21世纪高职高专数学规划教材

高等数学

（经管类）

Advanced Mathematics

东北大学出版社
Northeastern University Press

21 世纪高职高专数学规划教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

（经 管 类）

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学(经管类) / 吴丽华，刘春英，王玉华主编．— 沈阳：东北大学出版社，2009.7
(21 世纪高职高专数学规划教材)
ISBN 978-7-81102-717-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①吴… ②刘… ③王…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 129183 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：15.75
字　　数：414 千字
出版时间：2009 年 7 月第 1 版
印刷时间：2009 年 7 月第 1 次印刷
责任编辑：刘　莹　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：郎　坤
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-717-4　　　　定　　价：25.00 元

前　　言

近年来随着高职高专教学改革的不断深入，对数学课程的基本要求有了很大变化，并提出了一些新的要求．如何实现高职高专学生的专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应；怎样才能在数学课程学时不断减少的情况下，为学生们打好数学基础，这些都给数学教学工作者提出了新的课题．正是在这样的背景下，我们结合教学改革的实际要求和多年积累的一些成功经验，精心编写出这套《21世纪高职高专数学规划教材》，本书为其中的经管类《高等数学》．

本书是根据教育部“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”而编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，并充分考虑了相当多的学校高等数学课程学时减少这一实际情况。为此，确立编写本书的指导思想为：联系实际，深化概念，侧重计划，注重应用．本书具备如下特色：

1．重视基本概念

在引入基本概念的时候，我们注意从实际问题出发，尽量借助于几何直观图形和物理意义来解释数学概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，同时注意基本理论的完整性和系统性．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的思想方法，提高学生的逻辑思维能力．

2．结合实际，注重实用

例题、习题中注重工程上或经济方面实际问题的选取，意在培养学生解决实际问题的意识和能力，最终实现培养应用性人才的高职高专教育目标．

3．侧重运算、解题能力

在解题方法方面有较深入的论述，其用意在于让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

全书共十章，依次为第一章函数与极限、第二章导数与微分、第三章中值定理与导数的应用、第四章不定积分、第五章定积分及其应用、第六章常微分方程、第七章空间解析几何与向量代数、第八章多元函数微分学、第九章多元函数积分学、第十章无穷级数．各章节后均配有习题，书后附有全部习题的参考答案．标有 * 的内容是数学大纲不要求的内容．

由于水平所限，加之时间仓促，书中存在疏漏、不足之处在所难免，敬请广大师生不吝赐教，将不胜感谢．

编　者

2009年6月

《高等数学（经管类）》编写人员

主　　　编：吴丽华　刘春英　王玉华

副　主　编：王　骄　沙　萍　滕　勇

其他编写人员：王学理　王小强

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学所研究的对象是以常量为主，而高等数学研究的对象是以变量为主．变量之间的依赖关系称为函数．极限方法是研究变量的一种基本方法．本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本内容．

第一节　函数与极坐标

一、区间和邻域

高等数学研究的函数都是实变量函数，即函数中涉及的变量都取实数，若将某一变量所取到的所有实数构成集合 A，则 A 是一个由实数组成的数集．一个特殊的数集就是区间．

设实数 a 和 b，且 $a<b$，数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记做 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记做 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

类似地，

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$
$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

称为半开半闭区间．

以上区间都称为有限区间，区间长度为 $b-a$．此外，还有所谓的无限区间．引进记号 $+\infty$（读做正无穷大）和 $-\infty$（读做负无穷大），例如

$$[a, +\infty)=\{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记做 $(-\infty, +\infty)$，它也是无穷区间．

设 δ 是任意正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记做

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

如图 1-1 所示．

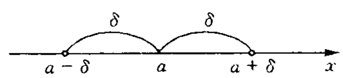

图 1-1

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的去心 δ 邻域，记做 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函数的概念

引例　设正方形的边长为 x，面积为 A，则 A 依赖于 x 的变化而变化，两者依赖关系可表示成

$$A=x^2,$$

当 x 在区间 $(0,\ +\infty)$ 内任取一个数值时，都有一个确定的实数值与它对应，则称 A 是 x 的函数.

定义　设 D 是实数集 R 的非空子集，则从 D 到 R 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数，记做

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记做 D_f. 集合 $R_f=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,\ y)\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图像(如图 1-2 所示).

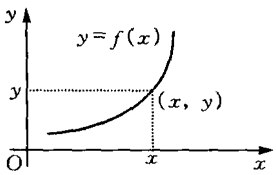

图 1-2

确定函数定义域的方法是：若给定函数表达式，则使该表达式有意义的自变量全体为其定义域. 若是实际问题，则使实际问题有定义的自变量的全体为其定义域.

下面举几个函数的例子.

例 1　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域，并画出其图像.

【解】　定义域

$$1-x^2\geqslant 0,\ 即\ D=[-1,\ 1].$$

值域 $R_f=\{y\,|\,0\leqslant y\leqslant 1\}$. 图像为上半圆(如图 1-3 所示).

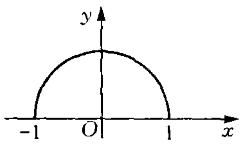

图 1-3

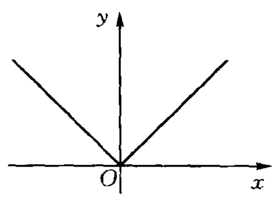

图 1-4

例 2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R_f=[0,\ +\infty)$，图像如图 1-4 所示.

例 3　符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的图像如图 1-5.

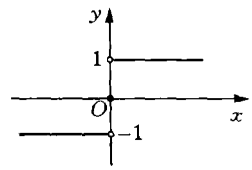

图 1-5

例 4　取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数. 如$[1.25]=1$, $[-3.5]=-4$, $[-1]=-1$, 图像如图 1-6 所示.

从例 2 到例 4 看到, 有时一个函数要用几个式子来表示. 这种在自变量的不同变化范围中, 对应关系用几个不同式子表示的函数, 称为分段函数.

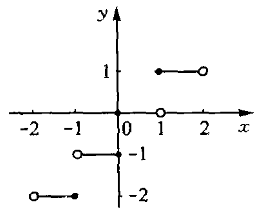

图 1-6

例 5　确定函数的表达式

(1) 设 $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$, 求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(2) 设 $f(x-1)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$, 求 $f(x)$.

【解】　(1) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{x}-x^2+2x=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-x^2+2x$.

(2) 令 $x-1=t$, 则 $x=t+1$, 即

$$f(t)=\frac{(t+1)+3}{(t+1+1)^2}=\frac{t+4}{(t+2)^2},$$

所以

$$f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

三、初等函数

1. 基本初等函数

初等数学对下面 6 类函数的定义域、值域及函数的性态进行了讨论:

常数函数　$y=C$　(C 为常数);

幂函数　$y=x^\alpha$　($\alpha\in\mathbf{R}$);

指数函数　$y=a^x$　($a>0$, 且 $a\neq1$);

对数函数　$y=\log_a x$　($a>0$, 且 $a\neq1$);

三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\mathrm{arccot}\,x$

这 6 类函数统称为基本初等函数.

2. 反函数

在函数定义中, 若 f 是从 D 到 $\mathbf{R}_f$ 的一一映射, 则它的逆映射 f^{-1}称为函数的反函数, 记做 $x=f^{-1}(y)$. 显然, f^{-1}的定义域为 R_f, 值域为 D.

例如, 函数 $y=x^3$, $x\in\mathbf{R}$ 是一一映射, 所以它的反函数存在, 其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$, $y\in\mathbf{R}$. 习惯上写为 $y=x^{\frac{1}{3}}$, $x\in\mathbf{R}$.

一般地，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记做 $y=f^{-1}(x)$，$x\in \mathbf{R}_f$. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像画在同一坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-7 所示).

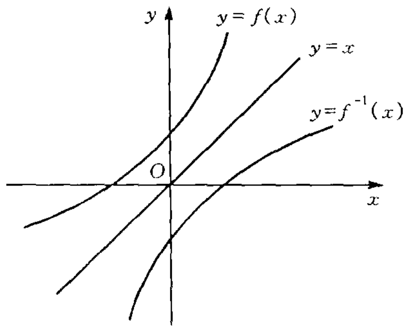

图 1-7

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义,且 $g(D)\subset D_1$，则由

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

确定的函数称为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=g(x)$构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

不是任何两个函数都能构成复合函数，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能构成复合函数. 两个及多个函数能够构成复合函数的过程叫**函数的复合运算**.

函数 $y=\arcsin(x^2-1)$可以看成由函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=g(x)=x^2-1$ 复合而成的函数.

4. 四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域分别为 D_1，D_2，记 $D=D_1\cap D_2$，且 $D\neq\varnothing$ （$\varnothing$ 是空集)，在 D 上，通过加、减、乘、除四则运算可以定义新的函数

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0).$$

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算得到的可用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如

$$y=ax^2+bx+c,\quad y=\sin\frac{1}{x},\quad y=e^{-x^2}$$

等都是初等函数.

四、经济问题中常见的函数

运用数学工具解决实际问题，往往需要先把变量之间的函数关系表示出来，才方便进行计算和分析.

1. 需求函数与供给函数

(1) 需求函数

在经济活动中，生产者与消费者通过市场交换商品，消费者购买商品是为了得到它的效用，生产者提供商品是为了获取利润，而市场就是生产者与消费者之间的桥梁.

作为市场中的一种商品，消费者对它的需求量受到诸多因素影响，例如，该商品的市场价格、消费者的收入和消费者的偏好等. 其中，市场价格是影响需求量的一个十分重要的因素. 为了讨论问题方便，先忽略其他因素的影响，即假定某种商品的市场需求量只与该商品的市场价格有关，即

$$q_d=q(p).$$

其中，q_d 是商品的需求量，p 为该商品的市场价格. 作为市场价格 p 的函数，需求量 q_d 一般

随着价格的上涨而减少，即需求量 q_d 是市场价格 p 的单调减少函数(特殊情况除外). 例如，函数

$$q = ap + b$$

就是一个线性需求函数，其中 $a<0$，$b>0$.

(2) 供给函数

如果市场的每一种商品直接由生产者提供，生产者的供给量也受到多种因素影响，如该商品的市场价格、生产者生产该商品所付出的成本等. 在这里，也忽略其他因素，而只是将供给量看做是该商品的市场价格的函数，由于生产者向市场提供商品的目的是赚取利润，一般来讲，与需求函数的情况相反，供给量随着市场价格的上涨而增加，即供给量 q_s 是市场价格 p 的单调增加函数. 例如，函数

$$q_s = a_1 p + b_1$$

就是一个线性供给函数，其中 $a_1>0$，$b_1<0$.

(3) 市场均衡

对于一种商品而言，若需求量等于供给量，则这种商品达到市场均衡. 由 $q_d = q_s$ 得

$$ap + b = a_1 p + b_1$$

解出 p，记做 p_0

$$p_0 = \frac{b_1 - b}{a - a_1},$$

这个价格称为该商品的市场**均衡价格**.

当市场均衡时，有

$$q_d = q_s = q_0,$$

q_0 称为市场**均衡数量**.

例 6　某商品的供给函数与需求函数分别为

$$q_s = 25p - 10,$$

$$q_d = 200 - 5p,$$

求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

【解】　由均衡条件 $q_d = q_s$，得

$$200 - 5p = 25p - 10,$$

解出 p，得到

$$p_0 = 7,$$

$$q_0 = q_d = q_s = 165,$$

即市场均衡价格为 7，市场均衡数量为 165.

2. 成本函数

在生产过程中，用于生产产品的费用为生产成本. 成本可以分为两类:第一类是厂房、设备等固定资产的折旧，管理者的固定工资等. 这一类成本在短时期内不发生变化，即不随着产品产量的变化而变化，称为固定成本，用 C_0 表示. 第二类是能源费用、原材料费用、劳动者的工资等，这一类成本的特点是随着产品产量而变化，称为变动成本，用 C_1 表示. 这两类成本的总和就是生产者投入的总成本，用 C 表示，即

$$C = C_0 + C_1.$$

在生产规模和能源、材料价格不变的条件下，C_0 是常数，C_1 是产量 q 的函数，所以 C 也是产量 q 的函数，即

$$C = C_0 + C_1(q).$$

单从总成本无法看出生产者生产水平的高低，还要进一步考察单位产品的成本，即平均成本，记为 $\overline{C}$，即

$$\overline{C} = \frac{C(q)}{q}.$$

例 7 生产某种商品的总成本(单位:元)是

$$C(q) = 500 + 2q,$$

求生产 25 件这种商品时的总成本和平均成本.

【解】 生产 25 件商品时的总成本为

$$C(25) = 500 + 2 \times 25 = 550\ (\text{元}),$$

由于平均成本

$$\overline{C} = \frac{C(q)}{q} = \frac{500}{q} + 2,$$

所以生产 25 件商品时的平均成本为

$$\overline{C} = \frac{500}{q} + 2 = 22\ (\text{元/件}),$$

即生产 25 件商品的总成本为 550 元，而平均成本为 22 元/件.

3. 收入函数

收入是指生产者生产的商品售出后的收入，用 R 表示. 生产者销售某种商品的总收入取决于该商品的销量和价格. 如果用 $p(q)$ 表示价格是销量的函数，那么收入函数就是

$$R(q) = q \cdot p(q).$$

除总收入外，还有平均收入，用 $\overline{R}$ 表示. 它是销售单位商品的收入，即

$$\overline{R} = \frac{R(q)}{q}.$$

例 8 已知某种商品的需求量 q 是价格 p 的函数，其表达式为

$$q = 200 - 5p,$$

试求该商品的收入函数，并求出销售 20 件该商品时的总收入和平均收入.

【解】 由需求函数 $q = 200 - 5p$，可得

$$p = 40 - \frac{q}{5},$$

再由公式 $R(q) = q \cdot p(q)$，可得该商品的收入函数为

$$R = q\left(40 - \frac{q}{5}\right) = 40q - \frac{q^2}{5},$$

而

$$\overline{R} = \frac{R}{q} = 40 - \frac{q}{5},$$

由此可以得到销售 20 件该商品时的总收入和平均收入