高等学校教材

概率论及数理统计

第4版　下册

中山大学　邓集贤　杨维权　司徒荣　邓永录　编著

高等教育出版社

高等学校教材

概率论及数理统计

下册

第4版

中山大学

邓集贤　杨维权　司徒荣　邓永录　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论及数理统计．下册/邓集贤等编著．—4版．
—北京:高等教育出版社,2009.7
ISBN 978-7-04-026630-6

Ⅰ.概…　Ⅱ.邓…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材
②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第087920号

策划编辑　李　蕊　**责任编辑**　崔梅萍　**封面设计**　刘晓翔
责任绘图　吴文信　**版式设计**　王　莹　**责任校对**　殷　然
责任印制　朱学忠

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
总　　机　010-58581000

经　　销　蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷　河北新华印刷一厂

开　　本　850×1168　1/32
印　　张　12.375
字　　数　310 000

购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育　http://www.widedu.com

版　　次　1980年3月第1版
2009年7月第4版
印　　次　2009年7月第1次印刷
定　　价　17.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　26630-00

内容简介

本书是在中山大学统计科学系梁之舜等五人编著的《概率论及数理统计》(第三版)的基础上修订而成的，具有适应面广、便于自学的特点。本次修订删除了第五章的内容，其他各章保留原有的特点、结构和基本内容，进行了适当的修改和补充，习题也作了更新修订，使本书更适应当前的教学。全书共十二章，仍分上、下两册出版。

本书可作为综合性大学、师范院校及其他院校的数学类专业教材，也可作为其他有关专业的教材或教学参考书。

第四版说明

本书《概率论及数理统计》(上、下册)作为全国高等院校中概率统计课程的通用教材,高等教育出版社于1980年出版(1988年第二版,2005年第三版)。根据当前高等院校教学的具体情况和需要,我们对本书重新修订,作为第四版继续出版发行。本书编者讨论了第四版修订的基本原则,确定本书原有的内容、结构与特点基本保持不变,对某些章节(内容与习题)作了适当的调整、修改与补充。

概率论及数理统计是研究随机现象统计规律性及其应用的一门数学学科,它像所有其他数学学科一样有基本概念和逻辑推理的严谨性,更有应用的广泛性。我们在编写中既重视各种概念、定义、定理、公式的严谨叙述和推理,也注重对理论的直观背景的解析和实际应用的示例。

学习本书只要求微积分与高等代数的基础知识,对于偏难的有关内容,采用星号"*"或指出参考书目。本书(上、下册)共设十二章,第一章至第九章可作为概率统计课程的基本内容。不同专业可按其教学计划的要求,从本书(上、下册)中选讲有关章节内容。

本书第一、四、五、十一各章由邓集贤编写;第二、三各章由司徒荣编写;第六、七、八、九、十各章由杨维权编写;第十二章由邓永录编写。编者非常感谢多年来采用本书的广大读者的厚爱和对本书作过指导与帮助的专家学者,衷心感谢高等教育出版社的大力支持和李蕊同志的具体帮助。本书(上、下册)再版后,可能还会有许多不妥之处,恳请读者及专家批评指正。

编　者

2009年2月于广州中山大学

目　录

第六章 数理统计的基本概念

前述各章，是概率论的引论，讲述了概率论的基本内容，为数理统计学建立了重要的数学基础. 从本章起的接连五章，是数理统计学的初步，主要讲述基本概念、估计与检验等原理、回归分析与方差分析、贝叶斯统计等统计方法.

数理统计学是运用概率论的基本知识，对要研究的随机现象进行多次观察或试验，研究如何合理地获得数据资料，建立有效的数学方法，根据所获得的数据资料，对所关心的问题作出估计与检验. 数理统计学的重要分支有统计推断、多元统计分析、试验设计等，其具体方法甚多，应用相当广泛，已成为各学科从事科学研究及生产、经济等部门进行有效工作的必不可少的数学工具.

在这一章中，我们从数理统计学的基本概念讲起，讨论抽样分布及其重要的定理. 这些抽样分布及其几个重要的定理，在前述各章中尚未提到，而在后述各章中却经常要用到它们.

§6.1 基本概念

一、总体、个体、简单随机样本

总体、个体、样本是数理统计学中三个最基本的术语. 我们把对某一个问题的研究对象的全体称为总体（或母体），组成总体的每个基本成员称为个体，从总体中随机抽取的 n 个个体称为容量为 n 的样本（或子样）. 例如，把某月的整批产品视为一总体，则每个产品为个体；又如把某批灯泡视为一总体，则每个灯泡为个体；某地在某季度内每天的日平均气温的全体视为一总体，则其中某天的日平均气温为个体. 在数理统计学中，我们是对总体成员的一个或者若干个数量表征进行研究. 如日平均气温的摄氏度数用 ξ

表示,灯泡的使用寿命(小时)用 η 表示,ξ 及 η 都为随机变量,这样对总体的研究就归结为讨论随机变量 ξ 或 η 的分布函数及其主要数字特征(如数学期望 $E(\xi)$、方差 $D(\xi)$ 等)的研究. 又如某月的整批产品为一总体,若只要检查产品的质量,可用数量表征 ζ 来反映. 产品为一等品,令 ζ 取值为 1;二等品,ζ 取值为 2;不合格品,ζ 取值为 3. 我们研究这批产品的质量规律,就归结为讨论随机变量 ζ 的分布函数及其主要数字特征来反映.

今后我们常用"总体 ξ 服从什么分布"这样的术语,它是指总体的某个具体数量表征 ξ 服从什么分布规律. 我们说对总体进行 n 次独立的重复试验或 n 次独立的观察,就是从总体中随机地抽取容量为 n 的样本,对应的数量表征以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 表示,总体 ξ 及 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 都是随机变量,$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是 n 维随机向量. 例如我们说整批灯泡的寿命分布如何?是指灯泡的寿命 ξ 服从什么分布. 从整批灯泡中随机抽取容量为 n 的样本,是指随机抽取 n 个灯泡,观察这 n 个灯泡的寿命,用 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 表示,其中 ξ_i 表示随机抽取到的第 i 个灯泡的寿命,显然 ξ_i 也是一随机变量($i=1,2,\cdots,n$). 为区别总体与样本的概念,我们今后常用诸如"总体 ξ 服从什么分布"、"从总体 ξ 中抽取样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$"等这类术语.

我们在对总体进行研究中,当总体相当大时(指个体相当多时)或当对个体进行试验具有破坏性(如炮弹能否引发爆炸)或费时耗资大时,只可能从总体中抽取部分个体来作研究,即抽取容量为 n 的样本来作研究. 我们要从样本的观察或试验结果的特性来对总体的特性作出估计与推断,一方面自然要研究应该怎样从总体中抽取样本,使得样本在尽可能大的程度上反映总体的特性;同时必须建立一整套的方法,使能根据所选取的样本的性质,来对总体的特性进行估计与推断. 因此,我们在抽取样本来对总体作出估计与推断时,从总体中抽取样本必须是随机的,即每一个个体都有同等概率被抽取(当总体中的个体数目较少时,要用有返回抽取方式). 其具体要求为两个方面:独立性,是指 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独

立;代表性,是指 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中每一个都与总体 ξ 有相同分布.

定义 6.1.1(简单随机样本) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为来自总体 ξ 的容量为 n 的样本,如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且每一个都是与总体 ξ 有相同分布的随机变量,则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为总体 ξ 的容量为 n 的简单随机样本,简称为简单样本或样本.

在这一章中,我们所讲的样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,无特别声明的话,都是指简单样本,即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且每一个都与总体 ξ 有相同的分布. 引入简单随机样本,是基于要从样本所获得的概率统计特性来对总体的概率统计特性作出估计与推断. 对于简单随机样本,我们可以应用概率论中对独立随机变量的情形所建立的许多重要的定理,这些重要的结论为数理统计学提供了必要的基础.

二、统计量

样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 也可用 n 维随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$表示. 记 x_i 为 ξ_i 的一次观察值,并称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的一次观察值.

定义 6.1.2(统计量) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本,T 为 n 维实值函数,作样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的函数 $T=T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$(不带未知参数的随机变量),$T$ 的取值记为 $t=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称 T 或 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为统计量.

我们在用样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 获得的信息来对总体 ξ 作出估计与推断时,是按不同的统计问题的要求而规定样本的各种函数. 在这本教材中,所涉及的样本的各种函数 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$都是随机变量.

例 6.1.1 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本,其容量为 n. 记

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\qquad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2,$$

则 $\bar{\xi}$ 及 S^2 都是统计量,称 $\bar{\xi}$ 及 S^2 分别为样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的平均值

及方差. 样本的观察值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，$\bar{\xi}$及 S^2 的观察值分别记作

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\qquad s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

今后，大写的 S^2 表示统计量，小写的 s^2 表示统计量 S^2 的观察值.

定义 6.1.3(顺序统计量)　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本，今由样本建立 n 个函数：

$$\xi_k^*=\xi_k^*(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\qquad k=1,2,\cdots,n,$$

其中 ξ_k^* 为这样的统计量，它的观察值为 x_k^*，x_k^* 为样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中由小至大排列(即 $x_1^*\leqslant\cdots\leqslant x_k^*\leqslant\cdots\leqslant x_n^*$)后的第 k 位数值，则称 $\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*$ 为顺序统计量.

易见，$\xi_1^*=\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，$\xi_n^*=\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$. 称 ξ_1^* 为最小项统计量，ξ_n^* 为最大项统计量. 若 n 为奇数，则称 $\xi_{\frac{n+1}{2}}^*$ 为样本的中值；若 n 为偶数，则称 $\xi_{\frac{n}{2}+1}^*$ 为样本的中值.

定义 6.1.4(极差)　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本，则称统计量 $D_n^*=\xi_n^*-\xi_1^*$ 为样本的极差.

极差是样本中最大值与最小值之差，反映了样本观察值的波动幅度. 它同方差一样是反映观察值离散程度的数量指标，而且计算方便.

例 6.1.2　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_5$ 为总体 ξ 的容量为 5 的样本，今对这个样本作了三次观察，其值如表 6.1.1 所示，试求$\bar{\xi}$、S^2 及 D_n^* 的观察值.

表 6.1.1

x \ ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
1	3	1	10	5	6
2	2	6	7	2	8
3	8	3	9	10	5

解　计算结果列于表6.1.2.

表 6.1.2

ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*	ξ_4^*	ξ_5^*	$\bar{x}$	s^2	D_n^*
1	3	5	6	10	5	9.2	9
2	2	6	7	8	5	6.4	6
3	5	8	9	10	7	6.8	7

三、小样问题与大样问题

统计量是我们对总体 ξ 的分布函数或数字特征进行估计与推断最重要的基本概念,求出统计量 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数是数理统计学的基本问题之一. 统计量的分布,称为抽样分布.

设总体 ξ 的分布函数表达式已知,对于任一正整数 n,如能求出给定统计量 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数,这分布称为统计量 T 的精确分布. 求出统计量 T 的精确分布,这对于数理统计学中的所谓小样问题(即在样本容量 n 比较小的情况下所讨论的各种统计问题)的研究是很重要的.

但一般说来,要确定一个统计量的精确分布其难度比较大. 只对一些重要的特殊情形,如总体 ξ 服从正态分布时,已求出 t 统计量 χ^2 统计量、F 统计量等的精确分布. 它们在参数的估计及检验中起很重要的作用.

若统计量 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的精确分布求不出来,或其表达式非常复杂而难以应用,但如能求出它在 $n\to\infty$ 时的极限分布,那么这个统计量的极限分布对于数理统计学中的所谓大样问题(即在样本容量 n 比较大的情况下讨论的各种统计问题)的研究很有用. 但要注意,在应用极限分布时,要求样本的容量 n 比较大. 如第八章的§8.3所讨论的非参数性假设检验问题,是用检验统计量的极限分布,因而样本容量 n 应取得比较大才行.

§6.2 样本的数字特征及其分布

*一、经验分布与格列汶科定理

在实际工作中遇到各种各样的随机变量，怎样确定它的分布函数 $F(x)$？在概率论中，我们介绍了常用的几种分布函数以及它们的一些性质，在那里我们假定它们都是事先给定了的. 现在，我们介绍用独立重复试验的方法，利用样本建立一定的概率模型，用由此所获得的概率统计特性来对总体 ξ 的分布函数 $F(x)$ 等作出统计推断.

定义 6.2.1（经验分布函数） 从总体 ξ 中抽取容量为 n 的样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，当顺序统计量 $\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*$ 的值给定时，对任何实数 x，我们定义函数 $F_n^*(x)$：

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_1^*;\\ \dfrac{k}{n}, & x_k^*<x\leqslant x_{k+1}^*, k=1,2,\cdots,n-1;\\ 1, & x>x_n^*.\end{cases} \tag{6.2.1}$$

称 $F_n^*(x)$ 为总体 ξ 的经验分布函数[①]

易见，对于每一组观察值 $\xi_i^*=x_i^*$，$i=1,2,\cdots,n$，$F_n^*(x)$ 单调、非降、左连续且在 $x=x_k^*$ 点有间断点，在每个间断点上跳跃量都是 $\dfrac{1}{n}$（如图 6.2.1）. 显然，$0\leqslant F_n^*(x)\leqslant 1$，并具有分布函数的其他性质.

由定义 6.2.1 知，对于 x 的每一数值而言，经验分布函数

---

① 对于每一 ω，即样本的一次观察值，由(6.2.1)定义的 $F_n^*(x)$ 是实数 x 的函数，$x\in\mathbf{R}_1$. 而对于每一 x 值，$F_n^*(x)$ 依赖于样本的观察值，即为 ω 的函数，因而 $F_n^*(x)$ 为一统计量. 这里，如果 $x_k<x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots$，而 $x_k<x=x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots$，则应在(6.2.1)中把 $\dfrac{k}{n}$ 改为 $\dfrac{N_k(x)}{n}$，其中 $N_k(x)$ 是样本中小于 x_{k+1} 的观察值的个数.

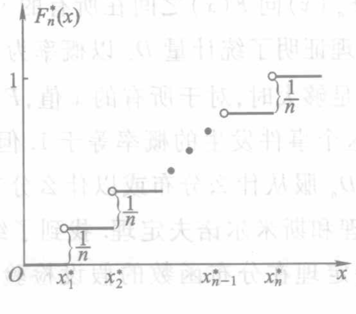

图 6.2.1

$F_n^*(x)$为样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的函数，它是一统计量，即为一随机变量，其可能取值为 $0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$. 事件"$F_n^*(x)=\frac{k}{n}$"发生的概率，由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$，因而它等价于 n 次独立重复试验的伯努利概型中事件"$\xi<x$"发生 k 次而其余 $n-k$ 次不发生的概率，即有：

$$P\left\{F_n^k(x)=\frac{k}{n}\right\}=\mathrm{C}_n^k\{F(x)\}^k\{1-F(x)\}^{n-k}, \qquad (6.2.2)$$

其中 $F(x)=P\{\xi<x\}$，它是总体 ξ 的分布函数.

我们从第五章所讲的大数定律知道，在一定的条件下，事件发生的频率依概率收敛于这个事件发生的概率. 人们自然要问，总体 ξ 的经验分布函数 $F_n^*(x)$，即"$\xi<x$"事件发生的频率，当 n 足够大时，是否也渐近于事件"$\xi<x$"发生的概率，即总体 ξ 的分布函数 $F(x)$ 呢？格列汶科于 1933 年作了肯定的回答.

格列汶科定理 设总体 ξ 的分布函数为 $F(x)$，经验分布函数为 $F_n^*(x)$，对于任何实数 x，记

$$D_n=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_n^*(x)-F(x)\right|, \qquad (6.2.3)$$

则有

$$P\{\lim_{n\to\infty}D_n=0\}=1. \qquad (6.2.4)$$

我们知道 $F_n^*(x)$为一统计量，因而 D_n 也为一统计量. D_n 这个