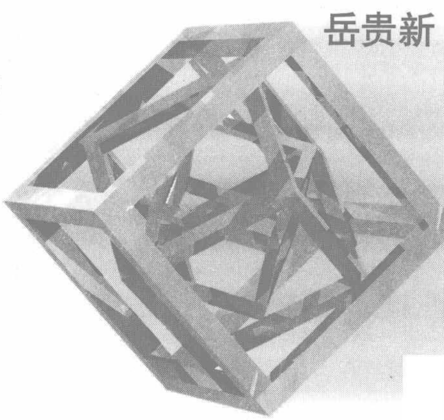
人民交通出版社
China Communications Press

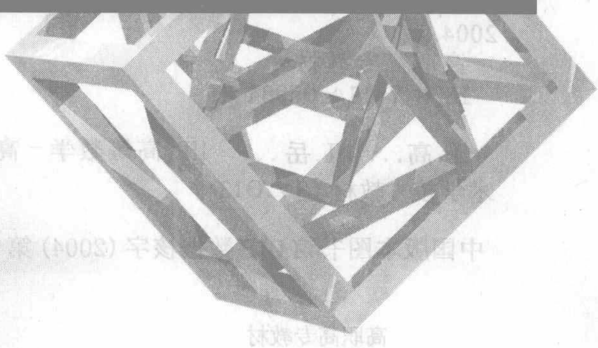
高职高专教材

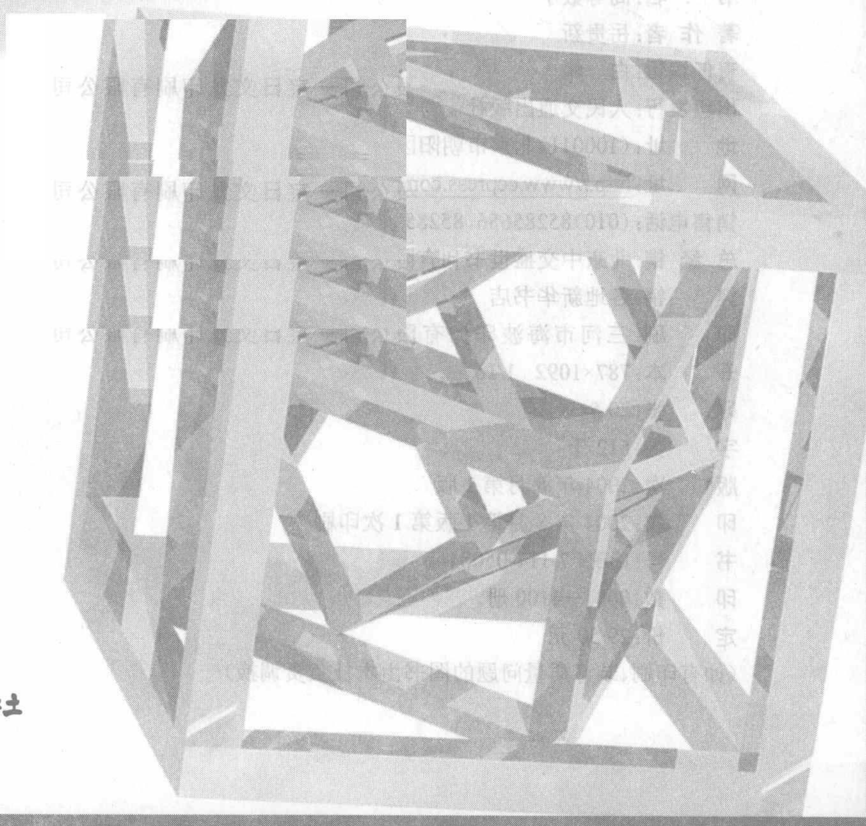
高等数学

GAO DENG SHU XUE

岳贵新 [主编]







人民交通出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在总结高职高专数学教学改革成功经验的基础上编写的。本书紧密围绕高职高专的培养目标，以"必需、够用为度"的原则，淡化理论，强化能力，立足应用，着重介绍基础知识和培养解决实际问题的能力。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数等。

本书可作为高职高专学生用书，也可作为成人教育数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/岳贵新主编.—北京：人民交通出版社，2004.9

高职高专教材

ISBN 7-114-05084-4

Ⅰ.高... Ⅱ.岳... Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第051462号

高职高专教材

书　　名：高等数学

著 作 者：岳贵新

责任编辑：白　峭

出版发行：人民交通出版社

地　　址：(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网　　址：http://www.ccpress.com.cn

销售电话：(010)85285656，85285838，85285995

总 经 销：北京中交盛世书刊有限公司

经　　销：各地新华书店

印　　刷：三河市海波印务有限公司－宝日文龙印刷有限公司

开　　本：787×1092　1/16

印　　张：20.5

字　　数：512千

版　　次：2004年8月第1版

印　　次：2004年8月第1版第1次印刷

书　　号：ISBN 7-114-05084-4

印　　数：0001－4100册

定　　价：29.50元

前 言

本教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的，可供高职高专学生及成人教育学员使用。

近几年，全国范围内围绕高职高专培养目标进行的高职高专数学教学改革取得了丰硕的成果。在认真总结全国高职高专教育改革成果的基础上，结合这些年来在数学教学改革方面的成功经验，我们精心编写了本教材。

在编写中，充分考虑高职高专的特点和要求，以应用为目的，以必需、够用为度。在教材内容选排上，在保持科学性和系统性的前提下，适度淡化部分理论性比较强的内容，侧重几何说明，增强直观性。对于概念的引入，注重通过实例阐述其含义及实际意义，强调与实际问题的联系，着重于培养分析问题和解决问题的能力。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数等。同时考虑学科之间的交叉和渗透，本教材增加了微积分在经济学中应用的内容，亦可供经济管理类专业选用。

建议本教材的基本教学时数不少于120学时，带$\star$号的内容要另行安排学时。

本书由岳贵新主编，张唯春、庄建红、刘颖、张东为副主编，张梓怡、勾丽杰、刘汝臣、丛政义、邱翠萍、刘枫、由丽丽、于丽妮、朱如红参加编写，由曲春平、栾林主审。

在本书编写过程中，得到了孔繁瑞同志的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，时间仓促，不足之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正。

编　者

2004年3月

目　录

第一章　函数与极限

极限是数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础，本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题。

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义1　设 D 是一个非空实数集，若对 D 中的每一个数 x，按照某个对应法则 f，y 都有确定的值与它对应，则 y 叫做 x 的函数，记作 $y=f(x)$。x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域。

在函数定义中，若对于任意 $x\in D$，都有惟一确定的 $y\in M$ 与它对应，则这种函数就称为单值函数，否则就称为多值函数。

例如，由方程

$$x^2+y^2=a^2$$

所确定的以 x 为自变量的函数为

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

可以看出，对于任意 $x\in[-a,a]$，上式确定了两个 y 值，即函数 y 是由两个单值函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 所构成的多值函数。

今后如无特殊说明，所研究的函数都是指单值函数。

若对于 $x_0\in D$，y 有确定的值与之对应，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$f(x)$ 在 x_0 处的函数值记为

$$y|_{x=x_0},f(x)|_{x=x_0}\text{或}f(x_0)$$

对于同一个问题中的不同函数，应该采取不同的记号，如 $f(x)$、$\varphi(x)$、$F(x)$、$\Phi(x)$ 等。

例1　求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{|x+5|}$ 的定义域。

解　对于 $f(x)$，要求分子中的被开方式非负，分母不为0。即

$$\begin{cases}x^2-9\geqslant 0\\|x+5|\neq 0\end{cases}$$

解此不等式组，得

$$\begin{cases}x\leqslant -3\text{或}x\geqslant 3\\x\neq -5\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $D=(-\infty,-5)\cup(-5,-3]\cup[3,+\infty)$。

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(0)$、$f(x^2)$、$f[f(x)]$、$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$。

解 $f(0)=\dfrac{1}{1-0}=1$

$$f(x^2)=\frac{1}{1-x^2},D=\{x\mid x\neq-1,1;x\in R\}$$

$$f[f(x)]=f\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x},D=\{x\mid x\neq0,1;x\in R\}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f(1-x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x},D=\{x\mid x\neq0,1;x\in R\}$$

两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才是相同的函数。

例如，函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应法则都相同，所以它们是相同的函数。

又如，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数。注意，常量 $y=C$ 也符合函数定义，因为当 $x\in R$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C，此时也称其为常数函数。

2. *函数的表示法*

表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图像法三种。有时，我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示。

例如：函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\geqslant0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个函数。当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$。它的图像如图 1-1 所示。像这样，在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为分段函数。

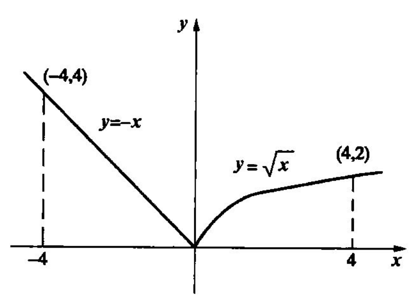


图 1-1

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算。

例如，在上面的分段函数中，

$$f(4)=\sqrt{4}=2,f(-4)=-(-4)=4$$

二、初等函数

1. *反函数*

定义 2 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y\in M$，在 D 中都有惟一的确定 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，那么，由此所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$）叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，它的定义域为 M，值域为 D。

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以，反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$。函数 $y=f(x)$

的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

例 3　求 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数，并写出它的定义域。

解　因为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，

所以

$$e^x-e^{-x}=2y$$

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $e^x>0$，上式的根号前取正号，即

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

于是

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

所以所求反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\qquad(x\in R)$$

2.基本初等函数

下列函数称为基本初等函数。

(1)幂函数　$y=x^\mu$　$(\mu\in R)$

(2)指数函数　$y=a^x$　$(a>0$ 且 $a\neq1)$

(3)对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0$ 且 $a\neq1)$

(4)三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$

(5)反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

为了便于应用，将它们的定义域、值域、图像和主要性质列表(表 1-1、表 1-2、表 1-3、表 1-4)如下：

表 1-1

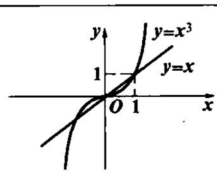
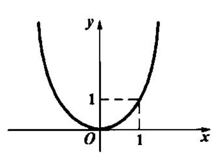
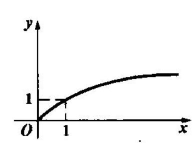
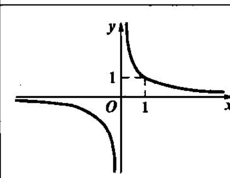
函数	幂　函　数　$y=x^\mu$			
	$\mu=1,3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调增	在 $(-\infty,0]$ 内单调减 在 $[0,+\infty)$ 内单调增	单调增	在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内分别单调减

表 1-2

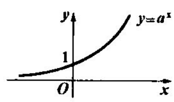
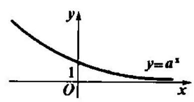
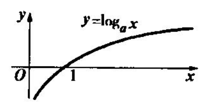
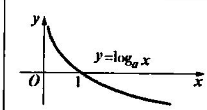
函　数	指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

表 1-3

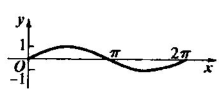
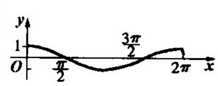
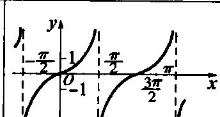
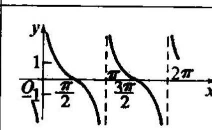
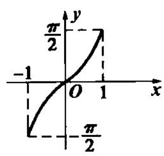
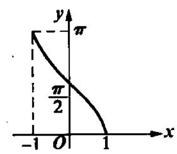
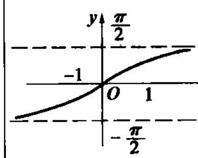
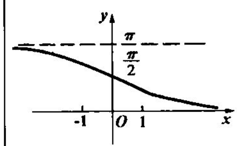
函　数		$y=\sin x$（正弦函数）	$y=\cos x$（余弦函数）	$y=\tan x$（正切函数）	$y=\cot x$（余切函数）
图　像					
定义域		$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in Z)$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in Z)$
值域		$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
奇偶性		奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性		$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	单调增	单调减	单调增	单调减
	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	单调减	单调减	单调增	单调减
	$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	单调减	单调增	单调增	单调减
	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$	单调增	单调增	单调增	单调减

表 1-4

函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数）	$y=\arccos x$（反余弦函数）	$y=\arctan x$（反正切函数）	$y=\operatorname{arccot} x$（反余切函数）
图像				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=-\arctan x$	$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$

这些基本初等函数在初等数学中已作过详细介绍，在此不再赘述。

3.复合函数

定义 3 设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$的函数值全部或部分在 $f(u)$的定义域内，此时(y 通过 u 的联系)也是 x 的函数，我们称此函数为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

u 称为中间变量。

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域与 $u=\sin x$ 的定义域相同，都是全体实数 R。

又如，$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域$[-1,1]$是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的子集。

再如，$y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$，$u=x^2+2$ 的值域为$[2,+\infty)$，从而对于 $u=x^2+2$ 定义域中的任意一个 x 值，按 $u=x^2+2$ 所得的 u 值，均不属于$[-1,1]$范围内，所以不能构成复合函数。

复合函数也可由多个函数经过有限次复合而成。例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x$ 可构成复合函数 $y=\sin\sqrt{1-x}$，这里 u、v 都是中间变量。

在研究复合函数这个概念时，有时我们重点并不在“复合”，而在于“分解”，即如何将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，这样更便于我们对函数的研究。

例 4 下列函数是由哪些简单函数复合而成？

(1)$y=\lg(1+x^2)$　　(2)$y=3^{\cos x}$

(3)$y=\arctan(1+\sqrt{1+x^2})$　　(4)$y=\cos^2 3x$

解 (1)$y=\lg(1+x^2)$是由 $y=\lg u$，$u=1+x^2$ 复合而成。由于 $u=1+x^2$ 为多项式，可作为一简单函数。

(2) $y = 3^{\cos x}$ 是由 $y = 3^u, u = \cos x$ 复合而成。

(3) $y = \arctan(1 + \sqrt{1 + x^2})$ 是由 $y = \arctan u, u = 1 + \sqrt{v}, v = 1 + x^2$ 复合而成。

(4) $y = \cos^2 3x$ 是由 $y = u^2, u = \cos v, v = 3x$ 复合而成。

4.*初等函数*

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数。例如

$$y = \frac{\sin x}{x} + \cos x, y = \sqrt{\cos \frac{x}{2}}$$

等都是初等函数,而

$$y = \begin{cases} 3^x (x \geqslant 0) \\ x^2 (x < 0) \end{cases}, y = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

等都不是初等函数。

微积分所研究的对象主要是初等函数。

习题 1-1

1.下列各题中所给的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$　　(2) $y = x$ 和 $y = (\sqrt{x})^2$

(3) $y = 2 - x$ 和 $y = \dfrac{4 - x^2}{2 + x}$　　(4) $y = \arccos x$ 和 $y = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$

(5) $y = \ln \sqrt{x - 1}$ 和 $y = \dfrac{1}{2}\ln(x - 1)$　　(6) $y = |x - 1|$ 和 $y = \begin{cases} 1 - x & (x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ x - 1 & (x > 1) \end{cases}$

2.求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{3x + 4}$　　(2) $y = \dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$

(3) $y = \sqrt{1 - |x|}$　　(4) $y = \lg \dfrac{1 + x}{1 - x}$

(5) $y = \sqrt{2 + x} + \dfrac{1}{\lg(1 + x)}$　　(6) $y = \arccos \sqrt{2x}$

(7) $y = \dfrac{x}{\tan x}$

3.设 $f(x) = \arcsin x$,求 $f(0)$、$f(-1)$、$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$f(1)$。

4.设 $G(x) = \dfrac{1}{2}\arccos \dfrac{x}{2}$,求 $G(0)$、$G(1)$、$G(\sqrt{2})$、$G(-\sqrt{3})$、$G(-2)$。

5.设 $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$,求 $f(x^3)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$\dfrac{1}{f(x)}$。

6.设 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 2x & (0 \leqslant x < \frac{1}{2}) \\ 2(1 - x) & (\frac{1}{2} \leqslant x < 1) \\ 0 & (x \geqslant 1) \end{cases}$,作出它的图像,并求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$、$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$、$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$、$f(2)$ 的值。

7.求下列函数的反函数,并写出反函数的定义域:

(1)$y=x^2-2x\quad(x>1)$　　(2)$y=10^{x+1}$

(3)$y=\frac{1-x}{1+x}$　　(4)$y=\sin x\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}\right)$

(5)$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

8.将下列各题中的 y 表示为 x 的函数,并写出它们的定义域:

(1)$y=\sqrt{u},u=x^2+1$　　(2)$y=\ln u,u=3^v,v=\sin x$

9.指出下列各复合函数的复合过程:

(1)$y=\sqrt{1-x^2}$　　(2)$y=e^{x+1}$　　(3)$y=\sin\frac{3x}{2}$

(4)$y=\cos^2(3x+1)$　　(5)$y=\ln\sqrt{1+x}$

(6)$y=\arccos(1-x^2)$　　(7)$y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$

第二节　极　　限

一、函数的极限

为了便于研究问题,我们先给出一些符号。

设 x 为自变量,如果 $x>0$,且 x 所取的值无限增大,x 的这种变化过程,记为 $x\to+\infty$,读作"x 趋向正无穷大";如果 $x<0$,且 x 所取的值使 $|x|$ 无限增大,x 的这种变化过程,记为 $x\to-\infty$,读作"x 趋向负无穷大";如果 x 所取的值使 $|x|$ 无限增大,记为 $x\to\infty$,读作"x 趋向无穷大",显然,$x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 这两种变化过程。

如果 x 的变化过程是趋近某一常数 x_0,则记为 $x\to x_0$,读作"x 趋近于 x_0";如果 x 是从 x_0 的左侧(从小于 x_0 的方向)趋向 x_0,记为 $x\to x_0^-$;如果 x 是从 x_0 的右侧(从大于 x_0 的方向)趋向 x_0,记为 $x\to x_0^+$。当 $x\to x_0$ 时,它包含了 $x\to x_0^-$ 及 $x\to x_0^+$ 这两种变化过程。

1.当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

例 1　函数 $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$(如图 1-2)。考察 $x\to\frac{1}{2}$ 时,这个函数的变化趋势。

从图 1-2 中可以看出,当 x 无限接近于 $\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于 2。这时称 2 为 $x\to\frac{1}{2}$ 时函数 $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ 的极限。

例 2　函数 $g(x)=-x^2+1$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,(如图 1-3)。考察当 $x\to\frac{1}{2}$ 时函数 $g(x)$ 的变化趋势。

从图 1-3 中可以看出,当 x 无限接近于 $\frac{1}{2}$ 时,函数 $g(x)$ 的值无限接近于 $\frac{3}{4}$。这时称 $\frac{3}{4}$ 为 $x\to\frac{1}{2}$ 时函数 $g(x)=-x^2+1$ 的极限。

上面两例都考察了 $x\to\frac{1}{2}$ 时函数的变化情况。例 1 中函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时没有定义,例 2

中函数 $g(x)$在 $x=\dfrac{1}{2}$处有定义。由此可见,函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处极限存在与否,与函数在 $x=x_0$ 处是否有定义无关。

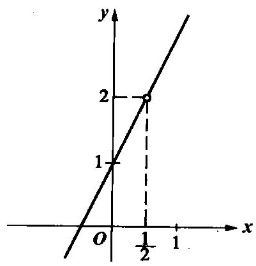


图 1-2

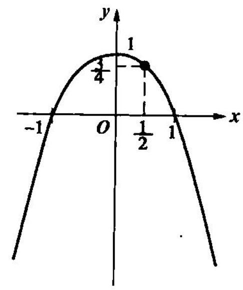


图 1-3

为了叙述方便,我们将开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心,$\delta(\delta>0)$为半径的邻域,记为 $\mathrm{U}(x_0,\delta)$;将开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,且 $x\neq x_0$ 时称为以 x_0 为中心,$\delta(\delta>0)$为半径的去心邻域,记为 $\mathrm{U}(\mathring{x}_0,\delta)$。

定义 1 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一个去心邻域内有定义,当 $x\to x_0$ 时,如果函数 $f(x)$的值无限接近于某一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A(\text{或当 } x\to x_0 \text{ 时}, f(x)\to A)$$

例 3 在单位圆上观察$\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 和$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ 的值。

解 作单位圆,并取$\angle AOB=x$(如图 1-4),则

$$\sin x=BA,\cos x=OB$$

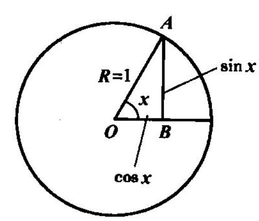


图 1-4

当 $x\to 0$ 时,$BA\to 0$,$OB\to 1$,所以

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

例 4 考察极限 $\lim\limits_{x\to x_0}C$(C 为常数)和 $\lim\limits_{x\to x_0}x$

解 设 $f(x)=C$,$y=x$,因为当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$的值恒等于 C,所以

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}C=C$$

当 $x\to x_0$ 时,y 的值无限接近于x_0,所以

$$\lim_{x\to x_0}y=\lim_{x\to x_0}x=x_0$$

上面我们讨论了当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限,这里 x 是以任意方式趋向 x_0 的。但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 左侧趋向 $x_0(x\to \mathring{x}_0^-)$的情况,或 x 仅从 x_0 的右侧趋向 $x_0(x\to \mathring{x}_0^+)$的情况。

定义 2 设函数 $f(x)$在 x_0 的左半邻域$(x_0-\delta,x_0)$(其中 $\delta>0$)[或右半邻域$(x_0,x_0+\delta)$]内有定义,且当 $x\to \mathring{x}_0^-$[或 $x\to \mathring{x}_0^+$]时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限[或右极限],记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或} f(x_0-0)=A(\text{即当 } x\to \mathring{x}_0^- \text{ 时}, f(x)\to A)$$

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或} f(x_0+0)=A(\text{即当 } x\to \mathring{x}_0^+ \text{ 时}, f(x)\to A)$$

根据 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限及左、右极限的定义,易得下面的定理。

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-x & (x\leqslant 1)\\ 1+x & (x>1)\end{cases}$,当 $x\to 1$ 时的极限。

解 从图 1-5 可见函数在 $x=1$ 处的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x)=2$$

即函数在 $x=1$ 处的左、右极限都存在,但不相等,由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在。

2. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先看下面一个具体例子。

例 6 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$(如图 1-6),考察当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势。

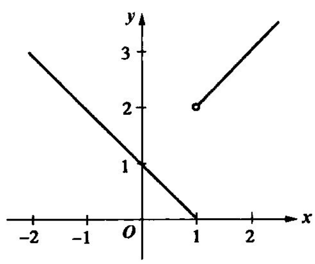


图 1-5

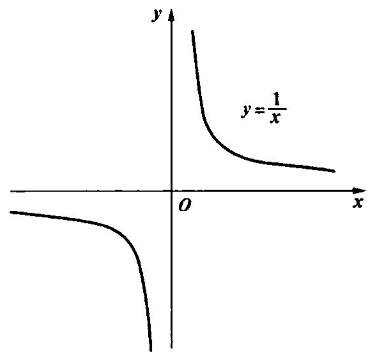


图 1-6

从图中可以看出,当 $x\to\infty$ 时,曲线与 $y=0$(x 轴)无限接近,也就是说,当 $x\to\infty$ 时,对应的函数值 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近 0。这时我们称 0 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a(a>0)$ 有定义,当 $x\to\infty$ 时,如果函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A(\text{或当 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A)。$$

例 7 考察函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。

解 因为 $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}=2+\dfrac{3}{x^2+1}$,所以当 $x\to\infty$ 时,对应的函数值 $f(x)=2+\dfrac{3}{x^2+1}$ 无限接近于常数 2,故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2$$

有时对某些函数,我们仅考虑当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限。

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义,当 $x\to+\infty$ 时,如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或 } x\to+\infty \text{ 时}, f(x)\to A)。$$

类似地,当函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 内有定义,当 $x\to-\infty$ 时,如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A(\text{或 } x\to-\infty\text{ 时},f(x)\to A)。$$

例 8 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

解 (1)从图 1-7 可看出,当 $x\to+\infty$ 时,曲线与 $y=0$(x 轴)无限接近,即当 $x\to+\infty$ 时,对应的函数值无限接近于 0,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$。

(2)从图 1-8 可看出,当 $x\to+\infty$ 时,$y=\arctan x$ 无限接近于 $\frac{\pi}{2}$,当 $x\to-\infty$ 时,$y=\arctan x$ 无限接近于 $-\frac{\pi}{2}$,当 $x\to\infty$ 时,$y=\arctan x$ 不接近于任意一个确定的常数,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

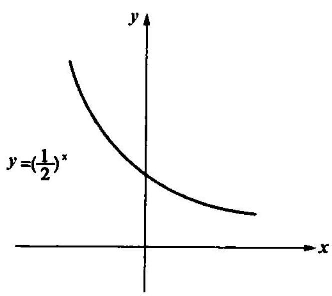


图 1-7

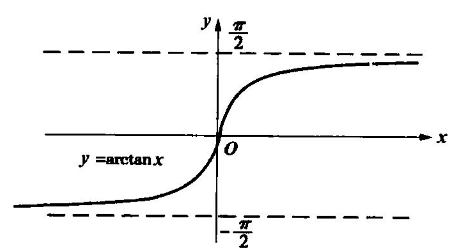


图 1-8

定理 2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

二、数列的极限

定义 5 定义域为正整数集的函数 $y_n=f(n)$ 称为整标函数。当自变量 n 按正整数 1,2,…,n,…依次增大顺序取值时,函数值按相应的顺序排成一列数

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

称为无穷数列,记为 $\{f(n)\}$。数列中的每一个数称为数列的项,第 n 项 $f(n)$ 称为数列的通项。

例如

$$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots,1+(-1)^n\frac{1}{n},\cdots;$$

$$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots;$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots。$$

都是数列,它们的通项依次为

$$1+(-1)^n\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},(-1)^{n+1},\frac{1}{2^n}$$