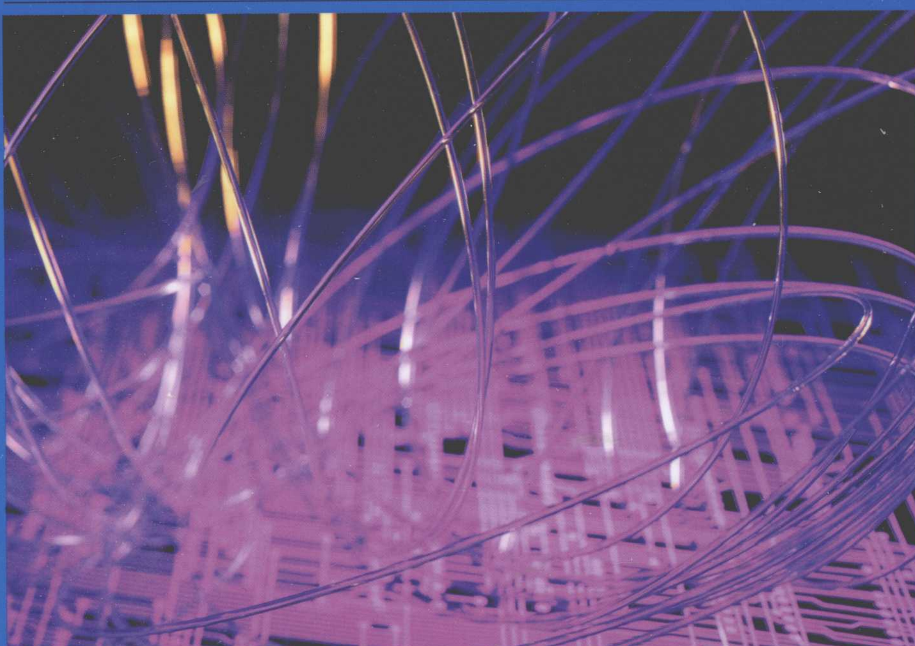
M A T H

线性代数习题
精选精解

主编　张天德　蒋晓芸
主审　刘建亚　吴　臻

XIANXINGDAISHUXITIJINGXUANJINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

线性代数习题

精选精解

主　编　张天德　蒋晓芸
主　审　刘建亚　吴　臻
副主编　吕洪波　张焕玲

XIANXINGDAISHUXITIJINGXUANJINGJIE

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题精选精解／张天德，蒋晓芸主编．—济南：山东科学技术出版社，2009
ISBN 978－7－5331－5422－6

Ⅰ．线… Ⅱ．①张… ②蒋… Ⅲ．线性代数—高等学校—解题 Ⅳ．O151．2－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 187470 号

线性代数习题精选精解

主编　张天德　蒋晓芸

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：（0531）82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：（0531）82098071

印刷者：山东新华印刷厂临沂厂
地址：山东省临沂市高新技术产业开发区新华路东段
邮编：276017　电话：（0539）2925659

开本：720mm × 1020mm 1/16
印张：22.75
版次：2009 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978－7－5331－5422－6
定价：29.80 元

前言

QIANYAN

2007年，我们编写了高等数学同步辅导及考研复习用书——Б. П. 吉米多维奇《高等数学习题精选精解》。此书出版后，得到了广大读者的喜爱，许多同行都告诉我们，他们那里的学生几乎人手一册，成为许多高校"指定"的必备参考书。短短两年的时间就重印了五次。

线性代数是理工类专业的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。许多读者与我们联系，希望也能编写一本线性代数的辅导书。为帮助读者更好学习线性代数这一科目，我们编写了《线性代数习题精选精解》作为Б. П. 吉米多维奇《高等数学习题精选精解》的姊妹篇。本书涵盖了线性代数的知识要点、典型习题、考研真题以及难度稍大的综合习题，汇集了线性代数的基本解题思路、方法和技巧，融入了编者多年讲授线性代数的经验和体会。相信本书会成为读者学习线性代数的良师益友。

本书共分六章，每章分若干节，在章节划分和内容设置上与最新版硕士研究生入学考试大纲完全一致。每章除最后一节外每节包括两大部分内容：

知识要点：简要对每节涉及的基本概念、定理和公式进行了系统梳理；

基本题型：对每节常见的基本题型进行了归纳总结，便于学生理解、掌握，可作为学生学习线性代数课的同步练习或习题使用，有利于提高学生的解题能力和数学思维水平。

每章最后一节是**综合提高题型**。这一节的题目综合性较强、有一定难度，有相当一部分是考研真题。通过本节的学习可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力，把握重点、了解考研动向、开拓视野。

本书由山东大学张天德教授、蒋晓芸教授主编，吕洪波、张焕玲副主编。山东大学刘建亚教授、吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习

题提出了更为精妙的解题思路。本书可作为在校大学生同步学习的优秀辅导书,也可作为广大教师的教学参考书,还可以为毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。读者使用本书时,宜先独立求解,然后再与本书作比较,这样一定会获益匪浅,掌握更多的有用知识。

书中不当之处,恳请指正。

编　者

2009 年 10 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

MULU

第一章　行　列　式

§1. 行列式的定义

知识要点

1. n 级排列　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列，通常记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

逆序　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，则它们称为一个逆序.

逆序数　一个排列中的逆序总数，通常记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

奇(偶)排列　逆序数为奇数(偶数)的排列.

对换　把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样的一个变换称为一个对换.

2. n 级排列的性质

(1) 任意一个排列经过一个对换后，奇偶性改变；

(2) n 级排列共有 $n!$ 种，奇偶排列各占一半.

3. n 阶行列式　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

n 阶行列式有时简记为 $|a_{ij}|_n$，而且有如下另外两种类似的定义：

$$|a_{ij}|_n = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

和

$$|a_{ij}|_n = \sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ 和 j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

由 n 级排列的性质可知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，其中冠以正号的项和冠以负号的项(不算元

素本身所带的负号）各占一半.

4. 常见行列式

（1）二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

（2）三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

（3）上三角、下三角、对角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（4）副对角线方向的行列式：

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

（5）范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

基 本 题 型

题型 1：计算排列的逆序数和奇偶性

方法与技巧：排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 等于：

i_1 后面比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

【1.1】 求下列排列的逆序数.

(1)217986354 (2)134782695 (3)987654321

解 (1)$\tau(217986354) = 1+0+4+5+4+3+0+1 = 18$.

(2)$\tau(134782695) = 0+1+1+3+3+0+1+1 = 10$.

(3)$\tau(987654321) = 8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$.

【1.2】 求下列排序的逆序数，并确定奇偶性.

(1)$n(n-1)\cdots 21$ (2)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$

解 (1)$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，从而所给排列为偶排列；

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，从而所给排列为奇排列.

(2) 排列中前 n 个数 $1,3,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数和后 n 个数之间才构成逆序，

$$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

奇偶性讨论与(1) 相同.

【1.3】 如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k，问：排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解 显然，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任意不同的 x_i 与 x_j，必在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中构成逆序，而且只能在一个中构成逆序. 因此，这二排列的逆序数的和，即为从 n 个元素中取两个不同的元素的组合数 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 但由于 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k，故 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

【1.4】 选择 i 与 k，使

(1)$1274i56k9$ 成偶排列；

(2)$1i25k4897$ 成奇排列.

解 (1) 在排列 $1274i56k9$ 中缺数码 3,8，于是

令 $i=3,k=8$ 得：

$\tau(127435689)=4+1=5$；

令 $i=8,k=3$ 得：

$\tau(127485639)=4+1+3+1+1=10$.

所以，当 $i=8,k=3$ 时成偶排列.

(2) 在排列 $1i25k4897$ 中缺数码 3,6，于是

令 $i=3,k=6$ 得：

$\tau(132564897)=1+1+1+1+1=5$；

令 $i=6,k=3$ 得：

$\tau(162534897)=4+2+1+1=8$.

所以，当 $i=3,k=6$ 时成奇排列.

点评：对于含参数的排列，要对参数进行讨论来确定前后数的大小关系.

题型 2：关于行列式的定义

【1.5】 选择 i 与 k，使 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为五阶行列式中一个带负号的项.

解 将给定的项改写成行标为自然顺序，即

$$a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}.$$

列标构成的排列 $i52k3$ 中缺 1 和 4.

令 $i=1,k=4,\tau(15243)=3+1=4$,故该项带正号.

令 $i=4,k=1,\tau(45213)=3+3+1=7$,故该项带负号.

所以,$i=4,k=1$.

【1.6】 求 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 根据行列式定义,只有对角线上的元素相乘才出现 x^4,而且这一项带正号,即 $2x^4$. 故 $f(x)$ 的 x^4 的系数为 2.

同理,含 x^3 的项也只有一项,即

$$x\cdot 1\cdot x\cdot x=x^3.$$

而且其列标所构成的排列为 2134. 但是

$$\tau(2134)=1,$$

故 $f(x)$ 的含 x^3 的项为 $-x^3$,它的系数为 -1.

【1.7】 仅用行列式定义,证明:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证 除去符号的差异外,行列式 D 的一般项可表示为

$$a_ib_jc_kd_se_t,$$

其中 $ijkst$ 为 1,2,3,4,5 的任意一个排列,而且 $c_r,e_r,d_r(r=3,4,5)$ 都是 0.

由于 k,s,t 为 1,2,3,4,5 中的三个不同的数,故至少要取到 3,4,5 中的一个数. 就是说,在 D 的展开式的每一项中至少有一个因子 0. 从而 D 的每项都是零,故 $D=0$.

【1.8】 证明:一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多,则此行列式必等于零.

证 n 阶行列式共有 n^2 个元素. 如果 D 是 n 阶行列式,而且其中等于零的元素的个数比 n^2-n 多,则不等于零的元素的个数比

$$n^2-(n^2-n)=n$$

少. 这样,D 的展开式中每一项至少有一个因子 0,从而 $D=0$.

【1.9】 利用定义计算下列行列式.

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; (2) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

解 (1) 由行列式的定义,D_n 中的一般项为

$$\tau^{(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

因为 D_n 中第一行除 a_{1n} 外全为零,所以 a_{1j_1} 取为 a_{1n}.

而第二行中除 $a_{2,n-1}$ 和 a_{2n} 外全为零,故 a_{2j_2} 取为 $a_{2,n-1}$.

同理,a_{3j_3} 取为 $a_{3,n-3}$,…,a_{nj_n} 取为a_{n1},即 D_n 只有一项$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.而这一项的列标构成的排列的逆序数为

$$\tau(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

故 $D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

(2) 由行列式的定义,第一行取 a_1,第二行取 a_2,…,第 n 行取 a_n,即 D_n 只有一项 $a_1a_2\cdots a_n$.而这一项的列标构成的排列为:$(n-1)\ (n-2)\ \cdots\ 1\ n$,所以逆序数为

$$\tau((n-1)\ (n-2)\ \cdots\ 1\ n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

故 $D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$.

§2. 行列式的性质

知识要点

行列式的性质

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号(交换 r_1 行和 r_2 行,记为 $r_1\leftrightarrow r_2$;交换 c_1 列和 c_2 列,记为 $c_1\leftrightarrow c_2$).

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到整个行列式的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的所有元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上，行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 $c_i + kc_j$)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j)$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$).

基本题型

题型 1:直接利用性质计算行列式

【2.1】　如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1 =$ ______.

(A)$2D$　　(B)$-2D$　　(C)$8D$　　(D)$-8D$

解　根据行列式的性质 3 及其推论，

$$D_1 = 2 \times 2 \times 2D = 8D.$$

故应选(C).

【2.2】　计算 $D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$.

解　$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4 + 2r_2]{r_3 + 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - \frac{17}{16}r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -(-13) \times 16 \times \frac{3}{2} = 312.$$

点评:利用行列式的性质，将行列式化为三角形行列式，这是常见的计算行列式的一种思路.

【2.3】 计算 $D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

解 把行列式中第二列$\times(-\frac{1}{a_1})$，第三列$\times(-\frac{1}{a_2})$，…，第$(n+1)$列$\times(-\frac{1}{a_n})$加至第一列，可把行列式化为上三角行列式，从而得其值.即

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

【2.4】 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

解 $$D\xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{vmatrix} 2a+b & a & b & a \\ 2a+b & 0 & a & b \\ 2a+b & a & 0 & a \\ 2a+b & b & a & 0 \end{vmatrix}=(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & -a & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b-a & a-b & -a \end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & b & a \\ 0 & -b & a-b & b-a \\ 0 & -b & -b & 0 \\ 0 & 0 & a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & b & a \\ 0 & -b & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -a & a-b \\ 0 & 0 & a-b & -a \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_4}(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+b & a \\ 0 & -b & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -b & a-b \\ 0 & 0 & -b & -a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+b & a \\ 0 & -b & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -b & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b \end{vmatrix}$$

$=b^2(b^2-4a^2)$.

题型 2:利用性质证明行列式

【2.5】 证明:$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

证 左端 $= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右端}.$$

点评:本题利用性质5将行列式拆分成简单的行列式的和的形式,这也是常见的计算行列式的方法.

【2.6】 证明:$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

证 左端 $\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{c_3-2c_2\\c_4-3c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

【2.7】 如果 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 满足 $a_{ij} = -a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 D_n 为反对称行列式.证明:奇数阶反对称行列式为零.

解 设 D_n 为反对称行列式,且 n 为奇数,由定义知 $a_{ii} = -a_{ii}$,于是有 $a_{ii} = 0(i=1,2,\cdots,n)$,所以

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行列式转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列提出}(-1)}(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{n\text{为奇数}}-D_n,$$

于是 $D_n = 0$.

点评：本题利用行列式的性质1和性质3先证明 $D_n = -D_n$，从而 $D_n = 0$，这是证明行列式为零的常用方法.

【2.8】 证明元素为0，1的三阶行列式的值只能是 $0, \pm 1, \pm 2$.

证 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{ij}$ 取值0或1.

若 D 的某一列元素全为零，则 $D = 0$，结论成立. 否则，第一列中至少有一个非零元素，不失一般性，设 $a_{11} = 1$，当 a_{21} 或 a_{31} 不全为零时，通过减去第一行，可把 D 化为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23},$$

其中 $b_{ij} = a_{ij}$ 或 $b_{ij} = a_{ij} - a_{1j}$，因此 $|b_{ij}| \leqslant 1$，故 $|D| \leqslant 2$.

§3. 行列式按行(列)展开

知识要点

1. 余子式 在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

k 阶子式 在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中，任意选定 k 行 k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原来顺序构成一个 k 阶行列式，称为 D 的一个 k 阶子式.

2. 按一行(列)展开

(1) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

按第 i 行展开 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1,2,\cdots,n)$；

按第 j 列展开 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1,2,\cdots,n)$.

(2) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$ 或 $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j$.

3. 按 k 行(k 列)展开 拉普拉斯定理：在 n 阶行列式中，任意取定 k 行(k 列)$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，由这 k 行(k 列)组成的所有的 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式的值.

基本题型

题型1:关于代数余子式和余子式

【3.1】 若$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$中代数余子式 $A_{12}=-1$,则 $A_{21}=$ ______.

解 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=4-5x=-1$,故 $x=1$,所以,$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2$.

故应填 2.

【3.2】 设四阶行列式 D_4 的第三行元素为 $-1,0,2,4$.

(1) 当 $D_4=4$ 时,设第三行元素所对应的代数余子式分别为 $5,10,a,4$,求 a.

(2) 设第四行元素对应余子式分别 $5,10,a,4$,求 a.

解 (1) 由行列式按一行(列)展开公式,

$$(-1)\times 5+0\times 10+2\times a+4\times 4=4.\text{故 } a=-\frac{7}{2}.$$

(2) 由定义,第四行元素对应的代数余子式分别为

$$(-1)^{4+1}\times 5,(-1)^{4+2}\times 10,(-1)^{4+3}\times a,(-1)^{4+4}\times 4,$$

所以,$(-1)\times(-1)^{4+1}\times 5+0\times(-1)^{4+2}\times 10+2\times(-1)^{4+3}\times a+4\times(-1)^{4+4}\times 4=0$.

故 $a=\dfrac{21}{2}$.

点评:注意代数余子式 A_{ij} 和余子式 M_{ij} 之间的转换,即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},\qquad M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}.$$

【3.3】 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,求第四行各元素余子式之和.

解 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第三行展开}}(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

点评:利用行(列)展开构造新的行列式,即用 $A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$ 的系数 $-1,1,-1,1$ 替换 D 中的第四行元素.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com