龚冬保教授考研数学

2005版

数学考研典型题

数学二

龚冬保 魏战线 张永怀 魏立线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

（2005 版）

数学考研典型题

考卷分析·应试对策·全真模拟

（数学二）

龚冬保　　魏战线
张永怀　　魏文线

西安交通大学出版社
·西安·

内容简介

本书自1999年问世以来,2005版是最新修订版,也是本书第6版.在本书问世后的5年中,每年均以高分覆盖考题.例如在2000年考研中,书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一,8题49分;数学二,7题44分;数学三,6题41分;数学四,5题44分);2000年修订后的第2版中相似题覆盖2001年考题66道(次)332分(数学一68分,数学二90分,数学三83分,数学四91分);2001年修订后的2002版中覆盖2002年考题338分(数学一87分,数学二91分,数学三81分,数学四79分);2002年修订后的2003版中覆盖2003年考题561分(数学一142分,数学二139分,数学三142分,数学四138分).2004年情况见本书附录.

本书由四部分组成:第一部分是考卷分析:对新"考试大纲"问世后2002~2004年的数学考研考卷作了列表分析,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了;第二部分是应试对策:讲的是复习备考及身临考场的策略;第三部分是典型题选讲与练习:选了1500余道题,其中500多道例题(包含了往届的考题),讲解采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示;另外,附录中收录了2002~2004年考研试卷,并做了解答.

本书可供准备考研的读者使用,也可供大学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2005版(数学二)/龚冬保等编著.
—6版(修订版).—西安:西安交通大学出版社,2004.4
ISBN 7-5605-1127-9

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第13559号

书　　名	数学考研典型题—2005版(数学二) 考卷分析　应试对策　全真模拟
主　　编	龚冬保
编　　著	魏战线　张永怀　魏立线
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部) (029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	陕西省轻工印刷厂
字　　数	502千字
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	17.625
版　　次	2004年4月第6版　2004年4月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-1127-9/O·144
全套定价	102.00(本册定价28.00元)

2005版前言

本书已出到了第六版，由于特点鲜明，受到广大读者一致好评．但也有不少读者建议我们将数学一、二、三、四分开出版，以使针对性更强．因此，从2005版开始，我们将本书分成三册出版："数学一"分册，"数学二"分册，"数学三和数学四"分册．同时，我们对本书也作了较大的修改，主要是：

1．各分册的篇幅减少了．即使是考试内容最多的数学一也不含诸如差分方程的内容，而数学二则因不考概率论与数理统计部分，篇幅减少的最多．

2．针对性更强了．趁修改机会，我们再一次依据最新的"考试大纲"，将个别"超纲"的例题或习题删去，使各分册紧扣各自大纲要求的内容．这样，考生用起来更方便．

3．修改了一些例题和习题．对保留的例题习题存在的错误作了进一步的订正．

4．附加一篇分析2004年考卷的专题文章，加上第一章的"考卷分析"，本书已相当详尽地分析了近三年的考卷．对于帮助考生了解考试题的特点，因而知道如何着手复习迎考，是十分重要的．希望读者仔细阅读这些内容，认真分析近年的考卷，再结合自己的实际，制订一个复习数学课程的计划，以提高复习的效率增强复习的效果．

本书的"典型"例题与习题之所以典型，在于这些例题的内涵很丰富．所以年年的考卷与我们的题相似的题，都在80％以上（见附录E）．由于各题内涵丰富，加以我们在旁注中、在解题方法上的引伸，有的读者一时难以消化．所以，我们建议读者在用本书时，一定要把我们的例题当习题，先自己做一遍，实在不会了再看解答，看懂了再把书放在一旁重新做，复习到一定时间后，再反过头来做这些题．直到能熟练做出为止．然后再做各章的一些练习题．

尽管我们对本书下了不少功夫，年年修改．但依然发现有不足之处，所以，恳切希望读者多提意见和建议．以使本书越改越好．

著者

2004．早春二月于交大

2004 版前言

这一版与前面几版比较，变化较大，主要有：

1. 原书的第 13 章模拟题及答案去掉了，从 2002 年起，我们和《数学考研教程》一书的编者，根据当年最新的信息，有针对性地另行编写《数学考研模拟考试试卷》，于当年 11 月前后单独出版，供考生检验复习效果和考前冲刺作用.

2. 第 1 章每年根据最近的考试情况有较大的修改；

3. 其余各章又增、删了一些例题与习题.

本书自问世以来，每年一版. 由于我们紧扣"考试大纲"，精选和编制了一些针对性强的典型题. 而且书中旁注"画龙点睛"强调了一些重要的题型、考点及解题的思路与方法，因此本书的典型题与年年考研的题相似的很多. 同时，本书前两章所讲"考卷分析"及"应试策略"也日益受到读者的关注. 不少读者反映，这两章对他们考上研究生起了很大的作用. 这一切都是对编者最大的鼓舞和激励，我们一定倍加努力，将此书越改越好.

此书排校差错以及编者的疏漏，年年有读者指正，在此表示衷心感谢. 虽屡经修改，挂一漏万之事仍难以避免，诚恳希望读者像以往一样提出宝贵意见.

编者

2003.3 于西安交大

第 1 版前言

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书. 在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场"潇洒走一回".

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分（第 1 章）是考卷分析. 新的"考试大纲"是 1997 年开始执行的，数学一是工学类代表，数学三是经济类的代表. 我们对 1997 至 1999 三年的六份考卷一一作了列表分析. 通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了. 只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么. 比如在数学能力方面，计算题基本上要占 50 分以上；在认知水平上，要求"理解"水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等. 这样，您看了本书第 1 章应当对数学考试"心中有数"了. 进一步，如果您借助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了. 因此，第 1 章是作复习前准备必不可少的. 第二部分（第 2 章）是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略. 在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键. 而"策略"又是最容易被人们忽视的. "考试又不是打仗，讲什么策略"? 岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键. 我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视. 其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓"优化运筹"不就是要寻找最优对策吗? 有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩. 第三部分（第 3～12 章）是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分. 我们选了 1 500多道题，其中 500 道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示. 要想考个好成绩，关键是提高解题能力. 我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的. 我们不主张单纯"猜题"，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比"猜题"更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分（第 13 章）是模拟题，数学一和数学三各两套. 在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次"热身". 用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距. 值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以"从难、从严、从实战"出发设计的. 每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得 60 分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考 60 分以上. 但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们！

编者

1999.5 于西安交大

目　录

第1章 考卷分析

依据教育测量学理论，本章对以往一些典型试题作了深入剖析，又对 2002、2003 年以及 2004 年数学二的 3 份试卷进行了定量分析，以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.

1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了，对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度，因此，我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量，一份考卷好比一杆"秤". 比如您上集市买菜，总要先看看秤一样，您准备考研究生，就得先分析考卷，看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的，摸一摸近几年考卷的底，然后再制订适合自己的应试策略，从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法，我们分为"微观分析"和"宏观分析"两种. 首先作"微观分析"，就是对试卷中每道试题都要认真作，边作边分析这道题的考点，解这个题的思路及主要方法是什么，这一类题在考研中的地位等等. 在"微观分析"的基础上进一步作"宏观分析"，我们的做法是，给每份试卷有一个表格，将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中，一份试卷一张表，只要看到表格中的数据，不必看具体的试卷本身，就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

分析好，大有益. 我们在本书中对近三年试卷的分析，不仅仅是将分析结果告诉读者，更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法，结合自己的实际，针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷. 以便作到对数学考研"心中有数".

1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题：

(1) (2004，Ⅰ、Ⅱ) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使( ).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单调增.　　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　　(D) $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(2) (2004,Ⅲ、Ⅳ) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且 $f'(a)>0,f'(b)<0$,则下列结论中错误的是( ).

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=0$.

解 选(C) 由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$,知存在 $\delta>0$,当 $0<x<\delta$ 有 $f(x)-f(0)>0$. 故(C) 正确.

(2) 选(D),(A)(B) 的正确性即是(1) 之选项(C). 至少(C) 的正确性可用连续函数的介值定理;故只有(D) 的结论是不对的,故选(D).

比较这两道题(1) 中仅有一点的导数 $f'(0)>0$ 的假设;(2) 中设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而(2) 中的选项(A),(B) 均可用到(1) 的概念,即只要对导数概念清楚就行了. 在(1) 中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续,那么选项(A) 也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续,且 $f'(x)>0$ 故存在 $\delta>0$,在 $(0,\delta)$ 上 $f'(x)>0$,因此 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上单调增. 因此(2) 的假设太强:用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a)>0$ 知存在 $\delta_1>0$,在 $(a,a+\delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0)>f(a)$;由 $f'(b)<0$ 知存在 $\delta_2>0$,在 $(b-\delta_2,b)$ 上 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减,有 $f(x_0)>f(b)$ 十分简单. 因此(1) 题要难些,且选项(A) 有迷惑性,作这样的题要求概念清楚,并直接证明(C) 的正确性;而(2) 较简单,用排除法较好因为(A)、(B)(C) 是正确的结论太好证明了.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1). 读者不妨查读一下,是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子:设 $f(x)=2-x^2$. 在 $[-1,1]$ 上,$f'(-1)=2>0$,$f'(1)=-2<0$,但在 $[-1,1]$ 上 $f(x)\geqslant1>0$,不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行,但剖析起来,尤其是对照剖析,使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会,甚至变化一下(2) 题,还可引领到"达布中值定理"这就是举一反三,触类旁通的意思,只限于会不会做这两道题去做题,就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2 (2001,Ⅰ) 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\sin h)$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

解 选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解,就能容易用排除法排除不正确选项. 如,由定义知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$. 而选项(A)、(C) 中,相当于 x 的因式是 h^2,只能取正数趋于 0,不能作导数存在充要条件;而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关. 也不能作可导充要条件. 因而只有(B) 是正确的选项. 不必举反例,也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习,深入分析本题,则可以有许多启发. 首先,我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C),可用同一反例:$f(x)=|x|$,满足 $f(0)=0$,且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\dfrac{1}{2}$ 存在及 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=0$ 存在,但 $f(x)$ 在 0 点不可导,说明(A)、(C) 选项均不对;对于(D),令

$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 也有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，而 $f(x)$ 在 0 点间断，故不可导. 因此(D) 也被排除. 仿此，读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及，本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释，与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例，均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性，此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看，以加深对导数概念及其存在的充分条件. 必要条件及充要条件的理解.

其次，我们来证明选项(B) 的正确性.

必要性. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=-f'(0)$ 存在.

充分性. 对任意 $x\to 0$，取 $|x|<1$，令 $1-e^h=x$. 或 $h=\ln(1-x)$. 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1-x)}$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问　由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ 令 $1-\cos h=x$，则 $x\to 0$. 不是也有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A) 也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来，令 $1-\cos h=x$，由 $h\to 0$，只能有 $x\to 0^+$. 因此，我们知道，选项(A) 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右导数存在的充要条件，因此，我们举反例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子；进一步看选项(C)，我们知道当 $h\to 0$ 时，$h-\sin h$ 是与 h^3 同阶的无穷小，因而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$. 只要当 $h\to 0$ 时，$h\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 的极限存在. $f'(0)$ 可以是无穷大量. 于是令 $f(x)=x^{2/3}$. 显然 $f(0)=0$，$f'(0)=\infty$ 不存在. 但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{h-\sin h}{h^3}\right)^{2/3}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D)，如果我们令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是有理数}\\ 1, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，那么，总有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，但 $f(x)$ 处处间断！

像这样去分析一道题，必定能作到举一反三、触类旁通，做一个题胜似做一类题.

例 1.3　(2002，Ⅱ)　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解　(1) 由于逆矩阵来源于矩阵乘法的逆运算. 故求逆矩阵的一种方法是：求 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵，便设法去分解 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的因式，于是由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，在等式两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，并移项整理得

$$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

得
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}.$$

从而
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},\ (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}).$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$.

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

用分块矩阵求逆得

$$8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

分析　此题使我们想到 2000 年数学二的一道填空题：

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ ________.

这个题的考点、思路与方法与 2002 年的题完全相同：为求$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$，先从 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 来分解 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 的因式：$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\Rightarrow\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$.

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}.$$

再联系 2001 年数学一的一道填空题：

设 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$，则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

解　还是分解 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的因式. $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=0$. 故$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$.

这样分析，我们发现同样考点、思路和解法的题，连续三年分别在数学一和数学二中考到. 那种认为考过的题不可能再考的说法显然是幼稚的. 从表面上看，这三道题是不同的，但是经过分析，它们考点、解法思路均相同，这三道题属于“一样的”题型. 再进一步想，在线性代数中，矩阵是重要的一章，而用分解因式方法求逆矩阵，几乎用遍了矩阵的代数运算及其性质，因此，这一类的题必定是考研的热点.（果然，2003 年数学二之一(6) 题及数学四之一(4) 题又考了. 见本书附录 D).

我们再看几道相同题型的高数题.

例 1.4　(2001，Ⅲ、Ⅳ 与 1991，Ⅰ、Ⅱ)

(1) (2001，Ⅲ)　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001，Ⅳ)　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(1)=3\int_0^{1/3}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

(3) (1991，Ⅰ、Ⅱ)　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且 $3\int_{2/3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明存在 $c\in(0,1)$ 使 $f'(c)=0$.

解　这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题. 我们只要解其中一题，其余两题读者一定

能做.

(1) 由 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$，便知其第一步用积分中值定理. 由积分中值定理得，存在 $\eta\in[0,\frac{1}{k}]$. 使 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$. 再从要证明的结果知，将用罗尔定理，区间是 $[\eta,1]\subseteq[0,1]$，辅助函数便是　$F(x)=xe^{1-x}f(x)$. $F(x)$ 显然在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 可导，且 $F(1)=f(1)=F(\eta)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$. 故由罗尔定理知. 存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)$$

于是 $F'(\xi)=0$　即 $\xi f'(\xi)-(\xi-1)f(\xi)=0$，也就是

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

1991 年的数学一、二相当于现在的数学一. 当年这套试卷的题所考的内容、思路、方法，10 年后在考经济类的数学三、四中出现了. 可见将工学类的数学与经济类的数学截然分开是无必要的. 另外，比较起来 2001 年经济数学的两道考题明显比工学类的“难”. 因此，应当说，考试大纲中“考试内容与要求”提法一样的考点，不论是数学一、二或数学三、四的深度是相同的. 而 2003 年数学三第八题与上述例题又“一样”，不过将连续的平均值 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(3)$. 换成离散均值：$\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=f(3)$ 而已. 值得考生高度重视!

1.3　宏观分析

我们用下面的表格，将考卷的一些特征数量化，通过一些数字的简单计算，就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性. 值得说明的是，我们这种分析不是考后的统计分析，考后的统计分析能评价试卷的“好与差”，主要提供考试管理人员、命题教师参考，当然，也可以提供考生参考. 但那种分析要有足够的样本，才可以作到分析的客观性. 我们的这种分析是根据自己的教学经验，对考生水平的估计而作出的. 虽说主观，却能结合考生实际，来解释客观事实，读者如能将这种分析和相应的统计分析参照对比，就更完美了.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的，我们将章名限制在四个字以内，有的章的内容不能用四个字概括则略写.

认知层次一栏中的“简用”是指简单应用，表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用；“应用”是指复杂应用，表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

“期望”是指整卷的难度期望分，其计算方法见表 1.1 后面的难度分析. 表格中的“分值”填写的是试卷中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2002 年数学二试卷

从表 1.1 可见，2002 年数学二的试卷出得比较好.

1. 内容分布　除行列式一章没有单独出题之外，各章均有题. 且有一道微分的题用到克莱姆法则.

2. 数学能力　与数学一一样，概念题少了点.

3. 认知层次　与数学一差不多.

4. 难度　分布更合理. 期望分这样计算：$0\times90\%+15\times75\%+52\times65\%+33\times35\%+0\times2\%=58.6$. 即容易、较易、中等、较难和难题期望分别为 90%、75%、65%、35% 和 20%. 加上试

卷较长，估计数学二平均成绩在 52 分左右. 如果有一道难题同时增加较易题就更好了.

表 1.1 2002 年数学二分析统计表

课程	分值 类别 章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限		3	8				11					3		8		11
	一元微分	6	6	11	13			26	10				3	15	18		36
	一元积分	3	10			14		13	14					20	7		27
	微分方程		3			3		3	3					6			6
线性代数	行列式																
	矩　阵		3	3					6					6			6
	向　量			6				3	3				3	3			6
	方程组		3		2			3	2				3	2			5
	特征向量		3						3				3				3
	合计	9	31	28	15	17		59	41				15	52	33		期望 58.6

(2) 2003 年数学二试卷

表 1.2 2003 年数学二分析统计表

课程	分值 类别 章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限	4	4	10	2			18	2			8		12			20
	一元微分		39	10	8		4	27	18	8		4	17	12	14	10	57
	一元积分		9	4	2	10		13	12					21	4		25
	微分方程		6		6	6		6	6	6				12	6		18
线性代数	行列式																
	矩　阵	4	4				4		4			4		4			8
	向　量	4						4				4					4
	方程组				8					8					8		8
	特征向量		10					10						10			10
	合计	12	72	24	26	16	8	78	42	22		20	17	71	32	10	期望 91

从表 1.2 看出

1. 内容分布　覆盖面大，积分题略少些.
2. 数学能力　各种类型的题均有，其中计算题多些.
3. 认知层次　比数学一稍好些.
4. 难度　题的难易搭配较好，较容易题略少点. 期望分为 91 分. 由于计算量大与数学一相似，

估计试卷改出平均分在 68 分左右.

(3) 2004 年数学二试卷

表 1.3　2004 年数学二分析统计表

课程	分值 类别 章目	数学能力					认知层次					难度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限		10		14			24					4	13	7		24
	一元微分	8	4	12	7			15	4	12			4	10	5	12	31
	一元积分	4	4		8	12		10	18				8	12	8		28
	多元微积	4	14				4	14				8		10			18
	微分方程	4	4			11	4	4	11			4		15			19
线性代数	行列式																
	矩　阵	4	4		2			8		2			8	2			10
	向　量				2					2				2			2
	方程组		9						9					9			9
	特征向量			9					9						9		9
	合计	24	49	21	33	23	8	75	51	16		12	24	73	29	12	期望 91

从表 1.3 看出:

1. 内容分布　覆盖面大.
2. 数学能力　计算题量大、综合题明显增加.
3. 认知层次　尚好. 绝大多是理解类的题.
4. 难度　分布较合理, 期望分 91 分, 计算量比 2003 年略少些, 因此时间长度稍好些, 估计评卷后平均分在 72 分左右.

1.4　小结与预估

上面 3 张统计表, 把 3 年试卷的考试内容、考核的能力、认知层次及难度等, 都数量化了. 这些数据不但清楚地告诉我们近年来数学考研试卷的结构, 而且, 如果我们进一步分析这些数据, 还可以获得更多的有益信息, 预测数学考研题的走向, 对准备未来的考试心中有数. 下面是我们的简单小结与预估.

1. 考试内容

各考卷最大共同点是内容覆盖面大. 当然, 总有些内容是年年都能考到的, 也有些是偶尔考到的, 比如高等数学中的定积分在力学、物理学方面的应用, 实际的极值问题等的考题很少出现但 2002 年出现了求压力的题. 对如线性代数中的行列式, 也不大单独出题.

2. 数学能力

计算题最多, 而在近 3 年的试卷中, 综合题的比例明显要高. 大多数综合题和应用题都要通过计算来完成, 因此, **强化综合运用数学知识能力及计算基本功的训练是最重要的.**

例 1.5 (2000 Ⅰ.二(1);Ⅱ.二(3))

设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

解 1 (概念清楚的解法).已知条件可化为 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'<0$,因而 $\dfrac{f(a)}{g(a)}>\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$. 选(A)

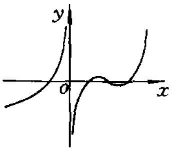
解 2 (灵活解法) 在[1,2]上令 $f(x)=1,g(x)=x$,显然满足已知条件,这时只有(A)正确,故选(A).

解 2 是非正规的解法,它可以不知道所给的已知条件是什么涵义,却能做对此题!

2001 年及 2003 年不仅是综合题增加了,而且概念推理的考查加强了,做题的灵活性也就更强了.

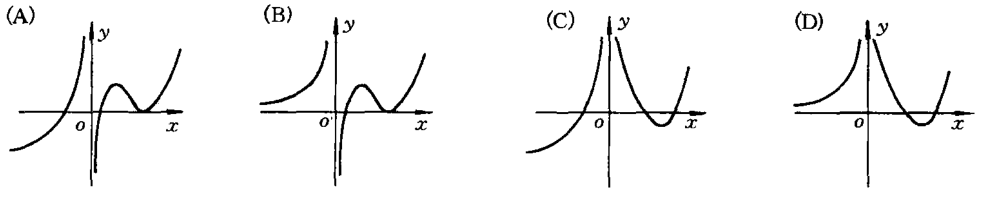
例 1.6 (2001,Ⅰ 二(1)、Ⅱ 二(5))

已知 $y=f(x)$ 在定义域内可导,它的图形如图(1)所示,则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为( )



例 1.6(1) 图

解 1 (筛选法),由 $y=f(x)$ 的图形知,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$. 故只有(B)、(D)可能正确;又在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)=0$ 有三个单根,故 $f'(x)=0$ 只有两个单根,



例 1.6(2) 图

故只有(D)正确. 选(D).

解 2 (灵活的特例法). 设 $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^2}, & x>0 \end{cases}$

图形如所设的图形,这时,

$$f'(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x^2}, & x<0 \\ \dfrac{1}{x^3}(x^3-11x+12), & x>0 \end{cases}$$

只要分析 $y=f'(x)$ 的图形上几个简单特点,便易选(D).

例 1.7 (2003,Ⅰ.Ⅱ) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,其导函数图形如图(1)所示. 则 $f(x)$ 有

(A) 1 个极小值点和 2 个极大值点.

(B) 2 个极小值点和 1 个极大值点.

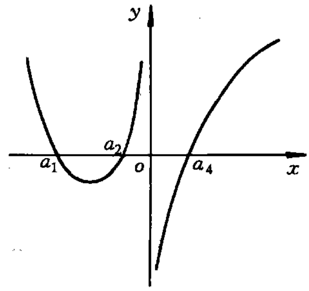
(C) 2 个极小值点和 2 个极大值点.

(D) 3 个极小值点和 1 个极大值点.

解 本题拟直接选. 从图上看 $f'(x)$ 有三个零点 a_1、a_2、a_4 和一个无穷型间断点 $a_3=0$. 而当 x 从左向右越过 a_1 点和 $a_3=0$ 点时,$f'(x)$ 由正变负. 故这 2 点是 $f(x)$ 的极大值点;同样,a_2、a_4 是极

小值点. 因而选(C).

例 1.6 是已知函数图形,研究导函数图形. 而例 1.7 是已知导数图形,研究原函数性质,实质是不定积分问题. 按图(1) 可以构造一个导数数如下:



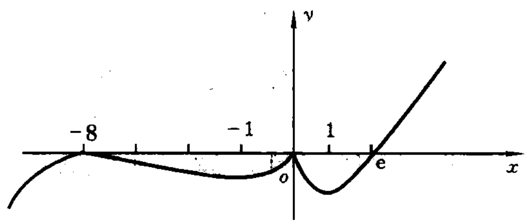
例 1.7(1) 图

令　$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}+2)}{x^{1/3}}, & x<0\\ \ln x\quad, & x>0\end{cases}$$

则 $f'(x)$ 的图形相似图(1) 中的图形.

而　$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}+4)+c, & x\leqslant 0\\ x\ln x-x+c\quad, & x>0\end{cases}$$

取 $c=0$. 则 $y=f(x)$ 的图形如图(2) 所示,其中 $-8,0$ 是 2 极大值点而 $-1,1$ 是 2 个极小值点.



例 1.7(2) 图

这样,不但能透彻理解这两道题,而且能加深理解函数与图形及原函数与导函数的关系.

例 1.8　(2001,Ⅱ.十)　设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η,使

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

解　(1) $f(x)=xf'(0)+\dfrac{1}{2}f''(\theta x)x^2\quad x\in[-a,a],0<\theta<1$

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\theta x)x^2\mathrm{d}x.$

本题概念强的地方在下一步. 如有的人知道广义积分中值定理而得

$$\int_{-a}^{a}f''(\theta x)x^2\mathrm{d}x=f''(\eta)\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^3f''(\eta)$$

从而证明已知的结果,便是我们通常说的"概念性的错"!这是因为 θ 不一定是唯一的,因而 $f''(\theta x)$ 不一定是 x 的函数,上述积分不能直接用广义积分中值定理,而应当这样做:$\theta x\in[-a,a]$,故 $m\leqslant f''(\theta x)\leqslant M$($m,M$ 分别是 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 的最小、最大值). 于是 $m\displaystyle\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f''(\theta x)x^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x$

即 $m\leqslant\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}f''(\theta x)n^2\mathrm{d}x\leqslant M$　而且由连续函数的介值定理知,存在 $\eta\in[-a,a]$,使 $\dfrac{3}{2a^3}\displaystyle\int_{-a}^{a}x^2f''(\theta x)\mathrm{d}x=f''(\eta)$,易得所要证明结果. 这个方法正是一般高等数学教科书上的积分中值定理的证明方法.(2001 年几道典型题例见本书的附录 B).

例 1.9　(2004 Ⅰ.Ⅱ)设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$,证明 $\ln^2b-\ln^2a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

证 1　(最常规证法). 设 $f(x)=\ln^2x-\ln^2a-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(x-a)$. $x\in[a,\mathrm{e}^2]$.

$f(a)=0$,只要证 $f'(x)>0$,而 $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$.

$f'(e^2)=0$,只要证 $f''(x)<0$,而 $f''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ (x>e)$ 成立.故 $f'(x)$ 单调减,$f'(x)>f'(e^2)=0$,从而知 $f(x)$ 单调增,取 $x=b$ 即得 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$ 成立.

证 2 (分析法).即欲证 $\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$,令

$f(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$,只要证在$[e,e^2]$内 $f(x)$ 单调增即可.以下证明过程同证 1.

证 3 (中值定理法).由拉氏中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln\xi}{\xi}$,故只要证$\frac{2\ln\xi}{\xi}-\frac{4}{e^2}>0$.以下证法同证 1.

这是 2004 年一道证明题,说明难题出在一元函数微积分学,尤其是微分学一章中最常见,又出现不等式的证明题,又以我们证 1 使用的方法最常见.

因此,**做题时,不但要基本功扎实,还要有灵活的、机智的方法.**

3. 认知层次

2000 年的考题在认知层次方面也开始有了属于"复杂应用"的高层次的题,如四套试卷中的公共题;2001 年则在简单应用层次以上的题大为增加.(例题见附录 B)

例 1.10 设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.试证明:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

分析 这道题主要反复运用下面性质:在$[a,b]$上连续不恒为零的、符号不变的函数 $f(x)$ 的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$(如 $f(x)\geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$).

于是,从$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,知 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少有一个零点 ξ_1,又若只有一个零点,由介值定理,就知 $f(x)$ 在$(0,\xi_1)$和(ξ_1,π)内必异号,于是,希望与假设矛盾,即与

$$\int_0^\pi f(x)(b+\cos x)\mathrm{d}x=0$$

矛盾,来定常数 b,使 $b+\cos x$ 在$(0,\xi_1)$和(ξ_1,π)内异号,因此 $b+\cos\xi_1=0$.这样,便获得了证法.

证 若 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内无零点,则由 $f(x)$ 连续及连续函数的介值定理,知 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内不变号,与$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.故至少存在 $\xi_1\in(0,\pi)$,使 $f(\xi_1)=0$;又若 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内仅有一个零点 ξ_1,则由介值定理及$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 知 $f(x)$ 在区间$(0,\xi_1)$和(ξ_1,π)内必异号.而 $\cos x-\cos\xi_1$ 在$(0,\xi_1)$内取正号;在(ξ_1,π)内取负号,也异号,于是 $f(x)(\cos x-\cos\xi_1)$ 不变号.从而

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x\neq 0$$

矛盾,故 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少有两个零点:$\xi_1\neq\xi_2$.

当然,这个题也可以证明可导函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[0,\pi]$上有三个零点,而 $F(0)=F(\pi)=0$,故只需证 $F(x)$ 在$(0,\pi)$内有一个零点,于是由