应用数学与計算数学学報

COMMUNICATION ON APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION

第四卷 Vol.1　　第一期 No.1

1990

《应用数学与计算数学学报》编委会编辑　　上海科学技术出版社出版

应用[illegible]计算数学学报

第 4 卷　第 1 期

目　　录

研　究　简　报

第4卷 第1期 1990年4月 | 应用数学与计算数学学报 COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT. | Vol.4 No.1 April, 1990

实反对称矩阵及其 QL 算法

查 宏 远
(复 旦 大 学)

Real Skew-Symmetric Matrix and its QL Algorithms

Zha Hongyuan
(Fudan University)

Abstract

In this paper we systematically analyze the numerical methods for the solution of eigenproblems of real skew-symmetric matrices. We also discuss some properties of ISST, and give some numerical algorithms for solving two kinds of its inverse problem.

§1. 引 言

无阻尼陀螺系统的频率及模态分析可化为实反对称矩阵特征值及特征向量的求解. 在[1]中, L.Heirovitch 提出了一种求解方法, 但由于作者数值线性代数方面的技巧使用较少,因而算法中存在下面两个问题:

1) [1]中是基于化为对称矩阵的方法来求解的,用到了原矩阵的平方, 这样原来问题的条件数有可能变坏.

2) [1]中没有充分利用反对称矩阵的性质,因而所得的算法的计算量相对来讲比较大.

本文从数值线性代数的观点出发,充分利用矩阵的反对称性,给出计算量少, 数值稳定的算法;且给出了算法的收敛性分析.

本文所讨论的矩阵如无特殊说明都为实

§2. 约化反对称矩阵为反对称三对角形

这一部分的内容同对称矩阵的情形平行,故在此不详述.同样对于带宽反对称矩阵也可用 Shwarz 的保带宽算法. 这一方面的内容可参见[illegible].

本文 1986 年 11 月 10 日收到.

对于大型稀疏的反对称矩阵，可用反对称 Lanczos 方法化为三对角形. 关于算法的浮点误差分析，收敛性分析及正交性失去的机制分析我们将另文详细讨论.

§3. 不可约反对称三对角矩阵的性质

定义 3.1 反对称三对角矩阵

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 & & & \\ \beta_1 & 0 & -\beta_2 & & \\ & \beta_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & -\beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

称为不可约的，如果 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}\neq 0$, 并记为 ISST.

注 在以往文献中，对称三对角矩阵都用 T 来表示，由于反对称三对角矩阵是非对称的，因而我们选用与 T 相近的非对称字母 J 来表示.

对于 ISST，我们有如下唯一规化定理，这是我们在§5 中分析双重步QL 算法的基础.

定理 3.1 对于 n 阶反对称矩阵 C, 如果有正交矩阵 Q 使得 $Q^TCQ=J$ 为 ISST, 则 Q 及 J 由 Q 的第一列及 C 唯一确定(或 Q 的第 n 列及 C 唯一确定).

证明从略.

为确定起见，下面令 $n=2k$, 容易验证：

$$J^2=\begin{pmatrix} -\beta_1^2 & 0 & \beta_1\beta_2 & & & & \\ & -(\beta_1^2+\beta_2^2) & 0 & \beta_2\beta_3 & & & \\ & & -(\beta_2^2+\beta_3^2) & 0 & \beta_3\beta_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{对称} & & & 0 & \beta_{2k-2}\beta_{2k-1} & \\ & & & & & -(\beta_{2k-2}^2+\beta_{2k-1}^2) & 0 \\ & & & & & 0 & -\beta_{2k-1}^2 \end{pmatrix}$$

这是一个有五条对角线的带状矩阵，下面我们将对 J^2 的性质进行讨论，从而得 J 的特征值及特征向量的性质.

由于 J 为偶数阶 ISST, 因而我们可设 J 的特征值为：

$\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2,\cdots,\pm i\lambda_k$, 其中 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k$.

再引进两个矩阵：

$$T_1=\begin{pmatrix} -\beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & & \\ & -(\beta_2^2+\beta^2) & \beta_3\beta_4 & \\ & & \ddots & \ddots \\ \text{对称} & & -(\beta_{2k-4}^2+\beta_{2k-3}^2) & \beta_{2k-3}\beta_{2k-2} \\ & & & -(\beta_{2k-2}^2+\beta_{2k-1}^2) \end{pmatrix},$$

$$T_2=\begin{pmatrix} -(\beta_1^2+\beta_2^2) & \beta_2\beta_3 & & & \\ & -(\beta_3^2+\beta_4^2) & \beta_4\beta_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \text{对称} & & & -(\beta_{2k-3}^2+\beta_{2k-2}^2) & \beta_{2k-2}\beta_{2k-1} \\ & & & & -\beta_{2k-1}^2 \end{pmatrix},$$

$T_i(i=1,2)$ 为不可约对称三对角矩阵.

令 $P=[e_1,e_3,\cdots,e_{2k-1},e_2,e_4,\cdots,e_{2k}]$ 其中 $[e_1,e_2,\cdots,e_{2k}]$ 为 $2k$ 阶单位矩阵，则有：

引理 3.1　$J^2=P\mathrm{diag}\{T_1,T_2\}P^T$.

定理 3.2　设 $J=Z\wedge Z^T$，其中 $Z=[Z_1^{(1)},Z_1^{(2)},\cdots,Z_i^{(1)},Z_i^{(2)},\cdots,Z_k^{(1)},Z_k^{(2)}]$，

$$\wedge=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0\end{bmatrix}\right\},$$

则有如下结论：

1）$T_j(j=1,2)$ 的特征值为 $\{-\lambda_i^2\}$　$(i=1,2,\cdots,k)$；

2）设 $T_1x_i=-\lambda_i^2x_i$，$\|x_i\|_2=1$，$T_2y_i=-\lambda_i^2y_i$，$\|y_i\|_2=1$，$(i=1,2,\cdots,k)$，则存在 $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi(i=1,2,\cdots,k)$ 使得

$$[Z_i^{(1)},Z_i^{(2)}]=[\tilde{x}_i,\tilde{y}_i]\begin{bmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \mp\sin\theta_i & \pm\cos\theta_i\end{bmatrix},$$

其中 $x_i=[x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ki}]^T$，$y_i=[y_{1i},y_{2i},\cdots,y_{ki}]^T$，

$\tilde{x}_i=[x_{1i},0,x_{2i},0,\cdots,0,x_{ki},0]^T$，$\tilde{y}_i=[0,y_{1i},0,y_{2i},\cdots,y_{k-1,i},0,y_{ki}]^T$.

证明　1）J^2 的特征值为 $-\lambda_1^2,-\lambda_1^2,-\lambda_2^2,-\lambda_2^2,\cdots,-\lambda_k^2,-\lambda_k^2$，设 J^2 对应于 $-\lambda_i^2$ 的特征向量为 $P_i=[\xi_{1i},\eta_{1i},\cdots,\xi_{ki},\eta_{ki}]^T$. 我们证明必有某个特征向量 P_i 使得 $\xi=[\xi_{1i},\cdots,\xi_{ki}]^T\neq0$，否则对于任意 $-\lambda_i^2$ 的特征向量 P_i 具有上述分量形式，且总有 $\xi=0$. 由 $J^2P_i=-\lambda_i^2P_i$ 及引理 3.1 容易验证，

$$T_1\xi=-\lambda_i^2\xi,\qquad T_2\eta=-\lambda_i^2\eta,$$

由 $\eta=[\eta_{1i},\cdots,\eta_{ki}]^T\neq0$，知 η 为 T_2 对应于 $-\lambda_i^2$ 的特征向量，又因为 T_2 的特征值互不相同，故 T_2 对应于 $-\lambda_i^2$ 的特征子空间为一维的，从而 J^2 对应于 $-\lambda_i^2$ 的特征子空间也为一维的. 但这与 J^2 有两重根 $-\lambda_i^2$ 矛盾，故存在 P_i，使得 $\xi\neq0$；同理可证存在 P_i，使得 $\eta\neq0$，因而 $T_j(j=1,2)$ 的特征值为 $\{-\lambda_i^2\}$　$i=1,2,\cdots,k$.

2）容易验证：$J^2\tilde{x}_i=-\lambda_i^2\tilde{x}_i$；$J^2\tilde{y}_i=-\lambda_i^2\tilde{y}_i$，

设 $\tilde{Z}=[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k]$，则 $\tilde{Z}$ 为正交阵，且有：

$$\begin{aligned} J^2&=[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k]\mathrm{diag}\{-\lambda_1^2,-\lambda_1^2,\cdots,-\lambda_k^2,-\lambda_k^2\}\cdot[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k] \\ &=\tilde{Z}\mathrm{diag}\{-\lambda_1^2,-\lambda_1^2,\cdots,-\lambda_k^2,-\lambda_k^2\}\tilde{Z}^T. \end{aligned}$$

又由 $J=Z\wedge Z^T$，因而 $J^2=Z\wedge^2Z^T=Z\mathrm{diag}\{-\lambda_1^2,-\lambda_1^2,\cdots,-\lambda_k^2,-\lambda_k^2\}Z^T$.

比较可得

$$\tilde{Z}^TZ=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \mp\sin\theta_1 & \pm\cos\theta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\cos\theta_k & \sin\theta_k \\ \mp\sin\theta_k & \pm\cos\theta_k\end{bmatrix}\right\}.$$

证毕.

推论 3.1　$J=[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k]\wedge[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k]^T$.

下面我们给出 J 的主子式与 $T_i(j=1,2)$ 的主子式之间的关系，这在反对称 Lanczos 算法分析正交性失去的机制中是十分有用的.

定理 3.3　设 $J^{(i)},i=1,2,\cdots,2k;T_1^{(i)},T_2^{(i)},i=1,2,\cdots,k$ 分别为 J,T_1 和 T_2 中取出前 i 行前 i 列组成的 i 阶矩阵. 又令 $q_i^{(1)}(\lambda)=\det(\lambda I-T_1^{(i)})$, $q_i^{(2)}(\lambda)=\det(\lambda I-T_2^{(i)})$, $P_i(\lambda)=\det(\lambda I-J^{(i)})$. 则有如下关系式：

1) $P_{2i}(\lambda)=q_i^{(1)}(\lambda^2)\qquad(i=1,2,\cdots,k)$;

2) $P_{2i+1}(\lambda)=\lambda q_i^{(2)}(\lambda^2)\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$,

而 $P_{2k}(\lambda)=q_k^{(2)}(\lambda^2)$.

证明　1) 用数学归纳法，当 $i=1$ 时，

$$P_2(\lambda)=\det(\lambda I-J^{(2)})=\det\begin{pmatrix}\lambda & \beta_1\\ -\beta_1 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+\beta_1^2,$$

$$q_1^{(1)}(\lambda^2)=\det(\lambda^2 I-T_1^{(1)})=\lambda^2+\beta_1^2.$$

设当小于或等于 i 时结论成立，考察 $i+1$ 时：

$$q_{i+1}^{(1)}(\lambda)=(\lambda+\beta_{2i}^2+\beta_{2i+1}^2)q_i^{(1)}(\lambda)-\beta_{2i}^2\beta_{2i-1}^2q_{i-1}^{(1)}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}p_{2(i+1)}(\lambda)&=\lambda(\lambda p_{2i}(\lambda)+\beta_{2i}^2p_{2i-1}(\lambda))+\beta_{2i+1}^2p_{2i}(\lambda)\\&=(\lambda^2+\beta_{2i}^2+\beta_{2i+1}^2)p_{2i}(\lambda)-\beta_{2i}^2(p_{2i}(\lambda)-\lambda p_{2i-1}(\lambda))\\&=(\lambda^2+\beta_{2i}^2+\beta_{2i+1}^2)q_i^{(1)}(\lambda^2)-\beta_{2i}^2\beta_{2i-1}^2q_{i-1}^{(1)}(\lambda^2)\\&=q_{i+1}^{(1)}(\lambda^2);\end{aligned}$$

2) 当 $i=1$ 时，

$$p_3(\lambda)=\det(\lambda I-J^{(3)})=\lambda(\lambda^2+\beta_1^2+\beta_2^2),$$

$$\lambda q_1^{(2)}(\lambda^2)=\lambda\det(\lambda I-T_2^{(1)})=\lambda(\lambda^2+\beta_1^2+\beta_2^2),$$

设当小于或等于 i 时结论成立，考察 $i+1$ 时：

$$q_i^{(2)}(\lambda)=(\lambda+\beta_{2i-1}^2+\beta_{2i}^2)q_{i-1}^2(\lambda)-\beta_{2i-2}^2\beta_{2i-1}^2q_{i-2}^{(2)}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}p_{2i+1}(\lambda)&=\lambda p_{2i}(\lambda)+\beta_{2i}^2p_{2i-1}(\lambda)\\&=\lambda(\lambda p_{2i-1}(\lambda)+\beta_{2i-1}^2p_{2i-2}(\lambda))+\beta_{2i}^2p_{2i-1}(\lambda)\\&=(\lambda^2+\beta_{2i-1}^2+\beta_{2i}^2)p_{2i-1}(\lambda)-\beta_{2i-2}^2\beta_{2i-1}^2p_{2i-3}(\lambda)\\&=\lambda[(\lambda^2+\beta_{2i-1}^2+\beta_{2i}^2)q_{i-1}^{(2)}(\lambda^2)-\beta_{2i-2}^2\beta_{2i-1}^2q_{i-2}^{(2)}(\lambda^2)]\\&=\lambda q_i^{(2)}(\lambda^2),\end{aligned}$$

又 T_2 的特征值为 $-\lambda_i^2(i=1,2,\cdots,k)$, J 的特征值为 $\pm i\lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$，因而有

$$p_{2k}(\lambda)=q_k^{(2)}(\lambda^2).$$

证毕.

§4. ISST 反问题及其数值算法

作为 §3. ISST 性质的应用，我们考察下面两类反问题解的存在唯一性及其数值算法.

为确定起见，我们仍设 J 为偶数阶 ISST，不妨设 $2k$ 阶的，其有 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2k-1}$ 共 $2k-1$ 个未定元. J 的全部特征值可表为 $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$, $\cdots$, $\pm i\lambda_k$，且 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k$.

共有 k 个已知量(条件). J 的第 $2k-1$ 个反序主子阵的全部特征值可记为 $0,\pm i\sigma_1,\pm i\sigma_2,\cdots,\pm i\sigma_{k-1}$, $0<\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_{k-1}$, 共有 $k-1$ 个已知量(条件), 因而我们可提下面两个反问题:

(Ⅰ) 已知 J 以及 J 的第 $2k-1$ 个反序主子阵的全部特征值,求出 J.

(Ⅱ) 已知 J 的全部特征值,又已知 $\beta_i=\beta_{2k-i}>0$, 求出 J. 设

$$J_{s,2k}=\begin{pmatrix} 0 & -\beta_s & & & \\ \beta_s & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & -\beta_{2k-1} \\ & & & \beta_{2k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_s(\lambda)=\det(\lambda I-J_{s,2k}).$$

首先我们有如下唯一性定理:

定理 4.1　设 J 中 $\beta_i>0(i=1,2,\cdots,2k-1)$, 则 J 由 J 的特征值及 $J_{2,2k}$ 的特征值唯一确定.

证明　设有 J 及 $\hat{J}$ 同时满足条件,亦即 J 与 $\hat{J}$, $J_{2,2k}$ 与 $\hat{J}_{2,2k}$ 的特征值相同,又记

$$\hat{P}_s(\lambda)=\det(\lambda I-\hat{J}_{s,2k}).$$

因为 $P_s(\lambda)$ 及 $\hat{P}_s(\lambda)$ 皆为首一多项式,具有如下关系式

$$\begin{aligned} &p_1(\lambda)=\lambda p_2(\lambda)+\beta_1^2 p_3(\lambda), \\ &p_i(\lambda)=\lambda p_{i+1}(\lambda)+\beta_i^2 p_{i+2}(\lambda) \end{aligned} \qquad (i=2,\cdots,2k-1);$$

同样有

$$\begin{aligned} &\hat{p}_1(\lambda)=\lambda\hat{p}_2(\lambda)+\hat{\beta}_1^2\hat{p}_3(\lambda), \\ &\hat{p}_i(\lambda)=\lambda\hat{p}_{i+1}(\lambda)+\hat{\beta}_i^2\hat{p}_{i+2}(\lambda), \end{aligned} \qquad (i=2,\cdots,2k-1).$$

又由条件可得:

$$p_1(\lambda)=\hat{p}_1(\lambda),\quad p_2(\lambda)=\hat{p}_2(\lambda).$$

因而有

$$\beta_1^2 p_3(\lambda)=\hat{\beta}_1^2\hat{p}_3(\lambda).$$

又 $p_3(\lambda)$, $\hat{p}_3(\lambda)$ 为首一多项式且 $\beta_1>0,\hat{\beta}_1>0$, 所以有 $\beta_1=\hat{\beta}_1$, $p_3(\lambda)=\hat{p}_3(\lambda)$. 依次递推可得 $\beta_2=\hat{\beta}_2,\cdots,\beta_{2k-1}=\hat{\beta}_{2k-1}$.

证毕.

定理 4.2　中心对称的 ISST 的 J 由 J 的特征值唯一确定.

证明　设 J 的特征值为 $\pm i\lambda_j$, $j=1,2,\cdots,k$, $0\leqslant\lambda_1<\cdots<\lambda_k$. 如果 $\hat{J}$ 也具有特征值 $\pm i\lambda_j$, 则存在正交阵 $Z,\hat{Z}$ 使得:

$$J=Z\wedge Z^T,\quad \hat{J}=\hat{Z}\wedge\hat{Z}^T,$$

其中,

$$\wedge=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

由定理 3.1 我们知道 $J(\hat{J})$ 由 $Z(\hat{Z})$ 的第一行及 $\wedge$ 唯一确定.在下面的算法中,我们可以得到 $Z(\hat{Z})$ 的第一行由 $\wedge$ 唯一确定,因而 $J=\hat{J}$.

证毕

下面我们给出(Ⅰ)、(Ⅱ)数值稳定的算法. 使用 §3 中记号,由推论 3.1 我们可设:

$$J=[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k]\wedge[\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{x}_k,\tilde{y}_k]^T=Z\wedge Z^T,$$

为统一起见又记 $Z=[Z_1^{(1)},Z_1^{(2)},\cdots,Z_k^{(1)},Z_k^{(2)}]$.

我们首先给出 Thompson-McEnteggert 定理(参见[2])在反对称情形的一个变形.

引理 4.1 设 $\mathrm{adj}(\lambda I-J)$ 为 $\lambda I-J$ 的伴随阵,则有:

$$\mathrm{adj}(i\lambda_j I-J)=[Z_j^{(1)},Z_j^{(2)}]\left(\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{k}(\lambda_s^2-\lambda_j^2)\begin{bmatrix} i\lambda_j & \lambda_j \\ \lambda_j & i\lambda_j\end{bmatrix}\right)[Z_j^{(1)},Z_j^{(2)}]^T. \quad (*)$$

证明 由 $J=Z\wedge Z^T$ 及

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}(\mu I-J)&=\det(\mu I-J)(\mu I-J)^{-1}\\&=Z\,\mathrm{diag}\left\{\frac{\det(\mu I-J)}{\mu^2+\lambda_1^2}\begin{bmatrix}\mu & -\lambda_1\\ -\lambda_1 & \mu\end{bmatrix},\cdots,\frac{\det(\mu I-J)}{\mu^2+\lambda_k^2}\begin{bmatrix}\mu & -\lambda_1\\ -\lambda_1 & \mu\end{bmatrix}\right\}Z^T\end{aligned}$$

令 $\mu=i\lambda_j$, 有

$$\mathrm{adj}(i\lambda_j I-J)=Z\mathrm{diag}\left\{0,\cdots,0,\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{k}(\lambda_s^2-\lambda_j^2)\begin{bmatrix} i\lambda_j & \lambda_i\\ \lambda_i & i\lambda_j\end{bmatrix}0,\cdots,0\right\}Z^T.$$

证毕.

考察 (*) 式中两边矩阵的 (1,1) 元素可得:

$$i\lambda_j\prod_{s=1}^{k-1}(\sigma_s^2-\lambda_j^2)=\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{k}(\lambda_s^2-\lambda_j^2)(i\lambda_j Z_{j1}^{(1)}Z_{j1}^{(1)}+i\lambda_j Z_{j1}^{(2)}Z_{j1}^{(2)}),$$

其中 $Z_{j1}^{(1)},Z_{j1}^{(2)}$ 分别为 $Z_j^{(1)},Z_j^{(2)}$ 的第一个分量, 但由 $Z_j^{(1)}=\tilde{x}_j$, $Z_j^{(2)}=\tilde{y}_j$, 因而 $Z_{j1}^{(1)}=x_{1j}$, $Z_{j1}^{(2)}=0$. 代入上式可得:

$$x_{1j}^2=\prod_{s=1}^{k-1}(\sigma_s^2-\lambda_j^2)\Big/\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{k}(\lambda_s^2-\lambda_j^2)\quad(j=1,2,\cdots,k).$$

对于(Ⅱ), 考察 (*) 式两边矩阵的 $(1,2k)$ 元素可得:

$$\begin{aligned}\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2k-1}=\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{k}(\lambda_s^2-\lambda_j^2)[&i\lambda_j(Z_{j2k}^{(1)}Z_{j1}^{(1)}+Z_{j2k}^{(2)}Z_{j1}^{(2)})\\&+\lambda_j(-Z_{j2k}^{(2)}Z_{j1}^{(1)}+Z_{j2k}^{(1)}Z_{j1}^{(2)})],\end{aligned}$$

其中 $Z_{j2k}^{(1)}$, $Z_{j2k}^{(2)}$ 分别为 $Z_j^{(1)}$, $Z_j^{(2)}$ 的第 $2k$ 个分量.

令 $\tilde{I}_{2k}=[e_{2k},e_{2k-1},\cdots,e_2,e_1]$, 容易验证:

$$J=-\tilde{I}_{2k}J\tilde{I}_{2k},$$

又由

$$JZ_j^{(1)}=-\lambda_j Z_j^{(2)},\quad JZ_j^{(2)}=\lambda_j Z_j^{(1)};$$

$$J\tilde{I}_{2k}Z_j^{(1)}=\lambda_j I_{2k}Z_j^{(2)},\ J\tilde{I}_{2k}Z_j^{(2)}=-\lambda_j\tilde{I}_{2k}Z_j^{(1)},$$

可得:

$$\tilde{I}_{2k}Z_j^{(1)},\ \tilde{I}_{2k}Z_j^{(2)}\in\mathrm{Span}[Z_j^{(1)},Z_j^{(2)}].$$

因而可令:

$$\tilde{I}_{2k} Z_j^{(1)} = k_1 Z_j^{(1)} + k_2 Z_j^{(2)}, \quad k_1^2 + k_2^2 = 1;$$

$$\tilde{I}_{2k} Z_j^{(2)} = l_1 Z_j^{(1)} + l_2 Z_j^{(2)}, \quad l_1^2 + l_2^2 = 1.$$

代入上面两个等式中可得$k_1 = -l_2, k_2 = -l_1$. 又因$Z_{j1}^{(2)} = 0, Z_{j2k}^{(1)} = 0$, 由$Z_{j2k}^{(1)} = -l_2 Z_{j1}^{(1)} + l_1 Z_{j1}^{(2)}$, 可得 $l_2 = 0$. 因而 $Z_{j2k}^{(2)} = l_1 Z_{j1}^{(1)} + l_2 Z_{j1}^{(2)} = l_1 x_{1j} = \varepsilon_j x_{1j}$, $\varepsilon_j = \pm 1$;

$$x_{1j}^2 = \varepsilon_j \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{2k-1}}{\lambda_j \prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{k} (\lambda_s^2 - \lambda_j^2)}, \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

又由 $\sum\limits_{j=1}^{k} x_{1j}^2 = 1$　可得:

$$\beta_1 \cdots \beta_{2k-1} = \left[\sum \left(\lambda_j \varepsilon_j \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{k} (\lambda_s^2 - \lambda_j^2) \right)^{-1} \right]^{-1}.$$

因而 x_{1j} 可由 J 的特征值唯一确定.

注　如果 $\lambda_1 = 0$, 则我们可利用上面的公式先求出 $x_{12}, \cdots, x_{1k}$ 然后由

$$x_{11}^2 = 1 - \sum_{j=2}^{k} x_{1j}^2$$

来求 x_{n}. 但 J 已非 ISST了. 由 Z 的第一行$[x_{11}, 0, x_{12}, 0, \cdots, 0, x_{1k}, 0]$ 的特殊形式, 形成 Λ 与 Lanczos 向量的乘积需 k 次乘法, 且每个 Lanczos向量有 k 个零元及与其相交错的 k 个可能不为零的元, 因而我们实际上是进行的 k 阶 Lanczos 运算. 其详细过程请参见 [2].

§5. 反对称三对角矩阵的 QL 算法

1. 单重步 QL 算法

经过 Householder 变换, Givens 变换或 Lanczos 过程, 我们得到了一个反对称三对角矩阵, 根据其次对角元是否为零可将其分解为一组 ISST. 下面我们证明奇数阶 ISST 问题经过一步不带位移的 QL 过程, 可化为偶数阶的 ISST 问题.

设 σ 为实数, $J - \sigma I = QL$, 其中 Q 为正交阵, L 为对角元非负的下三角矩阵. 又令

$$\hat{J} = LQ + \sigma I = Q^T J Q,$$

记 $\hat{J}$ 为:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\beta}_1 & & & \\ \hat{\beta}_1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & -\hat{\beta}_{2k-1} \\ & & & \hat{\beta}_{2k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

则有如下引理:

引理 5.1　若 J 为 ISST, 则 L 的对角元 $l_{22}, \cdots, l_{nn}$ 全不为零.

引理 5.2　若 J 为 ISST, 则有

$$\hat{\beta}_i = \frac{l_{1i}}{l_{i+1,i+1}} \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

定理 5.1 若 J 为奇数阶 ISST，则经一步 $\sigma=0$ 的 QL 过程，J 可化为 $\hat{J}$，且 $\hat{J}$ 具有下面的形式：

$$\hat{J}=\mathrm{diag}\{0,\ \tilde{J}\},$$

其中 $\tilde{J}$ 为偶数阶 ISST.

证明 0 为 J 的特征值，由引理 5.1，$l_{11}=0$，由引理 5.2，$\hat{\beta}_1=0$，$\hat{\beta}_i=0$，$i=2,\cdots,n-1$.

证毕.

下面的讨论如无特殊说明，则 J 为偶数阶 ISST.

单重步 QL 算法：

设 $\{\sigma_k\}$ 为一列实数，$J_1=J$，$J_k-\sigma_kI=Q_kL_k$，$J_{k+1}=L_kQ_k+\sigma_kI$，$k=1,2,\cdots$. 其中 Q_k 为正交阵，L_k 为对角元非负的下三角阵. 又记：

$$J_k=\begin{pmatrix} 0 & -\beta_1^{(k)} & & & \\ \beta_1^{(k)} & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & -\beta_{n-1}^{(k)} \\ & & & \beta_{n-1}^{(k)} & 0 \end{pmatrix}.$$

下面我们将证明单重步 QL 算法的一些有趣的性质.

定理 5.2 对单重步 QL 算法，有如下结论：

1) $|\beta_1^{(k+1)}|\leqslant|\beta_1^{(k)}|$，$k=1,2,\cdots$；

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_2^{(k)}=0$ 的充分必要条件为：

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k^2((\beta_1^{(k+1)})^2-(\beta_1^{(k)})^2)=0;$$

3) 如果 $\{\beta_2^{(k)}\}$ 收敛于零，则其收敛速度至多为线性收敛速度.

证明 考察 QL 算法的一步过程，将变化后的各量加上"∧"来表示.

$J-\sigma I=QL$，$\hat{J}=LQ+\sigma I=Q^TJQ$.

又令 $Q=[q_1,\cdots,q_n]$，则

$J+\sigma I=-L^TQ^T$，$(J+\sigma I)Q=-L^T$；

$(J+\sigma I)q_1=-l_{11}e_1$，$(J+\sigma I)q_2=-l_{21}e_1-l_{22}e_2$；

$\hat{\beta}_1q_2=Jq_1$，$\hat{\beta}_2q_3=Jq_2+\hat{\beta}_1q_1$；

$-l_{11}e_1=(J+\sigma I)q_1=Jq_1+\sigma q_1=\hat{\beta}_1q_2+\sigma q_1$.

因为 $q_1^Tq_2=0$，故有 $l_{11}^2=\hat{\beta}_1^2+\sigma^2$.

又设 $q_1=[q_{11},q_{21},\cdots,q_{n1}]^T$，比较方程组 $(J+\sigma I)q_1=-l_{11}e_1$ 两边的第一个分量可得：

$$\sigma q_{11}-\beta_1q_{21}=l_{11}.$$

因而

$$l_{11}^2\leqslant(\sigma^2+\beta_1^2)(q_{11}^2+q_{21}^2)\leqslant\sigma^2+\beta_1^2.$$

故可得 $\hat{\beta}_1^2\leqslant\beta_1^2$. 亦即无论位移 $\{\sigma_k\}$ 如何选取，$\{|\beta_1^{(k)}|\}$ 总是单调下降的.

2) 由于 J 没有零特征值，因而可令 $\lim\limits_{k\to\infty}(\beta_1^{(k)})^2=(\tilde{\beta}_1)^2>0$. 又由

$$(J+\sigma I)Jq_1=-l_{11}Je_1,$$
$$\hat{\beta}_1(J+\sigma I)q_2=-l_{11}Je_1,$$
$$\hat{\beta}_1(-l_{21}e_1-l_{22}e_2)=-l_{11}\beta_1e_2,$$

可得 $l_{21}=0$, $l_{22}\hat{\beta}_1=l_{11}\beta_1$.

又因

$$\hat{\beta}_2q_3=Jq_2+\hat{\beta}_1q_1=(J+\sigma I)q_2+\hat{\beta}_1q_1-\sigma q_2$$
$$=-l_{22}e_2+\hat{\beta}_1q_1-\sigma q_2,$$

故

$$l_{22}^2=\hat{\beta}_2^2+\hat{\beta}_1^2+\sigma^2,$$
$$\hat{\beta}_2^2=(\beta_1^2-\hat{\beta}_1^2)+(\beta_1^2-\hat{\beta}_1^2)\frac{\sigma^2}{\hat{\beta}_1^2}.$$

从而得 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_2^{(k)}=0$ 的充要条件为 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k^2((\beta_1^{(k+1)})^2-(\beta_1^{(k)})^2)=0$.

3) 令

$$J_{l,n}=\begin{pmatrix}0 & -\beta l & & & \\ \beta l & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & -\beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & 0\end{pmatrix},$$

用 [2] 中的方法，可得下面的估计式：

$$\hat{\beta}_2^2=\beta_2^2(\beta_1^2+\sigma^2)(\sigma^2+\hat{\beta}_1^2)(\det(J_{4,n}+\sigma I)^2+\cdots+(\beta_3\beta_4\cdots\beta_{n-1})^2)$$
$$\times(\det(J_{3,n}+\sigma I))^2/\det(J+\sigma I)^2\omega_2\quad+0(\beta_2^4),$$

其中 $\omega_2=\det(J_{3,n}+\sigma I)^2+(\det(J_{4,n}+\sigma I)\beta_2)^2+\cdots+(\beta_2\cdots\beta_{n-1})^2$. 由此可得 $\{|\beta_2^{(k)}|\}$ 收敛于零的速度至多为线性的.

证毕.

关于 $\{\beta_1^{(k)}\}$，我们有如下定理

定理 5.3　如果单重步 QL 算法中 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_2^{(k)}=0$，则有 $\{i\beta_1^{(k)}\}$，$\{-i\beta_1^{(k)}\}$ 收敛到 J 的一对共轭特征值.

2. 双重步 QL 算法

我们考察双重步 QL 算法[3]：ISST, J_k 经两步带位移 σ_k, σ_{n+1} 的 QL 过程得到 ISST, J_{k+2}:

$$J_{k+2}=Q_{k+1}^TQ_k^TJ_kQ_kQ_{k+1}=(Q_kQ_{k+1})^TJ_k(Q_kQ_{k+1}).$$

易知

$$(Q_kQ_{k+1})(L_{k+1}L_k)=(J_k-\sigma_kI)(J_k-\sigma_{k+1}I)\equiv M.$$

由定理 3.1 可知 Q_kQ_{k+1} 由其第 n 列唯一确定，但 Q_kQ_{k+1} 是将矩阵 M 化为下三角形，因而 Q_kQ_{k+1} 的第 n 列由 M 的第 n 列唯一确定(相差一个±号). M 的最后一列为：$m_{1n}=\cdots=$

$m_{n-3n}=0$, $m_{n-2,n}=\beta_{n-2}\beta_{n-1}$, $m_{n-1,n}=-\beta_{n-1}(\sigma_{k+1}+\sigma_k)$, $m_{nn}=\sigma_k\sigma_{k+1}-\beta_{n-1}^2$. 如果我们取 σ_k,σ_{k+1} 为一对共轭虚数,则 $m_{n-1,n}=0$. 设$\widetilde{Q}_1$ 是将向量 $[0,\cdots 0,m_{n-2,n},0,m_{n,n}]^T$ 化为 $\alpha_1 e_n$ 的 Givens 变换. 如果我们能用一列 Givens 变换 $\widetilde{Q}_2,\cdots,\widetilde{Q}_{s-1}$ 将 $\widetilde{Q}_1^T J_k\widetilde{Q}_1$ 化为三对角矩阵,且 $\widetilde{Q}_i,(i=2,\cdots,s-1)$ 的第 n 行第 n 列分别为 e_n^T 和 e_n, 则由定理 3.1 可知

$J_{k+2}=\widetilde{Q}_{s-1}^T\cdots\widetilde{Q}_2^T(\widetilde{Q}_1^T J_k\widetilde{Q}_1)\widetilde{Q}_2\cdots\widetilde{Q}_{s-1}$, 这样我们就完成了一步双重步 QL 过程.

容易验证 n 阶 ISST 一步双重步 QL 算法只需 $n-2$ 次 Givens 变换. 因而我们可得一步双重步 QL 算法计算量为:$n-2$ 次开方运算, $7(n-2)$ 次乘法运算, $2(n-2)$ 次除法运算和 $3(n-2)$ 次加减法运算.

下面我们将双重步 QL 算法同对称三对角矩阵的 QL 算法联系起来, 并利用对称三对角矩阵 QL 算法的收敛性定理给出双重步 QL 算法的收敛性定理.

我们可将双重步 QL 算法的一步写成下面的形式:

$(J-\sigma I)(J-\bar{\sigma}I)=QL$, L 对角元非负,

$\hat{J}=Q^TJQ$.

容易验证: $J^2+|\sigma|^2I=QL$, $\hat{J}^2+|\sigma|^2I=LQ$. 由 $J^2+|\sigma|^2I$ 的特殊形式, 我们知道: $Q=Q_{2k-2}Q_{2k-3}\cdots Q_1$, 其中

$$Q_{2k-i-1}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&c_i&&s_i&&\\&&&&1&&&\\&&&-s_i&&c_i&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\2k-i-1\\\\2k-i+1\\\\\\\\\end{array}$$

$c_i^2+s_i^2=1$, $i=1,2,\cdots,2k-2$.

定理 5.4 双重步 QL 算法的一步等价于对 T_1,T_2 两个对称三对角矩阵用位移$|\sigma|^2$的一步 QL 过程.

证明 容易验证

$$J^2+|\sigma|^2I=Q\begin{pmatrix}l_{11}&&&&&\\0&l_{22}&&&&\\l_{31}&0&\ddots&&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\\&&\ddots&0&l_{2k-1,2k-1}&\\&&&l_{2k,2k-2}&0&l_{2k,2k}\end{pmatrix}.$$

又根据 $J^2+|\sigma|^2I=P\mathrm{diag}\{T_1+|\sigma|^2I,T_2+|\sigma|^2I\}P^T$, 容易验证

$$T_1+|\sigma|^2I=Q_1\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{31} & l_{33} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{2k-1\,2k-3} & l_{2k-1\,2k-1}\end{bmatrix}=Q_1L_1;$$

$$T_2+|\sigma|^2I=Q_2\begin{bmatrix} l_{22} & & & \\ l_{42} & l_{44} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{2k,2k-2} & l_{2k,2k}\end{bmatrix}=Q_2L_2,$$

其中 $Q_1=\widetilde{Q}_{2k-3}\widetilde{Q}_{2k-5}\cdots\widetilde{Q}_1$，$Q_2=\widetilde{Q}_{2k-2}\widetilde{Q}_{2k-4}\cdots\widetilde{Q}_2$，

$$\widetilde{Q}_{2k-2i-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c_{2i} & s_{2i} & & \\ & & & -s_{2i} & c_{2i} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ k-i \\ k-i+1, \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\widetilde{Q}_{2k-(2i-1)-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c_{2i-1} & s_{2i-1} & & \\ & & & -s_{2i-1} & c_{2i-1} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ k-i \\ k-i+1, \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

且可验证 $\widetilde{T}_1+|\sigma|^2I=L_1Q_1$，$\widetilde{T}_2+|\sigma|^2I=L_2Q_2$，其中

$$\widehat{T}_1=\begin{pmatrix} -\hat{\beta}_1^2 & \hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 & & & \\ & -(\hat{\beta}_2^2+\hat{\beta}_3^2) & \hat{\beta}_3\hat{\beta}_4 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \text{对称} & & & \ddots & \hat{\beta}_{2k-3}\hat{\beta}_{2k-2} \\ & & & & -(\hat{\beta}_{2k-2}^2+\hat{\beta}_{2k-1}^2)\end{pmatrix},$$

$$\widehat{T}_2=\begin{pmatrix} -(\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2) & \hat{\beta}_2\hat{\beta}_3 & & & \\ & -(\hat{\beta}_3^2+\hat{\beta}_4^2) & \hat{\beta}_4\hat{\beta}_5 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \text{对称} & & \ddots & \hat{\beta}_{2k-2}\hat{\beta}_{2k-1} & \\ & & & & -\hat{\beta}_{2k-1}^2\end{pmatrix}.$$

证毕.

由定理 5.4 及对称三对角矩阵 Wilkinson 位移的收敛性定理我们可得下面的双重步 QL 算法的收敛性定理：

定理 5.5　如果取位移 $\{\sigma_k\}$ 使得

$$|\sigma_k|^2=\frac{1}{2}(\beta_1^{(k)^2}-\beta_2^{(k)^2}-\beta_3^{(k)^2}-\frac{\operatorname{sing}(\beta_1^{(k)^2}-\beta_2^{(k)^2}-\beta_3^{(k)^2})\beta_1^{(k)^4}}{|\beta_1^{(k)^2}-\beta_2^{(k)^2}-\beta_3^{(k)^2}|+\sqrt{(\beta_1^{(k)^2}-\beta_2^{(k)^2}-\beta_3^{(k)^2})^2+\beta_1^{(k)^4}}}.$$

则有 $\lim_{k\to\infty}\beta_n^{(k)}=0$，且收敛速度至少为二次的.

§6. 结 束 语

本文分析了ISST的一些性质，并利用这些性质给出了ISST的两类反问题的数值算法. 最后详细分析了单、双重步QL算法，并给出了收敛性定理. 在这里我们指出，由双重步QL算法同实对称三对角矩阵的QL算法的关系，有关对称三对角矩阵QL算法位移的选取(例如组合式位移)以及特征值按次序收敛性都可应用到ISST上，在此就不详细叙述了.

参 考 文 献

[1] L.Heirovitch, A New Method for Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems, AIAA. J. 12:10(1974).
[2] 蒋尔雄,对称矩阵计算,上海科学技术出版社, 1984.
[3] 曹志浩,矩阵特征值问题,上海科学技术出版社, 1980.

(上接第52页)

[2] 齐铁山,计算微分算子最小特征值的一个数值方法,郑州大学学报,2(1984)
[3] 曹策问,计算最小特征值的幂法及一个应用,河南科学. 1(1986)
[4] 曹璎珞,曹策问,利用中介算子计算最小特征值的上、下界,高等学校计算数学学报,9(1988)
[5] 曹策问,一个多点边值问题的Green函数,郑州大学学报,1(1982)
[6] R. Courant, D. Hilbert 著,钱敏,郭敦仁译,数学物理方法,卷Ⅰ,科学出版社,1958

(上接第88页)

Simultaneous Equations, Loughborough Univ. of Technology. Computer Studies, Techn. Rep, 403 (1987)
[9] A. Ostrowski, Iterative solution of linear Systems of Fnuctional Equations, J. Math. Anal. Appl. 2 (1961) pp 351-369
[10] L. Hayes. A Vectorized Matrix-Vector Maltiply and Overlapping Block Iterative Method. in Supercomputer Applications (R. Numrick, Ed.) Plenum. New York, (1984) pp 91-100
[11] D. J. Evans, Wang Deren and Sun Baoyun, A Parallel Algorithm for a Class of Monlinear Equations Applicable To MIMD Systems. Longhborough Univ. of Technology, Computer Studies, Techn. Rep, 399(1987)

第4卷 第1期
1990年4月

应用数学与计算数学学报
COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT.

Vol.4 No.1
April, 1990

偏微分方程校正过程的改进

吕 涛
(中国科学院成都分院数理室)

Modification of Correction Procedure for Solving Partial Differential Equation

Lu Tao
(*Chengdu Branch, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, a correction procedure with the precision $O(h^4)$ for solving P. D. E. is introduced. The correction procedure not only needs to compute little Work, but also the precision is much higher than uncorrection.

本文给出半线性椭圆型偏微分方程与本征值问题的四阶精度校正方法. 校正过程几乎不增加工作量,校正后精度比未校正有平方型增长.

§1. 半线性问题

在资料[1]中,对如下半线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} &\triangle u=f(x,u), \qquad (\Omega) \\ &u=g, \qquad (\partial\Omega) \end{aligned} \tag{1}$$

提出四阶精度校正方法. 其中 Ω 是一维,二维或三维区域,边界 $\partial\Omega$ 与坐标轴平行. 假定解 u 充分光滑,且 $f_1(u)=f'_u(x,u)\geqslant 0$ [1]中校正过程,以二维情形说,步骤是先求五点格式的差分方程解

$$\begin{aligned} &\triangle_h u_h=f(x,u_h), \ (\Omega_h) \\ &u_h=g-\frac{h^2}{12}f(x,g), \ (\partial\Omega_h) \end{aligned} \tag{2}$$

次求差分解 φ_h,为此解线性差分方程

1987年4月29日收到,1989年3月17日收到修改稿.

$$(\triangle_h^* - f_1(u_h))\varphi_h = f(x,u_h) - f_1(u_h)u_h + \frac{h^2}{12} f_1(u_h) f(x,u_h) \quad (\Omega_h)$$

$$\varphi_h = g - \frac{h^2}{12} f(x,g), \quad (\partial\Omega_h) \tag{3}$$

这里 $\triangle_h^*$ 是斜五点格式。资料 [1] 证明了校正过程后的解

$$\frac{2}{3} u_h + \frac{1}{3}\varphi_h + \frac{h^2}{12} f(x,u_h) = u + O(h^4) \tag{4}$$

有四阶精度。

上述过程麻烦处是要用两套程序解两次，增加工作量与存贮量。如用九点格式则可省去解方程 (3) 步，过程大为简化。算法为先解差分方程

$$\square_h u_h = f(x,u_h) + \frac{h^2}{12} f_1(u_h) f(x,u_h) \quad (\Omega_h)$$

$$u_h = g - \frac{h^2}{12} f(x,g), \quad (\partial\Omega_h) \tag{5}$$

次求校正解

$$\hat{u}_h = u_h + \frac{h^2}{12} f(x,u_h) \tag{6}$$

这里 $\square_h$ 是九点格式算符[1]。本文要证明

命题 1 $u - \hat{u}_h = O(h^4)$, (Ω_h).

证明 固定 u 作辅助线性差分方程

$$\square_h \tilde{u}_h = f(x,u), \quad (\Omega_h)$$

$$\tilde{u}_h = g - \frac{h^2}{12} f(x,g), \quad (\partial\Omega_h) \tag{7}$$

[1] 已证明，成立

$$u - \tilde{u}_h - \frac{h^2}{12} f(x,u) = O(h^4) \tag{8}$$

但

$$\begin{aligned} u - \hat{u}_h &= u - u_h - \frac{h^2}{12} f(x,u_h) \\ &= u - \tilde{u}_h - \frac{h^2}{12} f(x,u) + \tilde{u}_h - u_h + O(h^4) \\ &= \tilde{u}_h - u_h + O(h^4) \end{aligned} \tag{9}$$

今证 $\theta = \tilde{u}_h - u_h = O(h^4)$，为此注意 $f_1(u) \geq 0$，故

$$\begin{aligned} (\square_h - f_1(u))\theta &= f(x,u) - f(x,u_h) - f_1(u)\theta - \frac{h^2}{12} f_1(u_h) f(x,u_h) \\ &= f_1(u)(u-u_h) - f_1(u)(\tilde{u}_h - u_h) - \frac{h^2}{12} f_1(u_h) f(x,u_h) + O(h^4) \\ &= f_1(u)\left(u - \tilde{u}_h - \frac{h^2}{12} f(x,u)\right) + O(h^4) \\ &= O(h^4), \quad (\Omega_h), \end{aligned}$$

$$\theta=0, \quad (\partial\Omega_h). \tag{10}$$

由极大模原理,保证了 $\theta=O(h^4)$, (Ω_h). **证毕**

§2. 本征值问题

[1] 考虑型如

$$\begin{aligned}&\triangle u+(\lambda-p)u=0, \ (\Omega)\\&u=0, \ (\partial\Omega), \ (u,u)=1\end{aligned} \tag{11}$$

的本征值问题,其校正过程是先解近似本征值问题:

$$\begin{aligned}&\Box_h U_h+(\Lambda_h-p)U_h=0, \ (\Omega_h),\\&U_h=0, \ (\partial\Omega_h), \ (U_h,U_h)_h=1.\end{aligned} \tag{12}$$

然后解校正方程

$$\begin{cases}(\Box_h+\Lambda_h-p)\varphi_h=(\Lambda_h-p)^2U_h-((\Lambda_h-p)^2U_h,U_h)_hU_h, \ (\Omega_h);\\ \varphi_h=0, \ (\partial\Omega_h);\\ (\varphi_h,U_h)_h=\Lambda_h-(pU_h,U_h)_h.\end{cases} \tag{13}$$

结论是

$$\Lambda_h+\frac{h^2}{12}((\Lambda_h-p)^2U_h,U_h)_h=\lambda+O(h^4), \tag{14}$$

$$U_h+\frac{h^2}{12}((p-\Lambda)U_h+\varphi_h)=\pm u+O(h^4). \tag{15}$$

为了得到本征元四阶近似,需要再解差分方程 (13),本文将另觅算法,省去 (13) 的计算,直接得到本征值与本征元的四阶近似.

为此先构造差分算子 M_h,定义为:

$$M_hu=\Box_hu-\frac{h^2}{12}p\Box_hu-\frac{h^2}{12}\Box_h(pu)+\frac{h^2}{12}p^2u \tag{16}$$

代替 (12) 考虑近似本征值问题

$$\begin{aligned}&M_hu_h+(\lambda_h-p)u_h=0, \ (\Omega_h)\\&u_h=0, \ (\partial\Omega_h), \ (u_h,u_h)_h=1.\end{aligned} \tag{17}$$

则有命题:

命题 2

$$\lambda_h+\frac{h^2}{12}\lambda_h^2=\lambda+O(h^4), \tag{18}$$

$$u_h=\pm u+O(h^4). \tag{19}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}(M_h+\lambda_h-p)u&=M_hu+\lambda u+(\lambda_h-\lambda)u-pu\\&=\Box_hu-\triangle u+\frac{h^2}{12}(-p\Box_hu-\Box_h(pu)+p^2u)+(\lambda_h-\lambda)u\\&=\frac{h^2}{12}(\Box_h-p)^2u+(\lambda_h-\lambda)u+O(h^4)\end{aligned}$$