

机械振动学

提摩盛科著

翁心桐 徐华舫译

中国工业出版社

提 摩 盛 科 著

翁 心 櫚、徐 华 舫 譯

机械振动学

本书有系统的论述工程中的振动问题，是机械振动方面的世界名著。全书从一个自由度的系统、非线性系统讲起，进而论述两个及多个自由度的系统，最后探讨弹性体的振动，对杆、膜、板、环、桥梁、船体、涡轮盘板及其他机械工程中的振动问题作了具体的分析。

中文本原由徐华舫同志根据1937年第二版译出，后又由翁心桐同志按照1955年原第三版校订重译。

本书可作工程师、研究工作者处理振动问题时的重要参考书；也可作大专学校师生工程振动课程的教材或主要参考书。

S. Timoshenko 著 “Vibration Problems in Engineering”, Third Edition, D. Van Nostrand Company Inc., 1955.

* * *

机械振动学

翁心桐 徐华舫译

(根据机械工业出版社纸型重印)

*

机械工业出版社编辑部编辑 (北京阜成门外百万庄)

中国工业出版社出版 (北京佟麟阁路四10号)

(北京市书刊出版事业许可证出字第110号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $13^{13/16}$ ·字数 352,000

1958年7月北京第一版

1962年12月北京新一版·1962年12月北京第一次印刷

印数 001—556·定价(10-7)2.30元

*

统一书号: 15165·2116(一机-452)

譯者序

現代的工程科学迅速地走向精确計算的道路。这也就是說以前不太清楚的許多因素，現在正在逐個把它弄明白，以便設計時有更确切的把握。振动是这些因素中很重要的一个。这門科学配合着近代高速机器的發展，已經有了很大的成就。作为一个現代的工程师，不懂振动理論已經不行了，不論他是机械、航空、电机、还是土木工程师。就以土木工程师而論，看来他所要設計的結構，根本沒有迴轉的东西，似乎應該沒有什麼振动問題。但事实証明振动理論对土木工程师仍是要紧的，普通桥梁之类的結構就有振动問題存在，跨度較長的鋼索桥还可能有自激振动的問題發生（工程史上已經有好几起桥梁被振断的事实了）。至于机械、航空、电机各种工程里的振动問題就更多了。

因此，振动理論在大学工科里，現在已經成为一門普遍修讀（必修或选修）的課程。目前，合适的中文課本还很缺少。提摩盛科这本机械振动学是一本体系比較完整的書。正如苏联阿契尔康对于本書的評語中所說●[…早于1928年本書在美国初版，1931年譯成俄文，获得苏联讀者很高評價。在美国初版重印二次，1937年的第二版又重印了八次。分析本書流行極广的原因，不仅，或者并非主要由于作者所享的声望——材料力学，彈性理論和振动学說領域內当代大科学家之一，而应完全归功于本書所达到的高超成就，以致从事解决机器和建筑物振动問題的科学与工作者与工程师，应各备一册，置之案首，随时参考。这次新版，又經作者大力增补修訂，反映最新（包括苏联科学家在內）的研究成果，內容較前益臻完善。……]把它譯出来，一方面可供工程师們作参考之用，另一方面可供工科

● 摘自1956年苏联“国外新書”月刊第一期H. 阿契尔康的書評。

大學作教本用。就后一方面來說，只需在后几章中适当地增加一些習題就很合适了。

這本書原来是1951年由出版总署的翻譯局約徐华舫按原著1937年第二版翻譯的。譯成之后，由于当时国内急需苏联教材。大量出版苏联教材成为出版社的中心工作。本書的出版便被擱置下来。現在急需的教材已經有了一定程度的滿足。同时各方面的科学研究工作正在开展，对于一般的参考書有了需要。机械工業出版社決定將本書出版。因为原著1955年第三版已到書，自然应按新版翻譯。这部分工作是由翁心桐做的。对于新旧版相同的部分仍用徐华舫的旧稿。增譯部分力求語气与名詞前后一致。近年来力学名詞的翻譯比較統一。本書采用較為流行的譯名。也有一些譯名尙待商榷，在書中保留原名以供参考。

譯文內容如有錯誤，欢迎讀者不吝指正。

翁心桐 徐华舫

1957年11月

目 次

第一章 具有一个自由度的系統	9
1. 自由和諧振动	9
2. 扭振	17
3. 能量方程式在振动問題中的应用	23
4. 瑞雷近似解法	31
5. 迴轉軸的临界轉速	40
6. 强迫振动: 平稳的阶段	45
7. 强迫振动: 暫留的阶段	50
8. 强迫振动在工程技术上的应用	54
9. 其他技术上的应用	60
10. 迴轉机械的均衡問題	63
11. 阻尼	70
12. 有阻尼的自由振动	73
13. 有阻尼的强迫振动	79
14. 帶阻尼的彈簧底座	88
15. 帶庫倫阻尼的自由振动	91
16. 帶庫倫阻尼及他种阻尼的强迫振动	93
17. 周期性干扰力的一般情况	98
18. 一般的干扰力: 暫留阶段	105
19. 一般的干扰力: 圖解法	115
20. 自激振动	120
第二章 非綫性系統与彈簧性質随時間改变的系統	124
21. 非綫性系統的举例	124
22. 具有非綫性恢复力的系統之自由振动	128
23. 非綫性振动: 圖解法	135
24. 非綫性自由振动: 数字解法	142
25. 用逐次接近法解自由振动的問題	148
26. 非綫性的强迫振动: 平稳阶段	156
27. 黎茲解法在非綫性振动問題中的应用	162
28. 关于彈簧性質随時間变化的举例	167
29. 彈簧性質随時間变化的系統之不穩定条件	175
第三章 具有两个自由度的系統	184
30. 具有多个自由度的系統的举例	184
31. 具有两个自由度的系統的自由振动	186
32. 自由振动的举例	192
33. 具有两个自由度的系統的强迫振动	202
34. 帶有粘性阻尼的振动	208

35. 平穩运动的穩定性	218
36. 由于迟滯而促成的轉軸的弓狀迴旋	224
第四章 具有多数自由度的系統	230
37. 具有多数自由度的系統之自由振动	230
38. 軸的自由扭振	235
39. 自然頻率的近似計算法	241
40. 附数个圓盤的軸之强迫扭振	252
41. 柴油發动机曲軸的扭振	257
42. 干摩擦減振器	261
43. 多支点軸的橫向振动	264
44. 急螺作用对于迴轉軸临界轉速的影响	275
45. 軸与盤的重量对临界轉速的影响	284
46. 軸的彈性对于轉子均衡的影响	288
第五章 彈性体的振动	291
47. 棱柱形杆的縱向自由振动	291
48. 棱柱形杆的縱向强迫振动	299
49. 杆端附重的振动問題	305
50. 圓軸杆的扭振	311
51. 棱柱形杆的橫向振动	316
52. 兩端用鉸鏈固定的杆的自由振动	323
53. 具有他种端条件的杆之自由振动	328
54. 多支点梁的自由振动	333
55. 兩端有支架的梁的强迫振动	337
56. 桥梁的振动	348
57. 各种端条件下梁的强迫振动	354
58. 杆的截面有規定的运动时所产生的振动	358
59. 軸向力对于橫向振动的影响	364
60. 梁在彈性基础上的振动	367
61. 黎茲方法	370
62. 变截面杆子的振动問題	374
63. 船身的振动	381
64. 計算橫向振动頻率的数字解法	385
65. 梁的弯曲連帶扭轉的振动	394
66. 杆子受橫向撞击	398
67. 棱柱形杆的縱向撞击	403
68. 圓环的振动	410
69. 薄膜的振动	415
70. 板的振动	424
71. 渦輪盤板的振动	437

U81
5605

作者第三版序言

自从本書的第一版在 1928 年出版以来, 振动理論几乎已成为机械工程系的标准課程之一; 这个理論也愈来愈引起結構工程师們的興趣; 同时在这时期內, 振动的理論, 特別在非綫性振动方面有新的發展。为了使本書更适合于教学需要, 并且將若干較重要的新理論編入本書, 因此作了增訂。这也就是增訂版的主要目的。

第一章关于具有一个自由度系統的振动問題, 已作了澈底的增訂工作, 使本章包含各方面的广泛应用, 并增加了相当数量的習題。研究非綫性振动的第二章也較旧版大为扩展, 介紹了处理这类問題的新方法。为了使本書适用于只讀过动力学基本課程的學生們, 在第三, 四章中应用較为熟知的达倫培尔原理来代替勒格蘭日方程式 (Lagrangian Equations)。但在这兩章中关于多自由度系統振动的內容和前二版沒有很大的出入。有关于彈性体振动問題的第五章也經過澈底的改編, 有若干新的問題, 例如梁的弯曲及扭轉的組合振动, 在本章中作了討論。最后, 旧版中有关振动儀器的附录已全部刪去。近年来关于測量振动的技术有很大的發展, 如果把它們全部介紹就要占过多的篇幅。讀者如果对这方面有興味可以參看 M. Hetényi 所編的应力分析实验手册 (*Handbook of Experimental Stress Analysis*)。

S. 提摩盛科

D. H. 楊

波罗阿安, 加利福尼亚 1954 年 12 月

作者初版序言

現在機器的尺寸愈來愈大，轉速愈來愈高，因而機械設計中振動問題的分析也就愈益重要了。許多極重要的實際問題，如機器的均衡，轉軸和齒輪系統的扭振，渦輪葉片及盤板的振動，轉軸的弓狀迴旋 (Whirling)，鐵路軌道及橋梁在活載作用下的振動，機器底座的振動等，要想澈底了解這些問題，非懂得振動的原理不可。只有運用振動的原理，才能把機器的尺寸設計得使它在正常運轉中遠離強烈共振的臨界條件。

本書的寫法是这样的，逐步建立振動理論的基礎，同時配合許多例子，說明怎樣用理論來解決實際的技術問題；有些例子是從實際使用中的機器或其他結構上取來的。本書最初的底稿是作者一九二五年給西屋電器製造公司 (Westinghouse Electric and Manufacturing Company) 的機械工程師們講振動問題時所寫的講義，另一部分材料，取自作者早年出版的彈性理論一書^①。

本書的內容約分為：

第一章論具有一個自由度系統的和諧振動。這裡講了自由振動及強迫振動的一般理論，並舉均衡機及振動儀器為應用實例。另外講到處理較複雜物系可用的瑞雷 (Rayleigh) 近似解法，並用它來計算變截面轉軸的弓狀迴旋速度。

第二章是具有有一個自由度系統的非諧振動理論。這裡講到了分析自由振動及強迫振動的近似解法。仔細分析了柔度 (flexibility) 隨時間改變的物系的振動，並把結果用來研究電動機車平行杆原動系的振動問題。

第三章討論數個自由度的系統。首先建立具有數個自由度系統的一般振動理論，然後講到下列幾個應用；車輛的振動，轉軸的扭振，數個支點上的軸的弓狀迴旋速度，以及減振器。

第四章是彈性物體的振動理論。這裡談到的是：棱柱形杆的縱振、扭振、橫振，變截面杆的振動，橋梁、渦輪葉片和船身的振動，圓環、薄膜、板、以及渦輪盤板的振動。

附錄里把各種最重要的振動儀器簡略地介紹了一下，這些儀器在作振動的實驗研究時，都是非常有用的^②。

S. 提摩威科

安阿泊，密矢根州 1928 年 5 月 22 日

① 彈性理論 (Theory of Elasticity)，第二冊 (1916)——聖彼得堡，俄國。

② 這個附錄三版已取消，理由見三版序言。——譯者。

第一章

具有一个自由度的系統

1 自由和諧振动 一个彈性系統（如像一根有載荷的梁，或一根扭轉了的軸，或一条壓縮的彈簧）在平衡位置上，受到一个冲击，或在其上突然增加一个外力，或者突然除去一个外力，使这个彈性系統脫离原来的平衡位置，在新的位置，系統構件的彈性力就不能再和載荷相平衡，于是振动發生。一般地說來，一个彈性体系能作許多种不同型式的振动。例如，一根弦綫或一根梁，它的振动型式就要看划分全長的节点数目有几个而定。在最簡單的一种情况中，只需用一个座标就可以把振动系統的形态表明了。这种系統称为具有一个自由度的系統 (*systems with one degree of freedom*)。

拿圖 1 的情况来研究，如果把重物 W 安排得只能作上下的移动，而且彈簧的質量比重物 W 的質量小得多的話，那末这个系統便算作是一个自由度的系統。系統的形态只要用重物在鉛垂方向的位移便完全表明了。

对上述系統加一冲击，或突然增加一外力，或突然除去一外力，它就能产生振动。这种只靠彈簧的彈性力所維持的振动称为自由振动或自然振动。这种振动的解析式可以得自运动的微分方程式；只要作用在运动物体上的力全知道的話，运动微分方程式总是可以列出来的。

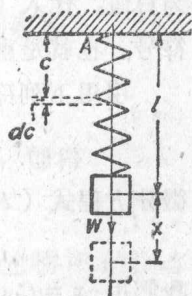


圖 1

令 k 代表使彈簧产生單位伸延所需要的載荷。这个量称为“彈簧常数” (*spring constant*)。如果載荷用磅作單位，伸延用吋作單位，

則彈簧常数的單位便是磅/吋。在重力 W 的作用下彈簧的靜變位是

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}。$$

令 x 代表振动的重物由平衡位置計算起的鉛垂方向位移，向下定为正值，則当重物在某位置 x 时彈簧中的張力等于

$$F = W + kx。 \quad (a)$$

我們將根据牛頓定律建立重物的运动微分方程式；这条定律說明一个質点的質量与該質点加速度的乘积，等于作用于該質点沿加速度方向的作用力。現在振动物体的質量是 W/g ， g 是重力加速度；物体 W 的加速度是位移 x 对時間的二次导数，用 $\ddot{x}$ 表示之；作用在物体上的力有重力 W ，方向向下，和彈簧的作用力 F （方程式 a ），当重物在圖1所示的位置时， F 力向上作用。所以現在可以列出重物的运动微分方程式

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - (W + kx)。 \quad (b)$$

不論重物 W 在那个位置上，这个方程式都是对的。譬如，在振动中，物体到了平衡位置的上面，并且彈簧产生压力时，則（ a ）式的值为負值，代入（ b ）成为正值，这时（ b ）式右側二項具有相同的符号。也就是重力和彈簧力相加起来，这显然是理所当然的。

引用下列符号

$$p^2 = \frac{kg}{W} = \frac{g}{\delta_{st}}， \quad (c)$$

微分方程式（ b ）可以写成如下的形式

$$\ddot{x} + p^2 x = 0。 \quad (1)$$

我們用 $x = C_1 \cos pt$ 或 $x = C_2 \sin pt$ 代到方程式（1）里去都能滿足此方程式；这里 C_1 和 C_2 是兩個任意常数。將這兩個解答合在一起便是（1）式的通解（*general solution*）：

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt。 \quad (2)$$

由此式可以看出重物 W 的鉛直运动是一种振動，因为 $\cos pt$ 和 $\sin pt$ 都是周期函数，每隔時間間隔 τ 就重复一次，因而可以列出关系式

$$p(\tau + t) - p't = 2\pi.$$

这个時間間隔称为振动的周期。其值可由 (d) 式得到

$$\tau = \frac{2\pi}{p}$$

或用 (c) 式的符号,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}. \quad (3)$$

可見振动的周期只决定于重量 W 和弹簧常数 k 的数值, 而与振幅的大小无关。我們也可以这样說; 一塊悬在弹簧上的重物 W 的周期和一个摆長等于弹簧的靜变位 δ_{st} (statical deflection 或譯为靜伸長) 的数字摆的周期相等。只要靜变位 δ_{st} 按理論算出或用实验方法定出, 振动的周期 τ 就可用公式 (3) 算出来。

單位時間內的振动次数, 例如每秒鐘的振动次数, 称为振动的頻率 (frequency)。以 f 代表頻率, 則

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \quad (4)$$

方程式 (2) 所代表的振动称为和諧运动 (harmonic motion)。要决定积分常数 C_1 与 C_2 , 必需考虑运动的起始条件。例如, 設在初瞬时 ($t=0$) 重物 W 离平衡位置的位移是 x_0 , 它的初速是 $\dot{x}_0$ 。

則將 $t=0$ 代入方程式 (2), 得

$$x_0 = C_1; \quad (e)$$

再將方程式 (2) 对時間微分一次, 并將 $t=0$ 代入, 即得

$$\frac{\dot{x}_0}{p} = C_2; \quad (f)$$

將 (e) 与 (f) 兩常数的值代入方程式 (2), 得重物 W 的振动方程式如下:

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt. \quad (5)$$

由这个式子我們看到整个振动包括兩部分; 一部分是与 $\cos pt$ 成正比的振动, 其值决定于重物的初位移, 另一部分与 $\sin pt$ 成正比, 其值决定于重物的初速 $\dot{x}_0$ 。这两部分都可以像圖 2a 与圖 2b 那样用

圖綫表示出来，表示位移对应于时间的关系。振动物体 W 在某一时间 t 的总位移 x 就是把瞬时 t 时圖 2a 与圖 2b 两条曲线的縱坐标加在一起而求得。由此就得到曲线如圖 2c 所示。

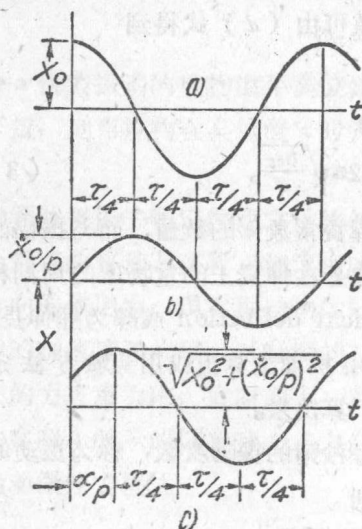


圖 2

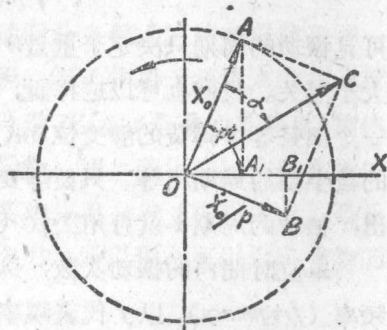


圖 3

另一种方法是用迴轉的矢量来表示振动。試設想一个模为 x_0 的矢量 $\overline{OA}$ 以等角速度 p 繞定点 O 迴轉(圖 3)。这个角速度 p 称为振动的角頻率 (angular frequency)。如果在初瞬时 ($t=0$) 矢量与 x 軸重合，則在任一瞬时 t ，該矢量与 x 軸的夾角就等于 pt 。矢量在 x 軸上的投影 OA_1 等于 $x_0 \cos pt$ ，就代表了式 (5) 的第一項。現在再取一个矢量 $\overline{OB}$ 垂直于矢量 $\overline{OA}$ ，其模为 $\frac{x_0}{p}$ ，它在 x 軸上的投影便是式 (5) 的第二項。这样，振动物体的总位移 x 便等于这两个以角速 p 迴轉着的互相垂直的矢量 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 在 x 軸上的投影的和。

不用 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 两个矢量，而用这两矢量的几何和，亦即矢量 $\overline{OA}$ 与 $\overline{OB}$ 所組成的平行四边形的对綫矢量 $\overline{OC}$ 也是一样， $\overline{OC}$ 在 x 軸上的投影便是重物 W 的总位移。从圖 3 可以看出 矢量 $\overline{OC}$ 的模等于

$$\overline{OC} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0}{p}\right)^2}, \quad (8)$$

它与 x 轴的夾角是

$$pt - \alpha,$$

这个 α 角是

$$\alpha = \arctan \frac{\dot{x}_0}{px_0}. \quad (h)$$

由上面的討論，显然方程式 (5) 也可以用下列的形式来表达

$$x = \overline{OC} \cos(pt - \alpha). \quad (6)$$

式中 $\overline{OC}$ 与 α 如式 (g) 与 (h) 所表示，是取决于运动的起始条件的两个新的常数。这里可以看出，两个簡諧运动，其中一个与 $\cos pt$ 成正比，另一个与 $\sin pt$ 成正比，加在一起的结果仍是一个与 $\cos(pt - \alpha)$ 成正比的簡諧运动，如图 2c 所示。这条曲线最大的縱座标等于图 3 矢量 $\overline{OC}$ 的模。它代表振动物体离其平衡位置的最大位移，称为振幅 (amplitude of vibration)。

由于两个迴轉矢量 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OC}$ 之間有一夾角 α ，圖 2c 曲线的最大縱座标所在点和圖 2a 曲线的最大縱座标所在点相差 α/p 時間。这种情形，可以说圖 2c 所代表的振动落在圖 2a 所代表的振动之后， α 角称为这两种振动的位相差 (phase difference)。

例 題

1. 重物 $W = 30$ 磅鉛直挂在一根長 $l = 50$ 吋，截面积 $A = 0.001$ 吋² 的鋼絲上。鋼的彈性模数 $E = 30 \times 10^6$ 磅/吋²；試求重物自由振动的頻率。設初位移 $x_0 = 0.01$ 吋，初速 $\dot{x}_0 = 1$ 吋/秒，求自由振动的振幅。

〔解〕 鋼絲的靜伸長 $\delta_{st} = 30 \cdot 50 / (30 \times 10^6 \times 0.001) = 0.05$ 吋。按方程式 (4)： $f = 3.13 \sqrt{20} = 14.0$ 秒⁻¹。由方程式 (g) 振幅为 $\sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/p)^2} = \sqrt{(0.01)^2 + [1/(2\pi \times 14)]^2} = 0.01513$ 吋。

2. 重物 W 放在一根長度为 l 的梁上，如图 4 所示。不計梁的質量，試定彈簧常數，以及物体在鉛直方向作自由振动的頻率。

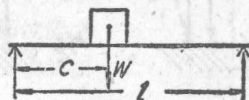


圖 4

〔解〕 梁在重荷下的靜变位等于

$$\delta_{st} = \frac{Wc^2(l-c)^2}{3EI}.$$

式中 c 是荷重与梁左端的距离, EI 是梁在鉛垂面內的抗撓刚度。假定这个鉛垂面包含梁的截面的两个主軸之一, 这样鉛垂荷重便只能产生鉛垂方向的变位。按彈簧常数的定义, 現在的

$$k = \frac{3EI}{c^2(l-c)^2}。$$

將 δ_{st} 代入方程式 (4) 便可求得所要的頻率。关于梁的質量对于振动頻率的影响将在下文中加以討論。

3. 荷重 W 鉛直地挂在兩根彈簧下如圖 5a 所示。這兩根彈簧的彈簧常数分別为 k_1 与 k_2 , 試計算這彈簧組合的彈簧常数及荷重作鉛直振动时的頻率。將重物 W 改懸在兩根相同的平行彈簧上, 如圖 5b 所示, 再求振动的頻率。

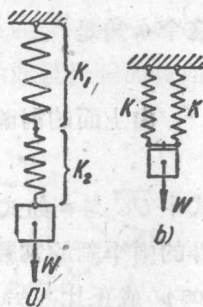


圖 5

[解] 按圖 5a 的情形, 荷重 W 的靜变位是

$$\delta_{st} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} = \frac{W(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}。$$

即彈簧組合的彈簧常数是 $k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ 。將 δ_{st} 代入方程式 (4), 得振动頻率

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g k_1 k_2}{W(k_1 + k_2)}}。$$

按圖 5b 的情形,

$$\delta_{st} = \frac{W}{2k}, \text{ 而 } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2gk}{W}}。$$

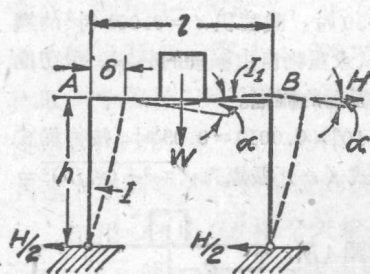


圖 6

4. 圖 6 的間架 (frame) 中間載一荷重 W , 求架子在水平方向的振动周期。在計算中略去內架本身的質量。

[解] 我們首先处理靜力学的問題, 使一个水平力 H 作用在荷重 W 的作用点上, 求架子的水平变位 δ 。不計各杆由于張力及压力所产生的变形, 而仅計算弯曲所生的变形, 則水平杆 AB 受两个相等力偶 $Hh/2$ 的弯曲。节点 A 及

B 的角变位是

$$\alpha = \frac{Hh}{12EI_1}。$$

現在把鉛直的兩杆都作為懸梁 (cantilevers) 來研究, 受水平力 $\frac{H}{2}$ 的作用而生彎曲。這樣水平變位 δ 便由兩部分組成, 一部分是由於懸梁彎曲的結果, 另一部分是由於上面計算過的 A, B 節點的角變位 α 而產生。因此

$$\delta = \frac{Hh^3}{6EI} + \frac{Hh^2l}{12EI_1} = \frac{Hh^3}{6EI} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l}{h} \frac{I}{I_1} \right).$$

彈簧常數便是

$$k = \frac{H}{\delta} = \frac{6EI}{h^3 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l}{h} \frac{I}{I_1} \right)}.$$

代入方程式 (3), 得

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l}{h} \frac{I}{I_1} \right)}{6gEI}}.$$

如果水平杆的剛度比鉛直杆的剛度大很多, 那末 $\frac{I}{I_1}$ 便很小, 可以略去。於是

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{6gEI}},$$

因而頻率是

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6gEI}{Wh^3}}.$$

5. 圖 7 中荷重 W 代表一升降機的吊籠。它以等速 v_0 下降。升降機的鋼繩相當於一根彈簧, 如在下落時鋼繩的上端 A 突然停止, 求鋼繩所受之最大應力。設 $W=10,000$ 磅, $l=60$ 呎, 鋼繩的截面積 $A=2.5$ 方吋, 鋼繩的彈性模數 $E=15 \times 10^6$ 磅/方吋, $v_0=3$ 呎/秒, 鋼繩的質量可以略去不計。

[解] 在等速下降時鋼繩的張力等於 $W=10,000$ 磅當發生意外的一瞬時鋼繩的伸長 $\delta_{st} = W/AE = 0.192$ 吋。由於吊籠具有速度 v_0 , 它不能立時停止, 而將在繩上振動。從意外發生的一瞬時起計算時間, 在該瞬時吊籠離其平衡位置之位移為零而速度為 v_0 。從方程式 (5) 我們可決定振動的振幅等於 v_0/p , 其中 $p = \sqrt{g/\delta_{st}} = 44.8 \text{ 秒}^{-1}$ 而 $v_0 = 36$ 吋/秒。因此鋼繩的最大伸長為 $\delta_d = \delta_{st} + v_0/p = 0.192 + 36/44.8 = 0.192 + 0.803 = 0.995$ 吋, 而繩的最大應力為 $(10,000/2.5)(0.995/0.192) = 20,750$ 磅/方吋。可以看出, 由於上端的突

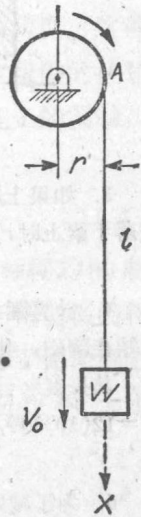


圖 7

然停止，鋼繩的应力几乎增大了五倍。

習 題

1. 圖 1 所示螺旋彈簧的螺圈平均直徑 $D = 1$ 吋，簧絲直徑 $d = 0.1$ 吋，圈數 $n = 20$ 圈。簧絲的剪切彈性模數為 $G = 12(10)^6$ 磅/方吋，懸挂物體重量 $W = 30$ 磅。計算自由振動的周期。

答： $\tau = 0.64$ 秒。

2. 圖 4 所示的梁，具有跨度 $l = 12$ 呎及如圖 8 所示的 T 形截面。梁用鋁制成，鋁的彈性模數 $E = 10(10)^6$ 磅/方吋。荷重 $W = 500$ 磅。如重物 W 放於 $c = 4$ 呎處，並且不計梁本身的質量，求重物在鉛垂方向自由振動的頻率。

答： $f = 6.47$ 次/秒。

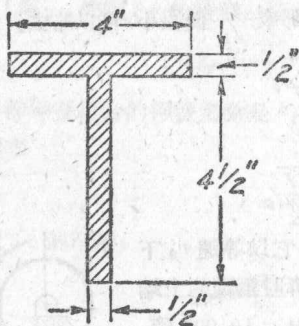


圖 8

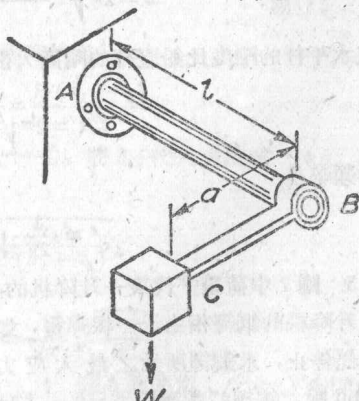


圖 9

3. 如果上題的重物 W 從梁的中央位置高於支座水平綫 $h = 1$ 吋處自由下墜落於梁上時，問所產生的最大動變位 (dynamical deflection) $\delta_{\max}$ 將為若干？

答： $\delta_{\max} = 1.125$ 吋。

4. 計算圖 9 中重物 $W = 10$ 磅的鉛垂振動頻率。實心圓鋼軸 AB 的一端 A 固結在牆內，其長度 $l = 3$ 呎，直徑 $d = 1$ 吋。鋼條 BC 一端與鋼軸固結在 B 處，其長度 $a = 1$ 呎，寬 $b = 1$ 吋，厚 $t = 1/4$ 吋。鋼的 $E = 30(10)^6$ 磅/方吋， $G = 12(10)^6$ 磅/方吋。

答： $f = 5.74$ 次/秒。

5. 為了減低例題 5 中鋼繩的最大由於動力作用的应力，引用一根彈簧常數 $k = 2000$ 磅/吋的彈簧裝置在繩的末端與吊籠之間。再求當繩的上端突然停