高 等 学 校 教 材

弹性力学及有限元法基础教程

A First Course in Elasticity Theory and Finite Element Method

韩清凯 孙 伟 编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

弹性力学及有限元法基础教程

韩清凯　孙　伟　编著

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学及有限元法基础教程 / 韩清凯，孙伟编著．—沈阳：东北大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-81102-692-4

Ⅰ．弹…　Ⅱ．①韩…　②孙…　Ⅲ．①弹性力学—高等学校—教材　②有限元法—高等学校—教材　Ⅳ．O343　O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 105568 号

内容简介

本书介绍了机械结构分析中的弹性力学基本概念和方法，以平面三角形单元、梁单元为例详细叙述了有限单元法的基本原理，对形函数构造方法进行了讨论，对等参元的基本理论进行了说明，对常用的三维实体单元、板单元、壳单元也进行了简要介绍，并对动力有限元、非线性有限元的有关基本理论进行了简要叙述，并给出了若干详细算例。

本书可作为机械类高年级本科生和研究生教材，也可供工程技术人员学习参考。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
网址：http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：12.625
字　　数：331 千字
出版时间：2009 年 6 月第 1 版
印刷时间：2009 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：任彦斌
责任校对：郎　坤
封面设计：唐敏智
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-692-4　　　　定　　价：25.00 元

前　　言

有限单元法(Finite Element Method，FEM)是由力学和计算机技术相结合而逐步发展起来的一种进行工程分析的强有力的数值计算方法，并已经成为数学、物理以及多种工程领域的较通用的重要分析工具，具有灵活、快速、有效等特点。有限单元法在工程上主要涉及机械制造、材料加工、航空航天、土木建筑、电子电器、国防军工、船舶、铁道、汽车和石化能源等领域，商业化有限元软件已经成功应用于固体力学、流体力学、热传导、电磁学、声学和生物力学等领域。在机械工程领域，能够求解由杆、梁、板、壳和块体等各类单元构成的弹性(线性和非线性)、弹塑性或塑性问题(包括静力和动力问题)，求解各类场分布问题(流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题)，求解水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用等问题。

有限元法的实质是最小势能原理的应用，其核心在于使用离散的方式组合表达全几何场上的形函数而不是直接寻找全场上的形函数。也就是，对连续体的求解域(物体)进行单元剖分和分片近似，通过边缘节点相互连接成为一个整体，然后用每一单元内所假设的近似场函数(如位移场或应力场等)来分片表示全求解域内的未知场变量，利用相邻单元公共节点场函数值相同的条件，将原来待求场函数的无穷自由度问题，转化为求解场函数节点值的有限自由度问题，最后采用与原问题等效的变分原理或加权余量法，建立求解场函数节点值的代数方程组或常微分方程组，并采用各种数值方法求解，从而使问题得到解答。

有限单元法具有如下优点：①分析对象的几何形状适应性强。可以处理任意的几何形状和一般的边界条件，还可以处理非均匀的和各向异性的材料，即可以处理由许多不同材料组成的、任意几何形状的对象。②适用范围广。有限单元法的场函数选择灵活，一般能够应用于固体、流体、热传导、电磁学和声学等多种场问题的分析。③有较好的稳定性和收敛性。有限单元法的数学基础是积分形式的变分原理或加权余量法，把数理方程的求解等效成为定积分运算和线性代数方程组或常微分方程组的求解。只要保证数学模型的正确性和方程组求解算法的稳定性和收敛性，并选择收敛的单元形式，其近似解总能收敛于数学模型的精确解。④便于计算机进行处理。有限单元法采用矩阵形式和单元组装方法，每一个步骤都便于实现计算机软件模块化，有利于计算机软件的实现。

有限单元法的基本思想可以追溯到20世纪40年代初。当时就有人尝试使用三角形区域定义分片连续函数并与最小位能原理相结合，以求解扭转问题。到了50年代中期，开始利用这种思想对机械结构进行矩阵分析，其基本思路是将整个结构视为由有限个力学小单元相互连接而形成的集合体，每个单元的力学特性组合在一起以提供整体结构的力学特性。如在20世纪50年代，Boeing公司的Turner，Clough，Martin，Topp等人在分析飞机结构时首先研究了离散杆、梁单元刚度的表达式，这种将复杂结构进行离散化的做法可以认为是用有限元法研究机械问题的真正开端。在1960年，开始用于求解弹性力学的平面应力问题，并开始使用“有限单元法”这一术语。1970年以后，随着计算机技术的发展，有限单元法也随

之迅速地发展起来。当前，大型有限元分析软件已成为现代工程设计不可缺少的工具，并与CAD软件相结合，形成了大规模集成的计算机辅助工程分析(CAE)系统。发展到今天，工程技术人员使用有限元已经变得十分简便。例如，完成一项结构分析的工作主要是如何将复杂的实际问题加以合理简化、建立合理的有限元计算模型，按照有限元软件要求准备好所需数据和信息，计算完毕后再检查计算结果是否合理。当前有限单元法的发展趋势是：①需要建立更多新材料的单元形式，解决工程实际中新材料和新结构复杂分析的需要，特别是复合材料、高分子材料、陶瓷材料、纳米材料、环境材料、智能材料和功能材料等；②研究模拟复杂和极端载荷工况下的结构力学行为、结构非线性特性、多场耦合等问题，及其相应的自适应数值计算方法；③加强与网络化 CAD/CAM/CAE 等大型软件的无缝集成，实现产品从设计、制造、运行直至失效的分析与模拟，以达到全面提高产品综合质量的目标。

在机械工程领域中，有限元法的应用包括以下几个方面：①静力学分析，即求解外部载荷不随时间变化或随时间变化缓慢的机械系统平衡问题；②模态分析，即求解关于系统的某种固有特征值或稳定值的问题；③瞬态动力学分析，即求解所受外部载荷随时间发生变化的动力学响应问题；④非结构力学分析，主要有热传导(温度场)、噪声分析与控制、结构、热、噪声等多维场有限元耦合分析。

对于机械结构而言，有限单元法就是将具有无限多个自由度的结构连续体离散化为有限个自由度的单元集合体，且单元之间仅在节点处相连接。这样，只要确定了单元的力学特性，就可以进行规范化的求解。机械结构分析的有限单元法的基本步骤主要包括以下几个方面。

(1) 结构的离散化

将分析的对象划分为有限个单元体，并在单元上选定一定数量的点作为节点，各单元体之间仅在指定的节点处相连。单元的划分，通常需要考虑分析对象的结构形状和受载情况。

(2) 单元位移模式的选择

根据分块近似的思想，选择一个简单的函数来近似地构造每一单元内的近似解。例如，若以节点位移为基本未知量，为了能用节点位移表示单元体的位移、应变和应力，在分析求解时，必须对单元中位移的分布作出一定的假设，即选择一个简单的函数来近似地表示单元位移分量随坐标变化的分布规律，这种函数称为位移模式。位移模式的选择是有限单元法分析中的关键。由于多项式的数学运算比较简单、易于处理，所以通常是选用多项式作为位移模式。多项式的项数和阶数的选择一般要考虑单元的自由度和解答的收敛性要求等。

(3) 单元刚度分析

通过分析单元的力学特性，建立单元刚度矩阵。首先利用几何方程建立单元应变与节点位移的关系式，然后利用物理方程导出单元应力与节点位移的关系式，最后由虚功原理推出作用于单元上的节点力与节点位移之间的关系式，即单元刚度矩阵。

(4) 等效节点力计算

分析对象经过离散化以后，单元之间仅通过节点进行力的传递，但实际上力是从单元的公共边界上传递的。为此，必须把作用在单元边界上的表面力，以及作用在单元上的体积力、集中力等，根据静力等效的原则全都移置到节点上，移置后的力称为等效节点力。

(5)整体结构平衡方程建立

建立整体结构的平衡方程也叫做结构的整体分析，也就是把所有的单元刚度矩阵集合并形成一个整体刚度矩阵，同时还将作用于各单元的等效节点力向量组集成整体结构的节点载

荷向量。从单元到整体的组集过程主要是依据两点：一是所有相邻的单元在公共节点处的位移相等，二是所有各节点必须满足平衡条件。通常，组集整体刚度矩阵的方法是所谓的直接刚度法，即按节点编号对号入座，将单元刚度矩阵中的刚度系数子阵进行叠加。

(6) 求解未知的节点位移及单元应力

在上述组集整体刚度矩阵时，没有考虑整体结构的平衡条件，所以组集得到的整体刚度矩阵是一个奇异矩阵，尚不能对平衡方程直接进行求解。只有在引入边界约束条件、对所建立的平衡方程加以适当的修改之后，方可根据方程组的具体特点选择恰当的计算方法来求得节点位移，继而求出单元应变和应力。引入边界条件修改平衡方程实质上就是消除整体结构的刚体位移。

在本书中，首先介绍了机械结构力学分析的基本理论——弹性力学——的主要基本概念，包括应力、应变的定义和性质，应力平衡方程、几何方程、物理方程，并对弹性力学问题的基本解法进行了介绍。为了对有限元计算结果进行分析评价，还介绍了结构强度与失效的基本理论。并对与有限元法基本原理有关的能量法也进行了初步介绍。书中以平面问题的机械结构为对象，详细分析了平面三角形单元的基本原理、用平面三角形单元进行结构有限元分析的主要步骤，给出了详细的示例，然后对梁单元分析方法进行了详细介绍。接着对形函数及其性质等进行讨论。本书还介绍了等参元的基本理论，对常用的三维实体单元、板单元、壳单元等进行了简要介绍，并对动力有限元、非线性有限元的有关基本理论进行了简要叙述。一些重要章节，书中均附有详细的算例。

本书由韩清凯教授和孙伟博士编著，姚红良博士也参与了一部分工作。本书作为作者的导师、中国科学院院士闻邦椿教授所倡导的产品综合设计理论与方法的基础性教程之一，在编写过程中得到了他的关心和指导，也得到了东北大学机械工程与自动化学院以及其他单位的大力支持和帮助。此外，本书部分工作也得到了“863 计划”项目专题课题（2007AA04Z418）和国家自然科学基金项目（50775028）的支持。

本书会有许多不妥之处，敬请读者批评指正。

作 者

2009 年 3 月

目　　录

第 1 章　弹性力学基本理论 …… 1
1.1　引　言 …… 1
1.1.1　外力与内力 …… 2
1.1.2　应力的概念 …… 3
1.1.3　应变的概念 …… 5
1.2　应力分析 …… 6
1.2.1　应力坐标变换 …… 6
1.2.2　一点的应力状态——任意截面上的应力 …… 8
1.2.3　主应力 …… 9
1.2.4　平衡微分方程 …… 11
1.2.5　平面应力状态 …… 13
1.2.6　应力边界条件 …… 15
1.3　应变分析 …… 16
1.3.1　几何方程-应变位移关系 …… 16
1.3.2　一点的应变状态及其表达 …… 19
1.3.3　相容性条件 …… 20
1.4　物理方程 …… 22
1.4.1　广义胡克定律 …… 22
1.4.2　用位移表达的平衡微分方程 …… 25
1.4.3　圣维南原理 …… 26
习　　题 …… 27
第 2 章　弹性力学典型问题的讨论 …… 29
2.1　弹性力学的几个典型问题 …… 29
2.1.1　平面问题 …… 29
2.1.2　轴对称问题 …… 31
2.1.3　板壳问题 …… 33
2.2　弹性力学问题的一般求解方法 …… 34
2.2.1　用位移平衡微分方程求解平面问题 …… 35
2.2.2　利用相容性条件按应力求解平面问题 …… 36
2.2.3　Airy 应力函数 …… 37
2.3　机械结构的失效准则与等效应力 …… 39

2.3.1 材料实验的基本知识 …… 39
2.3.2 最大主应力准则 …… 40
2.3.3 最大剪应力准则 …… 40
2.3.4 最大变形能准则 …… 41
2.3.5 正八面体剪应力准则 …… 42
2.3.6 最大剪应力准则与最大变形能准则的对比 …… 42
2.3.7 脆性材料的库仑摩尔圆准则 …… 43
2.4 机械结构弹性力学分析的能量法 …… 45
2.4.1 能量法的基本定义 …… 45
2.4.2 瑞利-里兹法 …… 47
2.4.3 弹性问题中的能量表示——虚位移原理 …… 49
习 题 …… 50

第 3 章 平面问题的有限元法 …… 52

3.1 平面三角形单元刚度矩阵推导 …… 52
3.2 利用平面三角形单元进行整体分析 …… 57
3.3 平面三角形单元应用举例 …… 59
3.3.1 求解弹性力学平面问题的实施步骤 …… 59
3.3.2 边界条件的引入以及整体刚度矩阵的修正 …… 60
3.3.3 计算结果的后处理 …… 62
3.3.4 计算实例 …… 62
习 题 …… 69

第 4 章 杆单元和梁单元 …… 71

4.1 杆件系统的有限元分析方法 …… 71
4.2 平面梁单元 …… 76
4.2.1 平面悬臂梁问题的解析分析 …… 76
4.2.2 平面梁单元的推导 …… 78
4.3 空间梁单元分析 …… 84
4.3.1 空间梁单元的节点坐标 …… 84
4.3.2 空间梁单元的坐标变换 …… 85
4.3.3 空间梁单元的单元特性 …… 87
习 题 …… 88

第 5 章 单元形函数的讨论 …… 90

5.1 形函数构造的一般原理 …… 90
5.1.1 常用单元的形函数 …… 90
5.1.2 形函数的构造规律——帕斯卡三角形 …… 96
5.2 形函数的性质 …… 98
5.3 用面积坐标表达的形函数 …… 99

5.4 有限元的收敛准则 …… 101
5.5 等效节点载荷列阵 …… 102
5.5.1 单元载荷的移置 …… 102
5.5.2 结构整体载荷列阵的形成 …… 102
5.5.3 载荷移置与静力等效关系 …… 103
5.6 根据形函数基本原理进行三维实体分析 …… 105
习　题 …… 110

第 6 章　等参数单元 …… 111

6.1 等参元的基本概念 …… 111
6.2 等参元的单元分析 …… 114
6.3 平面三角形单元的等参元刚度矩阵分析 …… 116
6.4 矩形等参单元的有限元分析 …… 117
6.5 20 节点三维空间等参元的单元刚度矩阵分析 …… 120
*6.6 高斯积分法简介 …… 122
6.7 应用举例 …… 123
习　题 …… 130

第 7 章　板壳问题有限元 …… 132

7.1 薄板弯曲问题的基本方程 …… 132
7.1.1 基本概念和假设 …… 132
7.1.2 薄板弯曲的几何方程 …… 133
7.1.3 薄板弯曲的物理方程 …… 133
7.1.4 薄板弯曲的内力矩平衡方程 …… 134
7.2 四边形薄板单元的分析 …… 135
7.2.1 四边形薄板单元的位移模式 …… 135
7.2.2 四边形薄板单元的单元刚度矩阵 …… 137
7.2.3 用等参元原理描述的四边形薄板单元的单元刚度矩阵 …… 137
7.3 三角形薄板弯曲单元的分析 …… 138
7.4 壳体弯曲的单元分析 …… 140
7.5 应用举例 …… 142
习　题 …… 148

第 8 章　结构动力学分析的有限元法 …… 149

8.1 有限元动力学方程的建立 …… 149
8.1.1 位移、速度和加速度 …… 149
8.1.2 单元动力学方程式的推导 …… 150
8.1.3 质量矩阵和阻尼矩阵 …… 151
8.1.4 结构动力学方程式的建立 …… 152
8.2 机械结构固有特性的有限元分析 …… 153

8.2.1 机械结构的固有频率和固有振型 …… 153
8.2.2 固有频率和固有振型的求解方法 …… 154
8.3 机械结构的动响应分析 …… 156
8.3.1 直接积分法 …… 156
8.3.2 振型叠加法 …… 160
8.4 应用举例 …… 162
8.4.1 固有频率求解 …… 162
8.4.2 动响应求解 …… 164
习 题 …… 166

***第 9 章 非线性有限元 …… 167**

9.1 几何非线性问题的有限元法 …… 167
9.1.1 几何非线性问题的牛顿迭代法 …… 167
9.1.2 典型单元的切线刚度矩阵 …… 169
9.2 材料非线性问题的有限元法 …… 172
9.2.1 弹/黏塑性动力学问题的基本表达式 …… 173
9.2.2 黏塑性应变增量和应力增量 …… 173
9.2.3 弹/黏塑性平衡方程 …… 174
9.3 接触问题的有限元法 …… 174
9.3.1 罚函数法有限元方程的建立 …… 175
9.3.2 有限元方程的求解方法 …… 177
9.4 非线性动力有限元 …… 179
9.4.1 非线性动力学有限元概述 …… 179
9.4.2 材料非线性问题的动力有限元法 …… 180
9.4.3 显式时间积分法 …… 182
9.5 非线性有限元应用举例 …… 182
9.5.1 滑动轴承座装配的接触分析 …… 182
9.5.2 橡胶减振器的非线性刚度分析 …… 186

参考文献 …… 190

第 1 章　弹性力学基本理论

本章主要介绍弹性力学的基本理论，主要包括：线弹性问题的几个基本假设；应力、应变的定义和性质；应力平衡方程、几何方程和物理方程等弹性力学基本方程的推导。这些是进行机械结构有限元分析的重要力学理论基础。要求读者学习并掌握应力、应变基本概念和主要性质，掌握弹性力学基本方程、应力边界条件、协调方程等。

1.1　引　言

弹性力学(Elastic Theory)作为一门基础技术科学，是近代工程领域的必要基础之一。在现代工程结构分析，特别是航空、航天、机械、土建和水利工程等设计中，广泛应用弹性力学的基本公式和结论。

弹性力学与材料力学(Foundamental Strengths of Materials)在研究内容和基本任务方面是基本相同的，研究对象近似，但是二者的研究方法有较大的差别。材料力学的研究对象是杆状构件，即长度远大于宽度和厚度的构件，分析这类构件在拉压、剪切、弯曲、扭转等几类典型外载荷作用下的应力和位移。在材料力学中，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外，为了简化推导，还引用了一些关于构件的形变状态或应力分布的假定(如平面截面的假定、拉应力在净截面上均匀分布的假定，等等)。杆件横截面的变形可以根据平面假设确定，因此综合分析的结果，即问题求解的基本方程，是常微分方程，不存在数学求解困难。而在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，所以其解答要比材料力学里得出的解答精确。当然，弹性力学在研究板壳等一些复杂问题时，也引用了一些有关形变状态或应力分布的假定来简化其数学推导。但是由于弹性力学除研究杆状构件之外，还研究板、壳、块，甚至是三维物体等，因此问题分析只能从微分单元体入手，以分析单元体的平衡、变形和应力应变关系，因此问题综合分析的结果是满足一定边界条件的偏微分方程。也就是说，问题的基本方程是偏微分方程的边值问题。从理论上讲，弹性力学能解决一切弹性体的应力和应变问题。但在工程实际中，一般构件的形状、受力状态、边界条件都比较复杂，所以除少数的典型问题外，对大多数工程实际问题，往往都无法用弹性力学的基本方程直接进行解析求解，有些只能通过数值计算方法来求得其近似解。

弹性力学的研究方法决定了它是一门基础理论课程，把弹性力学的理论直接用于分析工程问题具有很大的困难。原因主要在于它的基本方程——偏微分方程——边值问题求解困难。由于经典的解析方法很难用于工程构件分析，因此探讨近似解法是弹性力学发展中的一个特色。近似求解方法，如差分法和变分法等，特别是随着计算机的广泛应用而不断发展的有限单元法，为弹性力学的发展和解决工程实际问题开辟了广阔的前景。

作为固体力学(Solid Mechanics)学科的一个分支，弹性力学的基本任务是针对各种具体情况，确定弹性体内应力与应变的分布规律。也就是说，当已知弹性体的形状、物理性质、受力情况和边界条件时，确定其任一点的应力、应变状态和位移。弹性力学的研究对象是理

想弹性体，其应力与应变之间的关系为线性关系，即符合胡克定律。所谓理想弹性体，是指符合下述假设的物体。

① 连续性假定。也就是假定整个物体的体积都被组成该物体的介质所填满，不存在任何空隙。尽管一切物体都是由微小粒子组成的，并不能符合这一假定，但是只要粒子的尺寸以及相邻粒子之间的距离都比物体的尺寸小很多，则对于物体的连续性假定，就不会引起显著的误差。有了这一假定，物体内的一些物理量(如应力、应变、位移等)才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

② 完全弹性假定。这是假定物体服从胡克定律，即应变与引起该应变的应力成正比。反映这一比例关系的常数，就是所谓的弹性常数。弹性常数不随应力或应变的大小和符号而变。由材料力学已知：脆性材料的物体，在应力未超过比例极限前，可以认为是近似的完全弹性体；而韧性材料的物体，在应力未达到屈服极限前，也可以认为是近似的完全弹性体。这个假定，使得物体在任意瞬时的应变将完全取决于该瞬时物体所受到的外力或温度变化等因素，而与加载的历史和加载顺序无关。

③ 均匀性假定。也就是假定整个物体是由同一材料组成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，因而物体的弹性常数才不会随位置坐标而变，可以取出该物体的任意一小部分来加以分析，然后把分析所得的结果应用于整个物体。如果物体是由多种材料组成的，但是只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内是均匀分布的，那么整个物体也就可以假定为均匀的。

④ 各向同性假定。这是假定物体的弹性在所有各方向上都是相同的。也就是说，物体的弹性常数不随方向而变化。对于非晶体材料，是完全符合这一假定的。而由木材、竹材等做成的构件，就不能当做各向同性体来研究。至于钢材构件，虽然其内部含有各向异性的晶体，但由于晶体非常微小，并且是随机排列的，所以从统计平均意义上讲，钢材构件的弹性基本上是各向同性的。

⑤ 小位移和小变形的假定。在弹性力学中，所研究的问题主要是理想弹性体的线性问题。为了保证研究的问题限定在线性范围，还需要作出小位移和小变形的假定。这就是说，要假定物体受力以后，物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，并且其应变和转角都小于 1。所以，在建立变形体的平衡方程时，可以用物体变形前的尺寸来代替变形后的尺寸，而不致引起显著的误差，并且，在考察物体的变形及位移时，对于转角和应变的二次幂或其乘积都可以略去不计。对于工程实际中的问题，如果不能满足这一假定的要求，一般需要采用其他理论来进行分析求解(如大变形理论等)。

上述假定都是为了研究问题的方便，根据研究对象的性质、结合求解问题的范围而作出的。这样可以略去一些暂不考虑的因素，使得问题的求解成为可能。

弹性力学问题的求解方法按求解方式可以分为两类：解析方法和数值算法。解析方法是通过弹性力学的基本方程和边界条件、用纯数学的方法进行求解。但是，在实际问题中能够用解析方法进行精确求解的弹性力学问题只是很少一部分。现在工程实际中广泛采用的是数值的方法，如有限单元法，可借助强大的有限元软件进行较精确的求解。

以下介绍弹性力学中的几个基本概念。

1.1.1 外力与内力

(1) 外力(Load)

作用于物体的外力通常可分为两类，即面力(Surface Force)和体力(Body Force)。面力是指分布在物体表面上的外力，包括分布力(Distributed Force)和集中力(Concentrated Force)，如压力容器所受到的内压、水坝所受的静水压力、物体和物体之间的接触压力，等等。通常情况下，面力是物体表面各点的位置坐标的函数。

在物体表面 P 点处取一微小面积 ΔS，假设其上作用有表面力 $\Delta \boldsymbol{F}$，则 P 点所受的表面力定义为

$$\boldsymbol{Q}_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S} \tag{1.1}$$

通常用各坐标方向上的分量来表示面力，即

$$\boldsymbol{Q}_S = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

体力(Body Force)一般是指分布在物体体积内的外力，作用于弹性体内每一个体积单元。通常与物体的质量成正比且是各质点位置的函数，如重力、惯性力、磁场力等。作用在物体内 P 点上的体力，可按面力定义方式进行定义，即在 P 点处取一微小体积 ΔV，假定其上作用有体力 $\Delta \boldsymbol{R}$，则 P 点所受的体力可定义为

$$\boldsymbol{Q}_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta V} \tag{1.3}$$

一般也是用各坐标方向上的分量来表示体力，即

$$\boldsymbol{Q}_V = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \{X, Y, Z\}^{\mathrm{T}} \tag{1.4}$$

(2) 内力(Internal force)

物体在外力作用下，其内部将产生抵抗变形的“附加”内力。若假想用一经过物体内 P 点的截面 mn 将物体分为两部分 A 和 B，移去其中的一部分 B。当一个物体在外力作用下处于平衡状态时，物体各部分都应保持平衡。显然，在截面 mn 上必定有某种力存在使 A 平衡，这种力就称为内力，实际上也就是物体内部的相互作用力。如图 1-1 所示，在截面 mn 上应该有移去的虚线部分 B 对部分 A 的平衡起作用的内力。

1.1.2 应力的概念

所谓一点处某个截面上的应力(Stress)就是指该截面上的“附加内力”，即应力是内力在该点处的集度。如图 1-1 所示，在截面 mn 上 P 点处取一微小面积 ΔA，假设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta \boldsymbol{G}$，则

$$\boldsymbol{T} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{G}}{\Delta A} \tag{1.5}$$

$\boldsymbol{T}$ 就是 P 点处的应力。

对于应力 $\boldsymbol{T}$，除了一些公式的推导外，一般很少直接用它的矢量形式描述，这是因为应力分析需要与物体的变形及材料的强度联系起来。通常将应力沿截面 ΔA 的法向和切向进行分解，相应的分量就是常用的正应力 σ_n 和剪应力 τ_n。它们满足

$$|\boldsymbol{T}_n|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \tag{1.6}$$

在物体内的同一点处，不同方向截面上的应力(正应力 σ 和剪应力 τ)是不同的。只有同时给出过该点截面的外法向方向，才能确定物体内该点处此截面上应力的大小和方向，才能表示这一点的应力状态。

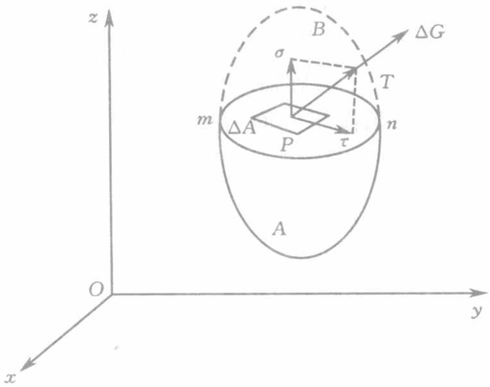


图 1-1　物体内任意点处的应力

在弹性力学中，为了描述弹性体内任一点 P 的应力状态，可能从弹性体的连续性假定出发，整个弹性体可以看做由无数个微小正方体元素组成。在该点处切取一微小正方体，正方体的棱线与坐标轴平行，如图 1-2 所示。正方体各面上的应力可按坐标轴方向分解为一个正应力和两个剪应力，即每个面上的应力都用三个应力分量来表示。由于物体内各点的内力都是平衡的，作用在正方体相对两面上的应力分量大小相等、方向相反。这样，用 9 个应力分量写成矩阵的形式来表示正方体各面上的应力，即

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\tag{1.7}$$

其中，σ 是正应力(Normal stress)，下标表示作用面和作用方向；τ 是剪应力(Shear stress)，第一下标表示与截面外法线方向相一致的坐标轴，第二下标表示剪应力的方向。

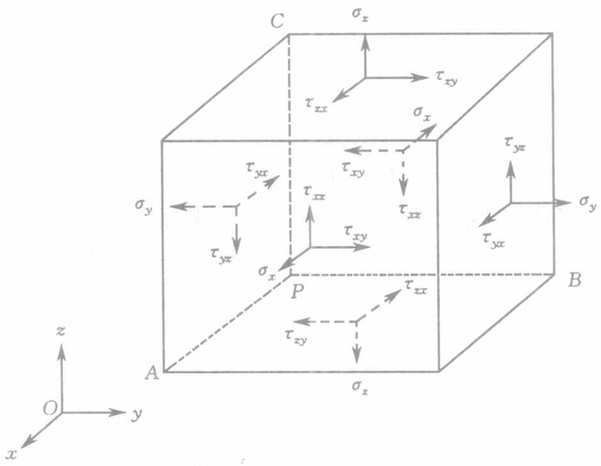


图 1-2　微小正方体元素的应力状态

应力分量的符号规定：若应力作用面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，则该面上的应力分量就以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。相反，如果应力作用面的外法线是指向坐标轴的负方向，那么该面上的应力分量就以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。

根据材料力学的基本概念(下一节中也将进一步证明)，从图 1-2 中微小正方体的平衡条件(力矩平衡方程)出发，作用在正方体各面上的剪应力存在着互等关系：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的，不仅大小相等，而且正负号也相同，即

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\ \tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{yz}=\tau_{zy} \tag{1.8}$$

这就是所谓的剪应力互等定理。

因此，剪应力的两个下标是可以任意对换的。这样，只要用 σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx} 6 个应力分量就可以完全描述作用在微小正方体各面上的应力。当正方体足够小时，作用在正方体各面上的应力分量就可视为 P 点的应力分量。此外，只要已知 P 点的这六个应力分量，就可以求得过 P 点任何截面上的正应力和剪应力(1.2.2 节中将给出具体的表达式)，因此，上述 6 个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

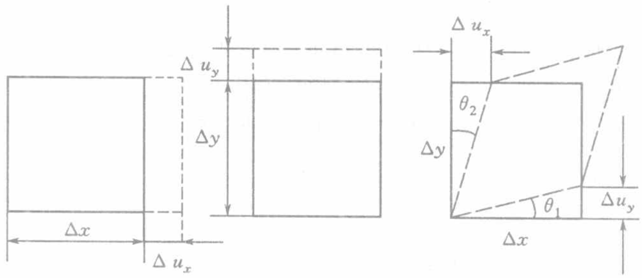
1.1.3　应变的概念

物体在外力作用下，其形状要发生改变，变形(Deformation)指的就是这种物体形状的变化。这种形状的改变不管多么复杂，对于其中的某一个微元体来说，只包括棱边长度的改变和各棱边之间夹角的改变两种类型。因此，为了考察物体内某一点处的应变(Strain)，可在该点处从物体内截取一单元体，研究其棱边长度和各棱边夹角之间的变化情况。

对于微分单元体的变形，将分为两部分讨论：ⓐ棱边长度的伸长量，即正应变(或线应变，Linear Strain)；ⓑ两棱边间夹角的改变量(用弧度表示)，即剪应变(或角应变，Shear Strain)。图 1-3 是对这两种应变的几何描述，表示变形前后的微元体在 x，y 面上的投影。在每个图例中，单元体的初始位置和变形后的位置分别由实线和虚线表示。物体变形时，物体内一点处产生的应变，与该点的相对位移有关。在小应变情况下(位移导数远小于 1 的情况)，位移分量与应变分量之间的关系(变形几何方程)如下。

在图 1-3(a)中，单元体在 x 方向上有一个 Δu_x 的伸长量。微分单元体棱边的相对变化量就是 x 方向上的正应变 ε_x。则

$$\varepsilon_x=\frac{\Delta u_x}{\Delta x} \tag{1.9}$$



(a) x 方向的线应变　(b) y 方向的线应变　(c) xy 面内的剪应变

图 1-3　单元体应变的几何描述

相应地，如图 1-3(b)所示 y 轴方向的正应变为

$$\varepsilon_y=\frac{\Delta u_y}{\Delta y} \tag{1.10}$$

图 1-3(c)所示为 $x-y$ 平面内的剪应变 γ_{xy}。剪应变定义为微单元体棱边之间夹角的变化。图中总的角变化量为 $\theta_1+\theta_2$。假设 θ_1 和 θ_2 都非常小，可以认为 $\theta_1+\theta_2\approx\tan\theta_1+\tan\theta_2$。根据图 1-3(c)

$$\tan\theta_1 = \frac{\Delta u_y}{\Delta x};\quad \tan\theta_2 = \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \tag{1.11}$$

因此，剪应变 γ_{xy} 为

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\Delta u_y}{\Delta x} + \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \tag{1.12}$$

由于正向剪应力 τ_{xy} 和 τ_{yx} 分别引起微单元棱边夹角的减小，所以，在弹性力学中，把相对初始角度的减小量视为正向剪应变。

以此类推，ε_x，ε_y，ε_z 分别代表了一点 x，y，z 轴方向的线应变，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{xz} 则分别代表了 xy，yz 和 xz 面上的剪应变。与直角应力分量类似，上边的六个应变分量称为直角应变分量。这六个应变分量用矩阵形式表示，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

线应变 ε 和剪应变 γ 都是无量纲的量。

除了上面介绍的两种应变，另外还有一种应变——体积应变(Volume Starin)。体积应变是指微分单元体积的相对变化，见 1.3.2 节。

1.2　应力分析

应力是弹性力学理论中的一个重要概念。应力分析主要包括：通过应力变换研究一点的应力状态，确定主应力；推导柯西应力公式(Cauchy's stress formula)，并利用该公式确定应力边界条件；建立弹性体应力分量与体积力分量之间的关系式，即应力平衡微分方程。

1.2.1　应力坐标变换

用一个斜面切过实体，并与三个互相垂直的坐标面相交，就会隔离出关于一点的四面体单元。设 x' 轴为斜面的外法线，y' 和 z' 与该斜平面相切，x'，y' 和 z' 构成新的直角坐标系。斜面的外法线方向角定义为 $\theta_{x'x}$，$\theta_{x'y}$ 和 $\theta_{x'z}$，即 x' 轴分别与 x，y，z 轴的夹角。如图 1-4，这些夹角的余弦值定义为 x' 轴的方向余弦。分别为：

$$n_{x'x} = \cos\theta_{x'x},\quad n_{x'y} = \cos\theta_{x'y},\quad n_{x'z} = \cos\theta_{x'z} \tag{1.14}$$

三个方向余弦并不是独立的，它们满足如下关系：

$$n_{x'x}^2 + n_{x'y}^2 + n_{x'z}^2 = 1 \tag{1.15}$$

相应地，对 y'，z' 轴与 x，y，z 轴的夹角求余弦，得到 y'，z' 轴的方向余弦分别为 $n_{y'x}$，$n_{y'y}$，$n_{y'z}$ 和 $n_{z'x}$，$n_{z'y}$，$n_{z'z}$。因此新坐标系 x'，y'，z' 轴的方向余弦写成如下矩阵形式

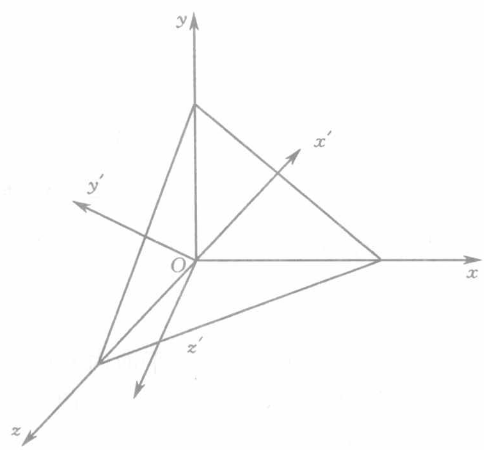


图 1-4　坐标系及其旋转变换

$$
\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} n_{x'x} & n_{x'y} & n_{x'z} \\ n_{y'x} & n_{y'y} & n_{y'z} \\ n_{z'x} & n_{z'y} & n_{z'z} \end{bmatrix} \tag{1.16}
$$

$\boldsymbol{T}$ 即为应力变换矩阵。

根据静力学平衡条件可知

$$
\boldsymbol{\sigma}_{x'y'z'} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\sigma}_{xyz}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{1.17}
$$

其中，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的转置矩阵。$\boldsymbol{\sigma}_{x'y'z'}$，$\boldsymbol{\sigma}_{xyz}$分别为新坐标系和原坐标系下的一点的应力矩阵，即

$$
\boldsymbol{\sigma}_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \tag{1.18}
$$

【例 1-1】　某一点在 xyz 坐标系内的应力状态已知，其应力矩阵如下

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{MPa}
$$

如该坐标系先绕 z 轴旋转 45°,然后再绕新的 x 轴旋转 30°,试确定该点在新的坐标系下的应力矩阵。

解:对于每一次旋转,都可以通过一系列的坐标变换得到弹性体表面的法线向量,并可将该法向向量分别投影到 x, y, z 轴,得到三个方向上的向量分量。其中第一次旋转得到的向量分量为

$$
\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{a}
$$

第二次旋转确定了 $x'y'z'$坐标，它们与 $x_1y_1z_1$ 坐标的关系如下

$$
\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \tag{b}
$$

将式(a)代入式(b)，可得

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{c}
$$

将 $\theta=45°$和 $\phi=30°$代入，得到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，为