高等学校试用教材

工　程　数　学

线性代数

孙天名　陈永明
张维良　栗心菊　编

河南科学技术出版社

高等学校试用[illegible]

工程数学

线性代数

孙天名 陈永明

[illegible]编

河南科学技术出版社

内容提要

本书根据国家教委对高等工科院校数学教学的基本要求编写而成，内容丰富、适应面宽、通俗易懂、便于自学，是工科院校较为理想的线性代数教材，也可作为职工大学、业余大学及工程技术人员的自学用书或参考书。

线性代数

孙天名 陈永明
张维良 梁心菊 编

责任编辑 [illegible]

[illegible]学技术出版社出版发行
郑州工学院印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 6.25印张 131千字
1990年10月第1版 1991年3月第1次印刷
印数1—3000册

ISBN 7—5349—0877—9/G.218

定价 2.95元

编者的话

本书是根据1987年国家教委批准印发的高等工业学校《数学课程教学基本要求》（线性代数部分），并结合编者多年讲授这门课程的实际经验编写的。前五章内容通俗、简明扼要，为一般工科院校学生必修内容，第六章介绍的比较深入，可供对数学要求较高的专业选用。

本书的编写分工如下：

主编　孙天名　　　副主编　陈永明

第一章：栗心菊；第二章：张维良；第三、第六章：陈永明；第四、第五章：孙天名。

全书由徐丕鉴同志审订，汪昌瑞、万绩鉴、李林生、张文兰同志也参加了部分章节的审订工作。

全书的特点是：学时少（前五章约为30学时），适用面宽，通俗易懂、便于自学。它可作为高等工科院校教材或参考书，也可作为职工大学、业余大学教材及工程技术人员的自学用书。

本书编写过程中，郑州轻工业学院及景德镇陶瓷学院数学教研室的同志及有关部门的领导给予了热情的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心地感谢。

由于编者水平所限，不足之处在所难免，殷切期望广大读者批评、指正。

编　者

1990年5月于郑州

目　录

第一章　行列式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学的各个领域中，而且在其它学科中也会经常用到它，在线性代数中它更是一个不可缺少的工具.在中学数学中已由解二、三元线性方程组问题引出了二阶与三阶行列式，在这一章内我们首先复习二、三阶行列式，然后再介绍n阶行列式的定义、性质、计算及其简单应用。

§1·1　二阶与三阶行列式

在中学数学中已经在解线性方程组问题中引出了二阶与三阶行列式，它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{2}$$

其中元素a_{ij}的两个下标i与j分别表示a_{ij}所在的行与列的序数。

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元线性方程组的解表达为简洁的形式。

设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \tag{3}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

又设 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$， $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

其中D_1与D_2分别是把D中的第一列与第二列元素换成（3）式中的常数项得到的。则当$D\neq 0$时，方程组（3）有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, \qquad y=\frac{D_2}{D} \tag{4}$$

同样，设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

又设

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中D_1，D_2，D_3分别是把D中的第一列，第二列，第三列的元素，换成（5）式中的常数项得到的，当$D\neq 0$时，方程组（5）有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\qquad y=\frac{D_2}{D},\qquad z=\frac{D_3}{D} \tag{6}$$

例1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x-3y+2z=-3\\ x+4y-3z=6\\ 3x-y-z=1\end{cases}$$

解 系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=-8-2+27-24-6-3=-16,$$

$D\neq 0$，方程组有唯一解，解的分子行列式分别为

$$D_1=\begin{vmatrix}-3 & -3 & 2\\ 6 & 4 & -3\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=12-12+9-8-18+9=-8$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 6 & -3\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-12+2+27-36-3+6=-16$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & -3\\ 1 & 4 & 6\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=8+3-54+36+3+12=8$$

于是方程组的解为

$$x = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{-16}{-16} = 1, \qquad z = \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2}.$$

这样就得到方程组的唯一解

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

对于n元线性方程组也有相仿的结论，在这一章里我们要把这个结果推广到n元线性方程组去。为此，我们首先给出n阶行列式的定义并讨论它的性质，这就是本章的主要内容。

§1·2 排列的逆序数

作为定义n阶行列式的准备，我们先来讨论一下排列的逆序数。

定义1 由n个元素1，2，…，n，（前n个自然数），组成一个有序数组叫做这n个元素的全排列。

n个元素的全排列共有$P_n = n!$种，例如2431是4个元素1，2，3，4的一个全排列，这4个元素的全排列共有$p_4 = 4! = 24$种。

显然$12\cdots n$也是n个元素1，2，…，n的一个全排列。这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的，我们规定它为标准次序。其它排列都或多或少地破坏自然顺序。

定义2 在一个排列中，如果某两个元素的前后顺序与

标准次序相反，即前面的数大于后面的数，那么这两个数之间构成一个逆序。一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，记为$t(j_1j_2\cdots j_n)$，或简记为t。

例 求排列32415的逆序数。

解 在排列32415中，

3排在首位，逆序数为0；

2的前面比2大的有一个（3），故逆序为1；

4的前面没有比4大的数，故逆序为0；

1的前面比1大的数有三个（3、2、4），故逆序为3；

5是最大的数，逆序为0；

于是排列32415的逆序数为

$$t=0+1+0+3+0=4.$$

又如排列45321的逆序数为$t=0+0+2+3+4=9$。

定义3 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如排列32415是偶排列，排列45321是奇排列，排列$12\cdots n$的逆序数是零，因之是偶排列。

事实上，在$n!$种全排列中，有$\frac{n!}{2}$个奇排列和$\frac{n!}{2}$个偶排列。

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，就得到一个新排列，这种过程叫做对换。将相邻两个元素对调，叫做相邻对换。

定理 对换改变排列的奇偶性。

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

证明 （1）相邻两个元素对换。

设排列为$PabQ$，P表示a前的p个元素，Q表示b后的q个元素，ab表示相邻二元素。

经过ab相邻对换变成$PbaQ$，其余元素位置不变。若a,b是标准排列，经对换逆序数增加1；若a，b原来构成逆序，经对换逆序数减少1。所以对换a，b就要改变$PabQ$逆序数的奇偶性。

（2）设排列为$PaQbR$，P表示a前的p个元素，Q表示a，b之间的q个元素，R表示b后的r个元素。

若将$PaQbR$对换成$PQabR$，要作q次相邻对换，再将$PQabR$对换成$PbQaR$要作$q+1$次相邻对换，前后共作相邻对换（$2q+1$）次，$2q+1$是奇数，由（1）相邻对换改变排列的奇偶性，显然，奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性。所以a，b对换改变排列的奇偶性。

由于标准排列的逆序数为0，显然有

推论 奇排列对换成标准排列，对换次数为奇数；偶排列对换成标准排列，对换次数为偶数。

例如前面的32415是偶排列，将其中3，1对换得12435，再将4，3对换得到标准排列12345，共经过2次对换，对换次数是偶数。又如前面的45321是奇排列，将其中4，1对换得15324，再将5，2对换得12354，最后再将5，4对换得到标准排列12345，共经过3次对换，对换次数是奇数。这里说明一点，对换的次数不唯一，但次数的奇偶性不变。

§1·3 n 阶行列式

在给出n阶行列式之前，先来观察一下二阶和三阶行列

式的定义。我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2}$$

从二阶和三阶行列式的定义中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成。在$n=2$时，由不同行不同列的元素构成的乘积只有$a_{11}a_{22}$与$a_{12}a_{21}$这两项。在$n=3$时，也不难看出只有（2）中的6项。这是二阶和三阶行列式的特征的一个方面。另一方面，每一项乘积都带有符号，这符号是按什么原则决定的呢？在三阶行列式的展开式（2）中，项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{3}$$

其中$j_1j_2j_3$是1,2,3的一个排列。可以看出，当$j_1j_2j_3$是偶排列时，对应的项在（2）中带有正号，当$j_1j_2j_3$是奇排列时带有负号。二阶行列式显然也符合这个原则。

上面对二阶和三阶行列式的分析对于我们理解行列式的定义是有帮助的。下面就来给出n阶行列式的定义。

定义 设有n^2个元素，排列成n行n列如下

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \qquad (4)
$$

构成n阶行列式，其中a_{ij}表示第i行第j列的元素（i称为行标，j称为列标），n阶行列式的值等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (5)$$

的代数和，这里$j_1j_2\cdots j_n$是1，2，…，n的一个排列，每一项都按下列规则带有符号：当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，该项带有正号；当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，该项带有负号。这一定义可写成

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (6)$$

这里$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对1，2，…$n$的所有全排列求和，或简记为

$$D=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

利用行列式定义来计算n阶行列式，首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积，把构成这些乘积的元素按行标排成标准次序，然后由列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号。共有$n!$项。显然，当n较大时是十分复杂的，这是由于当n较大时，$n!$增加很快，如$4!=24$，$5!=120$，$6!=720$，…，因此，当n较大时，要写出这$n!$项是非常不容易的，而且还要逐个地确定它们的奇偶性。只有一些特殊

的行列式是可以利用定义计算的，我们举一些这样的例题。

例1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，这个行列式的主对角线（即从左上角到右下角诸元素所构成的对角线）以下的元素都为0，即$a_{ij}=0$（当$i>j$时）。

解 我们先来看一下，形如（5）式的项有哪些不为零，然后再来决定它们的符号。

由于第一列除了a_{11}以外都为0，因此欲要得到非0的项，第一列必选a_{11}，这样第二列不能选a_{12}，（因为第一行只能选一个元素）而只能选a_{22}，同样，第三列必选a_{33}，…最后一列必选a_{nn}，因此这个行列式只有这唯一的一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

有可能不为0。这一项的相应排列为标准排列，逆序数为0，是偶排列，应带正号。故行列式的值为$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这个行列式称为右上三角行列式，或简称为上三角行列式。

作为例1的特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

主对角线以外的元素全为0的行列式称为对角形行列式，其值等于主对角线上元素的乘积。

例2 求右下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，这个行列式的$a_{ij} = 0$，（当$i + j \leqslant n$）

解 类同例1，除去为0的项，仅剩下唯一的一项为$a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$这一项的列标的排列为

$(n(n-1)(n-2)\cdots 3\ 2\ 1)$它的逆序为$\dfrac{n(n-1)}{2}$

因此

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \quad .$$

当n阶行列式$n = 1$时，$|a| = a$．注意这时应和绝对值符号区分开，在绝对值的概念下$|-2| = 2$，而在行列式中$|-2| = -2$。

n阶行列式的项也可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}$$

其中S和T分别是行标排列 α'， β'， $\cdots$ λ'和列标排列α，β，$\cdots$ λ的逆序数，则n阶行列式可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda} \tag{7}$$

事实上，$D=\sum(-1)^{t}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中任意两元素$a_{pj_p}$与$a_{qj_q}$对换，行标与列标的逆序同时改变，它们的奇偶性也同时改变，S和T分别为对换后行标和列标的逆序数，$S+T$的奇偶性不变，即 $(-1)^{t}=(-1)^{S+T}$

$$\therefore\quad (-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}=(-1)^{t}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

故n阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}.$$

或者

$$D=\sum(-1)^{I}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{8}$$

其中I为行标排列$i_1 i_2\cdots i_n$的逆序数，列标按标准次序排列。

§1·4 n 阶行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，n阶行列式一共有$n!$项，前面我们讲过，当n较大时，$n!$ 是一个相当大的数字，直接从定义来计算行列式几乎是不可能的事。因此，我们有必要进一步讨论行列式的性质，利用这些性质可以简化行列式的计算。