普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

肖家洪
文海英 等 编著
李 岚

南海出版公司

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

肖家洪 文海英 李 岚 等编著

南海出版公司
2009・海口

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/肖家洪,文海英,李岚编著. 一海口:南海出版公司,2008. 11

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-5442-4296-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①肖…②文…③李… Ⅲ.线性代数一高等学校一教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 194863 号

XIANXING DAISHU

线性代数

作　　者 肖家洪　文海英　李　岚

责任编辑 邵　萍

装帧设计 水木时代(北京)图书中心

出版发行 南海出版公司　**电话:**(0898)66568511(出版)65350227(发行)

社　　址 海南省海口市海秀中路 51 号星华大厦五楼　**邮编:** 570206

电子信箱 nanhaicbgs@yahoo. com. cn

经　　销 新华书店

印　　刷 北京广达印刷有限公司

开　　本 787×960 1/16

印　　张 13

字　　数 233 千字

版　　次 2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5442-4296-7

定　　价 23.80 元

前　言

2005年9月，我们所编著的《线性代数》第一版由吉林大学出版社出版，同年11月将它申报“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”，于2006年7月被教育部评审通过。这次再版是在原教材的基础上修订而成。

本次修订，保持了原教材的体系结构和基本内容。《线性代数》源于对线性方程组的讨论，主要工具是行列式和矩阵。矩阵理论不仅有效地解决了线性方程组的有解判定和解的结构，而且由于许多线性或非线性问题，都可以转化为对矩阵的讨论，所以矩阵的化简与应用，成了《线性代数》的主线与核心。另一方面，支撑矩阵理论深入讨论的是向量的线性相关性理论。因此，我们将这一理论安排在讨论矩阵的秩之前讲授，不仅使矩阵和线性方程组内容得以一气呵成，并且使其后许多问题的讨论趋于简单，也为将它自然过渡到向量空间奠定了基础。实践表明，这一处理思路是合理有效的，这也是这次修订决定维系原有教材体系的基本理由。

《线性代数》是一门非数学专业的基础理论课程，从应用的角度来说，它应侧重于基本方法，但基本方法来源于基本理论，所以保持基本理论的系统性、严谨性是完全必要的。它不仅有助于对方法的理解与把握，同时能够有效地培养学生的抽象思维能力，提高学生的数学素养。当然，我们也充分估计到学生学习过程中可能面临的困难，为此，在修订中，在考虑继续维护理论相对系统性和完整性的同时，力求在文字表述、例题、习题的选择等方面更趋合理。基于上述思考，这次修订的内容有：

1. 对某些“开章引言”作了一些文字补充，每章结束时，给一简略的小结，目的在于加强读者对本章内容在教材中所处地位、知识的大致结构、要点以及应用等方面的了解。

2. 对少数例题、习题作了适当调整，增加了部分例题、习题，包括少量的应用实例。对原省略了证明的少数定理、性质作了适当的补充推证，目的是尽量避免不必要的繁琐计算，减少学生阅读或练习时的困难。

3. 在个别地方，简要地引用了一些数学史资料，这对于学生了解相关知识的起因和发展，提高学习线性代数的兴趣，可望有所帮助。

4. 增添了习题参考答案或提示。详尽的习题解答，对于学生可能弊多利少，答案或提示既为学生留下了足够的思考空间，也使学生在练习时不至感到

茫然而不知所措。同时,我们保留了原教材的附录:综合练习题及综合练习题参考答案或提示,目的在于给对线性代数感兴趣或打算继续深造的学生提供一些拓广思维的练习素材。

5. 增添了"MATLAB与数学实验"一章。目的是在学生掌握相关的理论和方法之后,给学生提供必要时借用计算机处理线性代数(或是其他某些学科)中计算性问题的方法,为日后工作和学习奠定一定的基础。本章可作为选学内容。

除原有作者外,参加这次修编工作的还有佳木斯大学的李岚教授,她执笔编写了第八章全部内容,同时还为本教材其它章节增补了部分文字、例题、习题等内容,并提供了一些应用实例。

我系基础课教研室的魏大宽教授,夏尊背、黄贤运、韦美雁副教授,唐雅嫒老师等都为本教材的修订提出了宝贵的意见,并做了大量的工作;南海出版公司对本教材的修订出版给予了很大的关心和支持。在此一并表示衷心的感谢。

本教材修编历时两年有余,数易其稿,斟酌再三。我们力求按教育部的有关要求修订出一本较为实用的《线性代数》教材,但限于能力和水平,书中难免存在不当或谬误之处,敬请广大读者不吝批评指正,以便不断修订完善。

肖家洪

2009年元月

目 录

第一章　预备知识

为了保障全书内容讲述的系统性、完整性，我们将原本可不属于线性代数范畴，但讲述中却要用到的一些概念和结论等归纳在一起，形成了预备知识一章，以备不时之需.

本章的重点是数域、排列与对换.

1.1　集合与映射

集合是一个描述性的概念，一些事物的总体称为集合或集，称其事物为元素或元.本书所指的集都是分明集，即一事物要么属于给定的集，要么不属于给定的集，二者必居其一.事物 x 属于集 A，记为 $x\in A$，否则记为 $x\notin A$.

若集 A 的任一元都是集 B 的元，则称 A 包含于 B，或称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$.当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 时，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$.

不含任何元的集称空集，记为 $\varnothing$.空集是唯一的，为任一集的子集.包括某一具体问题中所有事物的集称全集，记为 E.全集随具体问题而定.

集合的元素是无序的，相同的元素只算一个.集合中元的个数称集合的基数或势，两个集有相同个数的元素，或元素之间有“一一对应”关系，称这两个集合等势.基数是有限的集称有穷集，显然，任何有穷集不能与它的真子集等势.能与集合的某一真子集等势的集称无穷集.

本教材常用的数集符号有：

N 表自然数集；**Z** 表整数集；**Q** 表有理数集；**R** 表实数集；**C** 表复数集.

集合的表示法，常有列元素法，如 $A=\{1,2,3\}$；以元素的属性表示法，如 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2-1=0\}$；此外还有图示法，它可以是具体的，也可以是抽象的.

集合常用的运算有交、并、补运算.由属于 A 且属于 B 的元构成的集，称 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.由属于 A 或属于 B 的元构成的集，称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$.即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.属于 A 而不属于 B 的所有元构成的集，称 B 对 A 的相对补集，记为 $A-B$.即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$.集 A 对全集 E 的相对补集称为 A 的绝对补集，记为 $\widetilde{A}$，即 $\widetilde{A}=E-A$.此外，由集 A 和集 B 的元构成的有序对作成的集，

称 A 与 B 的笛卡儿积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

仿此可以定义有限个集的笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_s$.

在讨论两个或多个集的关系时，映射是一个重要工具.

定义 1　设 A,B 是两个非空集，若有法则 φ，使对集 A 中的每一个元，在集 B 中都有唯一的元与之对应，则称 φ 是 A 到 B 的一个映射，记为 $\varphi:A\to B$.

若 $x\in A$，x 在 φ 下的对应元是 y，记为 $\varphi:x\mapsto y$（或 $\varphi(x)=y$）. 称 y 为 x 在 φ 下的象，称 x 是 y 的原象. A 的所有元在 φ 下的象作成的集，称 A 的象集，记为 $\varphi(A)$，它是 B 的子集.

由集 A 到 A 的映射，称为 A 上的映射或 A 的变换.

例 1　$\mathbf{Z}$ 是整数集，对任一个 $n\in\mathbf{Z}$（记为 $\forall n\in\mathbf{Z}$）

令
$$\varphi_1:n\mapsto 2n,$$
则 φ_1 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 2　$\mathbf{R}$ 是实数集，$\mathbf{R}^+$ 是非负实数集，$\forall x\in\mathbf{R}$

令
$$\varphi_2:x\mapsto x^2,$$
则 φ_2 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的一个映射.

例 3　A 是任一个非空集，$\forall x\in A$

令
$$\varphi_3:x\mapsto x,$$
则 φ_3 是 A 到自身的一个映射，称为 A 上的恒等映射或恒等变换.

定义 2　设 φ 是 A 到 B 的一个映射，对 A 的任意元 x_1,x_2，如果 $x_1\neq x_2$，便有 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$，则称 φ 是 A 到 B 的一个单映射（简称单射）；如果对于 B 的任意元 y，在 A 中至少有一个元 x，使 $\varphi(x)=y$，则称 φ 是 A 到 B 的一个满映射（简称满射）.

由定义 2 知，φ 是 A 到 B 的单射，也可表述为：若 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$，则有 $x_1=x_2$，其中，$x_1,x_2\in A$. 若 φ 是 A 到 B 的满射，也可表述为 $\varphi(A)=B$.

如例 1 中的 φ_1 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的单射而非满射，例 2 中的 φ_2 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的满射而非单射，例 3 中的 φ_3 则既是 A 到 A 的单射也是满射.

定义 3　若 φ 既是 A 到 B 的单射又是满射，则称 φ 是 A 到 B 的一个双射.

φ 是 A 到 B 的双射表明，A 与 B 的元素之间存在一一对应关系，由定义可知，此时也存在一个与 φ 相应的由 B 到 A 的唯一的映射，称为 φ 的逆映射，记为 φ^{-1}，即若 φ 是 A 到 B 的双射，对 $x\in A$，$y\in B$，$\varphi:x\mapsto y$，那么 $\varphi^{-1}:y\mapsto x$. 如果将先施行 φ^{-1} 再施行 φ，记为 $\varphi\varphi^{-1}$，则 $\varphi\varphi^{-1}(y)=\varphi(\varphi^{-1}(y))=\varphi(x)=y$，说明 $\varphi\varphi^{-1}$ 是 B 上的一个恒等映射，而 $\varphi^{-1}\varphi(x)=\varphi^{-1}(\varphi(x))=\varphi^{-1}(y)=x$，说明 $\varphi^{-1}\varphi$ 是 A 上的一个恒等映射.

习 题

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，

(1)写出 A 的全部子集；

(2)写出 $\mathbf{Z}-A$.

2. $\mathbf{N}$ 是自然数集，$\forall n\in\mathbf{N}$，下列法则是否是 $\mathbf{N}$ 上的映射？是不是单射？是不是满射？

(1) $\varphi:n\mapsto 1$；

(2) $f:n\mapsto n-1$；

(3) $g:n\mapsto n^2$；

(4) $h:n\mapsto 3n$.

3. 证明：$\varphi:x\mapsto \mathrm{e}^x$，$\forall x\in\mathbf{R}$，是实数集 $\mathbf{R}$ 到正实数集 $\mathbf{R}^+$ 的双射.

4. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}(m\geqslant n)$. 证明：由 A 到 B 的不同单射的个数为 $\mathrm{C}_m^n\cdot n!$.

1.2 数 域

对每一门学科的讨论，其对象都有一定的范围，这就是所谓论域. 线性代数所讨论的对象，基本上都与数有关. 数有四种基本运算：加、减、乘、除. 为了保障运算能实施，对于给定的数集，我们有必要使该集合的任何两个数通过上述某种运算的结果依然在该集之中. 为此给出：

定义 1 设 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的非空子集，※表示某种四则运算法则符号. 如果 $\forall a,b\in S$，有 $a※b\in S$，则称 S 对运算※是封闭的(简称为闭的).

不难看出，S 对※是闭的，表明※是 $S\times S$ 到 S 的一个映射. 一般地，A 为任意非空集，一个 $A\times A$ 到 A 的映射称为 A 的一个"代数运算". 用 $\circ$ 表代数运算，则 A 连同 $\circ$ 作成一个"代数系统"，记为 $(A,\circ)$.

例如，$\mathbf{N}$ 是自然数集，$\mathbf{N}$ 对加法、乘法是闭的，而对减法、除法则不封闭.

又如，$S=\{0\}$，则 S 对加法、减法、乘法都是封闭的，而对除法则不能实施.

定义 2 设 F 是复数集 $\mathbf{C}$ 的非空子集，若：

(1) F 至少含一个非零数；

(2) F 对于数的加、减、乘、除法(除数不为 0)都封闭，

则称 F 是一个数域.

显然，若 F 是数域，则有 $a\neq 0,a\in F$，因而 $\dfrac{a}{a}=1\in F$，$a-a=0\in F$. 即任何

数域都含有 0 和 1.

由定义 2 可知，有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域，分别称为有理数域、实数域和复数域. 整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域，因为它对除法不封闭.

除上述数域外，我们还可以构造出许多新的数域. 例如：

设 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，取 $b=0$，可得 $\mathbf{Q}\subseteq F$，于是 $1\in F$. 满足定义 2 中的条件(1). 此外，易证 F 对加、减、乘法是闭的. 又 $\forall a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}\in F$，且设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$(读者自证)，于是有：

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F.$$

由此知 F 是一个数域，它是在有理数域 $\mathbf{Q}$ 的基础上“添加”$\sqrt{2}$而得到. 而复数域 $\mathbf{C}$ 事实上可看作是在实数域 $\mathbf{R}$ 的基础上添加了虚数单位 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=-1)$后而得到的.

由上例不难联想到以下一个重要事实：

定理 1.2.1　任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证　设 F 是任一个数域，则 0，1 属于 F. 将 1 重复相加得全体正整数属于 F. 0 减全体正整数得全体负整数亦属于 F，这样整数集 $\mathbf{Z}\subseteq F$. 由于 F 对除法封闭，于是任两个整数的商(除数不为 0)属于 F，所以 $\mathbf{Q}\subseteq F$.

该定理表明，在所有的数域中，有理数域是“最小”的数域. 在中学代数里，数已扩充到复数，现在我们学过的“最大”的数域就是复数域 $\mathbf{C}$.

习　题

1. 下列数集分别对哪些运算是封闭的？

(1)非负实数集；

(2)非零有理数集；

(3)$S=\left\{\dfrac{m}{2^n}\mid m,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 证明两个数域的交集还是数域. 两个数域的并集是否还是数域？

3. 证明 $F=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Q},\mathrm{i}^2=-1\}$是数域.

1.3　排列与对换

在中学里，对于排列，主要是讨论排列数. 本节重点讨论全排列的一些性质以及排列之间的相互关系，它与行列式的讨论有着直接的联系.

排列中的元素是有序的.从"序"的意义上说,元素代表什么并不重要,因此一个排列可以简化为由它的序号给出.

定义 1 由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 作成的排列,称为一个 n 级排列.

n 级排列常记为 $i_1i_2\cdots i_n$,其中 i_k 表示 $1,2,\cdots,n$ 中的某一个数码,下标 k 表示排列中的位置($k=1,2,\cdots,n$).

如 312 是一个 3 级排列,1342 是一个 4 级排列.由定义,一个 n 级排列是 n 个数码构成的全排列,因而所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

在 n 级排列中,排列 $1\ 2\cdots n$ 是按自然数的大小顺序排定的,称为自然排列.除自然排列外,在任一个 n 级排列中,总有较大的数码排在较小数码的前面,此时称这两个数码构成一个逆序.排列中逆序的总数称该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.自然排列中没有逆序,因而其逆序数为 0.当 n 较大时,求排列的逆序数可从数码 1 开始,1 前面有几个数码,则它们分别都跟 1 构成逆序.划去 1,再看 2 前面有几个数码,它们分别都跟 2 构成逆序,再划去 2,依此顺序计算,最后累加可求出该排列的逆序数.仿此,亦可从最大的数码开始来求排列的逆序数.例如,按从 1 开始算:

$$\tau(4\ 6\ 7\ 1\ 5\ 2\ 3)=3+4+4+0+2+0=13.$$

或者从最大的数码 7 开始算:

$$\tau(4\ 6\ 7\ 1\ 5\ 2\ 3)=4+4+2+3+0+0+0=13.$$

n 级排列中,以 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数最大,$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

n 级排列的逆序数不为奇数便为偶数,因此按其逆序数的奇偶性可将全体 n 级排列分成两类.

定义 2 逆序数为偶数的排列称偶排列,逆序数为奇数的排列称奇排列.

在一个 n 级排列中,如果交换两个数码 i 和 j 的位置,其余数码不动,便得到一个新的排列,对排列施行的这种变换称为一个对换,记为(i,j).

定理 1.3.1 任一个 n 级排列都可经一系列对换与 n 级自然排列互变.

证 对 n 采用归纳法.

当 $n=2$ 时,定理成立.

设对 $n-1$ 级排列定理成立.对 n 级排列,1)若 n 是排在最末的数码,则由归纳假设,n 前面的 $n-1$ 个数码可经一系列对换化成 $n-1$ 级自然排列,因而在这一系列对换下,原 n 级排列变为 n 级自然排列.2)若 n 不是排在最末位,则将该最末位置的数码与 n 对换,化为情形 1).当施行的对换顺序逆转后,n 级自然排列也就变成了原 n 级排列.

推论　任何两个 n 级排列都可经一系列对换互变.

施行对换后,原排列与新排列的奇偶性是否会发生变化？我们有如下定理:

定理 1.3.2　每次对换都改变排列的奇偶性.

证　1)被对换的是两个相邻的数码. 设排列为 $\cdots ij\cdots$,　(1)

不妨设 $i<j$,(1)施行对换 (i,j) 后变为 $\cdots ji\cdots$,　(2)

其中,"$\cdots$"中所含的数码不变. 对于 i、j,排列(1)中的其余某些数码若分别与 i 或 j 构成逆序,则在排列(2)中依然构成. 但排列(2)中 i、j 构成逆序,排列(2)的逆序数比排列(1)的逆序数多1,因而排列(1)与排列(2)的奇偶性相反.

2)被对换的是两个不相邻的数码. 设排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots, \tag{3}$$

排列(3)中 j 经 $s+1$ 次相邻数码的对换后化为

$$\cdots jik_1k_2\cdots k_s\cdots, \tag{4}$$

排列(4)中 i 经 s 次相邻数码的对换后化为

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots . \tag{5}$$

即排列(5)是由排列(3)共经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换而得到的. 而 $2s+1$ 是奇数,由1)知,排列(3)与排列(5)的奇偶性相反.

推论 1　在所有 n 级排列中,奇排列的个数与偶排列的个数相等,各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证　设所有的 n 级排列中,共有 p 个奇排列,q 个偶排列. 对这 p 个奇排列都施行同一对换 (i,j),得 p 个不同的偶排列. 显然 $p\leqslant q$. 同法有 $q\leqslant p$,故 $p=q$.

推论 2　奇(偶)排列变成自然排列的对换次数为奇(偶)数.

由定理1.3.2,显然得证.

习　题

1. 求下列排列的逆序数:

(1) 4 8 2 1 7 5 3 6;

(2) 5 2 3 1 4 6 7 8 9;

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$;

(4) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots642$.

2. 写出所有的3级排列,并指出哪些是奇排列.

3. 在1,2,3,4,5,6,7,8,9组成的下列排列中,选择 i 和 j,使得

(1) 5 8 i 4 1 9 j 7 3 为偶排列；

(2) 6 7 9 i 1 2 5 j 4 为奇排列.

4. 设 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=k$，求 $\tau(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1)$.

*1.4 有理系数多项式的有理根

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ $(a_n \neq 0, a_i \in \mathbf{Q}, i=0,1,2,\cdots,n)$称为有理系数多项式，其中 $a_k x^k$ 称多项式的第 k 次项，a_k 称 k 次项的系数. 称 $a_n x^n$ 为首项，a_0 为常数项. 若 $a_n \neq 0$，称 n 为 $f(x)$的次数.

当 $f(x)$与 $g(x)$同次项的系数相等时，称 $f(x)$与 $g(x)$相等，记为 $f(x)=g(x)$.

若有 $b \in \mathbf{Q}$，使 $f(b)=0$，则称 b 是 $f(x)$的一个有理根，此时 $f(x)$含 $x-b$ 的因式，即 $f(x)=(x-b)f_1(x)$，其中 $f_1(x)$是 $n-1$ 次有理系数多项式. 若将 $f(x)$各项系数的分母的最小公倍数 k 乘 $f(x)$，显然 $f(x)$与 $kf(x)$含相同的有理根，而 $kf(x)$的各项系数为整数. 于是讨论有理系数多项式的有理根可转化为讨论整系数多项式的有理根.

整系数多项式不一定有有理根，最简单的例子如 $f(x)=x^2+1$. 下面给出整系数多项式的有理根的必要而非充分条件.

定理 1.4.1 设 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$，$a_i \in \mathbf{Z}(i=0,1,2\cdots,n)$，若有理数$\frac{v}{u}$是 $f(x)$的一个根，$u,v \in \mathbf{Z}$ 且 u,v 互素，即它们的最大公因数$(u,v)=1$，那么：

(1) u 是 a_n 的因数，v 是 a_0 的因数；

(2) $f(x)=(x-\frac{v}{u})q(x)$，$q(x)$为一个整系数多项式.

证 由$\frac{v}{u}$是 $f(x)$的根，有 $f(x)=(x-\frac{v}{u})q(x)$，$q(x)$为有理系数多项式. 由 $x-\frac{v}{u}=\frac{1}{u}(ux-v)$，而 $q(x)$可表为

$$q(x)=\frac{b}{a}f_1(x),$$

其中$(a,b)=1$，$f_1(x)$是系数为整数且没有大于 1 的最大公因数的 $n-1$ 次多项式. 于是

$$f(x)=\frac{r}{s}(ux-v)f_1(x).$$

其中$(s,r)=1$. 由$(u,v)=1$及$f_1(x)$的系数不含大于1的公因数，而$f(x)$为整系数多项式，那么$s=1$. 上式中，令$q_1(x)=rf_1(x)$，则$q_1(x)$可表为

$$q_1(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

这样$f(x)=(ux-v)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)$. 比较两边的系数有$a_n=ub_{n-1}$，$a_0=-vb_0$，即$u$是$a_n$的因数，$v$是$a_0$的因数，而$f(x)=(x-\frac{v}{u})q(x)$，其中$q(x)=uq_1(x)$为整系数多项式.

设a_0的因数是$v_1,v_2,\cdots,v_t$；a_n的因数是$u_1,u_2,\cdots,u_k$，那么$f(x)$可能的有理根仅为$\frac{v_i}{u_j}$. 而$\frac{v_i}{u_j}$是否是$f(x)$的根，可由综合除法加以验证. 但当t,k较大时，验根甚为麻烦，为此，需先将不是$f(x)$的有理根剔除.

由于$1,-1\in\left\{\frac{v_i}{u_j}\right\}$，若$f(1)\neq0$，$f(-1)\neq0$，而$\alpha$是$f(x)$的有理根，那么，$f(x)=(x-\alpha)q(x)$，$q(x)$是整系数多项式. 因此$q(1)$，$q(-1)$都应为整数. 由$q(1)=\frac{f(1)}{1-\alpha}$，$-q(-1)=\frac{f(-1)}{1+\alpha}$知，若$\alpha$在这两个式子中不使$q(1)$或$q(-1)$为整数，则$\alpha$不可能是$f(x)$的有理根.

为了给出验根的“综合除法”，设整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

且令

$$f(x)=(x-c)q(x)+r\quad(r\text{ 为常数}).\tag{1}$$

设(1)中商式

$$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

代入(1)，整理后比较两边的系数有

$$\begin{aligned}&a_n=b_{n-1}, && b_{n-1}=a_n,\\ &a_{n-1}=b_{n-2}-cb_{n-1}, && b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1},\\ &\cdots\cdots \qquad\text{或} && \cdots\cdots\\ &a_1=b_0-cb_1, && b_0=a_1+cb_1,\\ &a_0=r-cb_0. && r=a_0+cb_0.\end{aligned}$$

综合起来可列成下表

$$\begin{array}{r|ccccc} c & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0\\ (+) & & cb_{n-1} & \cdots & cb_1 & cb_0\\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & r\end{array}$$

表中的中间一行由心算可得，故可省略. 若$r=0$，知c是$f(x)$的根.

例 求多项式 $f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$ 的有理根.

解 3 的因数为 ±1、±3；-2 的因数为 ±1、±2，故 $f(x)$ 所有可能的有理根是 ±1、±2、$\pm\frac{1}{3}$、$\pm\frac{2}{3}$. 由 $f(1)=12$，$f(-1)=-8$，可验证 2、$\pm\frac{2}{3}$ 不是 $f(x)$ 的根. 用综合除法：

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 3 & 5 & 1 & 5 & -2 \\
\frac{1}{3} & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 \\
\hline
 & 3 & 0 & 3 & 0 &
\end{array}
$$

由此可知，$f(x)$ 的有理根是 -2 和 $\frac{1}{3}$，而 $f(x)=(x+2)(3x-1)(x^2+1)$.

习　题

求下列多项式的有理根：

1. $x^3-6x^2+15x-14$；
2. $4x^4-7x^2-5x-1$；
3. x^3-2x^2-4x+8；
4. $x^5-x^4-\frac{5}{2}x^3+2x^2-\frac{1}{2}x-3$.

本章小结

本章简单介绍了集合与映射及其相关概念，讨论了对四则运算封闭的数集，即数域，以及在有理数域的基础上如何构造数域. 讨论了排列、对换及其相关性质. 最后介绍了求有理系数多项式的有理根的方法——综合除法.

本章的重点是数域、排列和对换. 本书所研究的问题均是在数域上进行讨论的，排列与对换则是后面建立行列式定义、研究行列式性质的基础.

本章的学习要求是：理解集合、映射和数域的定义，熟练掌握排列逆序数的求法，熟悉排列与对换的有关定理，会用综合除法求有理系数多项式的有理根.

第二章　n 阶行列式

行列式起源于对线性方程组的研究. 18 世纪,柯西最先引进行列式这一名词. 行列式是讨论线性代数的重要工具之一,在后面各章中,基本上都涉及到行列式的理论和计算. 此外,它在解析几何、数学分析、微分方程等诸多学科中均有广泛的应用.

本章的重点是 n 阶行列式的计算.

2.1　n 阶行列式的定义

n 阶行列式是在二、三阶行列式的基础上加以定义的. 考察系数在某一数域 F 上的二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, & (2) \end{cases}$$

将(1) $\times a_{22}$ $-$ (2) $\times a_{12}$,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,$x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

将 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称 D 为一个二阶行列式. 显然 x_1 的分子可记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

则有

$$x_1 = \frac{D_1}{D}.$$

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当逐步消去 x_3,x_2 后,可得 $ax_1 = b$,其中