GAODENG SHUXUE

公安武警院校基础数学教材

高等数学

李洪成　主编　蒋南宁　主审

3

廣東省出版集團
广东人民出版社

013/531
2008

公安武警院校基础数学教材

高等数学

李洪成 主编 蒋南宁 主审

廣東省出版集團
广东人民出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/李洪成主编．蒋南宁主审．
—广州：广东人民出版社，2006.4（2008.2 重版）
（公安武警院校基础数学教材）
ISBN 978—7—218—05168—0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①李…②蒋…　Ⅲ．高等数学—高等院校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 160518 号

责任编辑	柏　峰
封面设计	刘晓菁
责任技编	黎碧霞
出版发行	广东人民出版社
印　　刷	韶关二九〇研究所地图彩印厂
开　　本	850 毫米×1168 毫米　1/16
印　　张	21.5
插　　页	1
字　　数	500 千
版　　次	2008 年 2 月第 2 版　2008 年 2 月第 2 次印刷
印　　数	4001—7000 册
书　　号	ISBN 978—7—218—05168—0
定　　价	28.00 元

（内部使用）

如果发现印装质量问题，影响阅读，请与出版社（020—83795749）联系调换。

【出版社网址：http://www.gdpph.com　电子邮箱：sales@gdpph.com
图书营销中心：020—37579604　37579695】

本书编委会

主　编：李洪成（广东警官学院）

审　订：蒋南宁（广西警官高等专科学校教授）

副主编：蒋南宁（广西警官高等专科学校教授）

周光发（江苏警官学院数理教研室主任）

李国军（浙江警察学院）

杨晓忠（贵州警官职业学院副教授）

夏爱桃（湖南公安高等专科学校副教授）

胡远青（江西公安高等专科学校教授）

游永兴（湖北警官学院数理教研室主任）

孙树东（新疆警官高等专科学校）

周国民（浙江警察学院副教授）

李龙乐（山东警察学院副教授）

赵伟斌（广东警官学院）

陶学榆（江西公安高等专科学校副教授）

苻小生（江西公安高等专科学校）

翟保昆（云南警官学院副教授）

孙　旭（广州武警指挥学院副教授）

第二版修订说明

公安、武警院校基础数学教材《高等数学》自 2006 年公开出版发行以来，有八省市的公安高等院校作为教材使用，并且受到公安、武警院校的关注。其中弹道分析、火药爆炸力勘测及交通车辆能量解析等使在校学生感到了自然科学与专业应用紧密结合的兴趣。这些说明该书适合公安、武警院校学生需要。但也有教师、学生希望我们进行修订，我们也深感必要。这次修订，依然保持原书的特色风格，但内容上有些增删，加大了习题的练习。

由于反映公安、武警特色的高等数学教材尚属空白，难免幼嫩不足，却得到众多教师、学生的爱护，我们坚信在今后的实践锤炼中，必将完善，更加具有公安、武警的专业特色。

对第二版中的错误和不妥之处热诚欢迎广大读者批评指正。

编　者

2008 年 1 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　言

《高等数学》是根据全日制大学教学大纲的基本要求和公安部高等数学课程的基本要求编写的，适合公安院校使用。

在多年的教学实践中，经常听到同学们提出对普通高等数学教材的学习，感到抽象、实用目的不明确的问题，亦深感应结合公安高等院校的专业特点，在语言、内容上适当进行改革，才能引发学生的学习兴趣。因此，经过多年与刑事技术专业、交通管理专业、经济侦察专业的教师和学生的探讨，我们编写了此书。

在编写过程中，我们注意结合以下特点：

一、结合新生入学第一年就开设高数的实际情况，注重使学生既学到数学知识，又能通过公安司法类专业术语的使用及概念举例、例题、习题体现公安司法特点；帮助学生提早跨进专业之门，为后继课程打下良好基础。如学习痕迹检验中的“特征比对”时，增强“量化比对”的思维。

二、语言方面力求通俗易懂，文字准确，条理清晰；内容方面力求概念清楚，重点突出，删繁就简，便于自学，做到严密、广泛、实用、开拓性选材。

三、各章、节都配有例题、习题，书后并附有答案，通过例题的讲解和分析及适量的练习，帮助学生加深对基本内容的理解，提高思考问题和解决问题的能力。

本书的编写是在广东警官学院院长石宗昆、副院长胡关禄的鼓励下开始的，在副院长杨卫平教授和戴勇敢研究员的关怀和指导下完成的。

本书由各院校划定编写重点并落实具体编写人员。全书由李洪成统稿，蒋南宁最后审定。全书分上、下册，共十三章，上册（第一章～第八章），下册（第九章～第十三章）。具体分工如下：蒋南宁（第一章第 1、2 节，第十章第 4、5、6、7 节），李国军（第二章第 1、2、3、4 节），苻小生（第二章第 5、6、7 节），周光发（第三章第 1、2、3 节，第九章第 6、7 节），孙树东（第三章第 4、5、6 节），翟保昆（第四章第 1、2、3、4 节），李龙禾（第四章第 5、6、7 节），杨晓忠（第五章第 1、2 节，第十一章第 1、2 节），周国民（第五章第 3、4 节，第九章第 3、4、5 节），夏爱桃（第六章第 5、6、7 节），陶学榆（第六章第 1、2、3、4 节，第十二章第 3、4 节，第十三章），胡远青（第七章第 1、2、3 节），赵伟斌（第七章第 4、5 节，第八章第 6、7、8、9、10、11 节，第九章第 1、2 节），游永兴（第八章第 1、2、3、4、5 节，第十章第 1、2、3 节，第十一章第 3、4、5 节，第十二章第 1、2 节），李洪成（预备知识，第一章第 3 节，第二章第 8 节，第三章第 7 节，第四章第 8 节，第五章第 5 节，第七章第 6 节，第十章第 8 节）。

本书的编写，得到了广西警官高等专科学校、湖北警官学院、江苏警官学院、山东警察学院、云南警官学院、湖南警官高等专科学校、江西警官高等专科学校、贵州警官职业学院、浙江公安高等专科学校、新疆警官高等专科学校等院校领导的热情关心与支持，特别是上述院校的数学教师通力合作，积极参与编写，本书才能如禾苗破土而出，相信在大家的努力下必能茁壮成长，开花结果。在此一并向关心此书的领导表示衷心感谢。

本书在编写过程中，参考了同济大学、天津大学等高校教材、升研考试参考书以及爆炸痕迹、枪弹痕迹、交通事故处理等参考书，在此说明并致谢。

由于编者水平有限，时间仓促，错误之处在所难免，敬请同行们见谅并提出批评指正，以便重版时修订，不胜感激。

编　者

2006 年 2 月 28 日

目　录

预备知识

一、初等代数的一些公式

1. 二次方程 $ax^2+bx+c=0$

(1)求根公式

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(2)根的性质(判别式)

$$\text{当 } b^2-4ac\begin{cases}>0 & \text{两个根是实数且不相等}\\ =0 & \text{两个根是实数且相等}\\ <0 & \text{两个根是虚数}\end{cases}$$

2. 对数

(1)若 $a^y=x$ 则 $y=\log_a x\begin{pmatrix}a>0 & a\neq 1\\ x>0 & \end{pmatrix}$

(2)$\log_a a=1$

(3)$\log_a 1=0$

(4)$\log_a A\cdot B=\log_a A+\log_a B$

(5)$\log_a \dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$

(6)$\log_a A^{\alpha}=\alpha\log_a A$

(7)$a^{\log_a x}=x$

3. 指数的运算性质

(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

(2)$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

(3)$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

(4)$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$

(5)$(\dfrac{a}{b})^m=\dfrac{a^m}{b^m}$

4. 常用二项展开及分解因式

(1)$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

(2)$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

(3)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4)$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

5. 牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$$

6. 阶乘与组合

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$C_n^0=1\qquad C_n^n=1$$

二、初等几何的一些公式

以字母 r 或 R 表示半径，h 表示高，s 表示底面积，l 表示母线长.

1. 圆　周长 $=2\pi r$　面积 $=\pi r^2$

2. 圆扇形　面积 $=\dfrac{1}{2}r^2\alpha$　（α 为扇形的圆心角）

3. 正圆柱体　体积$=\pi r^2 h$，侧面积$=2\pi rh$

表(全)面积$=2\pi r(r+h)$

4. 正圆锥　体积$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，侧面积$=\pi rl$

表(全)面积$=\pi r(r+l)$

5. 球　体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$；表面积$=4\pi r^2$

6. 正截锥体　体积$=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$

侧面积$=\pi l(R+r)$

三、三角学的一些公式

1. 弪与度

$180°=\pi$ 弪

即　$1°=\frac{\pi}{180}$弪$=0.0174\cdots$弪

1 弪$=\frac{180}{\pi}$度$=57°17'45''=57.29\cdots$度

2. 弧长公式

半径为 r，圆心角为 θ，圆弧长为 s，则 $s=r\theta$

3. 公式

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$　　$1+\tan^2 x=\sec^2 x$　　$1+\cot^2 x=\csc^2 x$

$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$，　$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$，　$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$　　$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$

$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$　　$2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$

$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$　　$-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$　　$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$　　$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$　　$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

4. 特殊角的三角函数值

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在

四、平面解析几何的一些公式

设平面上有两点 $M_1(x_1, y_1)$和 $M_2(x_2, y_2)$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(1)两点间的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(2)线段 M_1M_2 的斜率

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\varphi$$

(3)通过两点 M_1 与 M_2 的直线方程

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(4)直角坐标与极坐标的关系式

$$\begin{cases}x=l\cos\varphi\\ y=l\sin\varphi\end{cases};\quad \begin{cases}L=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

(5)以点(a,b)为中心，以 r 为半径圆的方程

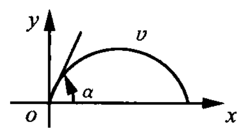
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

或 $$\begin{cases}x=a+r\cos\varphi\\ y=b+r\sin\varphi\end{cases}\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

(6)以原点为中心，分别以 a 与 b 为半长、短轴的椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 或} \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$$

(7)弹道曲线 $$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}\quad \left(0<t<\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)$$



(弹道图)

五、希腊字母

字	母	中文发音	汉语拼音字母拼音
A	α	阿拉法	alfa
B	β	贝 他	bota
Γ	γ	嘎 玛	gama
Δ	δ	得尔他	delta
E	ε	唉普西弄	epsilon
Z	ζ	绥 他	zheita
H	η	唉 他	eta
Θ	θ	斯伊他	sita
I	ι	优 他	yota
K	κ	卡 怕	kapa
Λ	λ	兰姆大	lamda
M	μ	米 优	miu
N	ν	泥 优	niu
Ξ	ξ	刻斯伊	ksi
O	o	欧迷克弄	omiklon
Π	π	派 爱	pai
P	ρ	漏	lo
Σ	σ	西格玛	sigma

T	τ	套	tao
Υ	v	伊普西弄	ipsilon
Φ	φ	夫　爱	fai
X	χ	气	qi
Ψ	ψ	普 斯 伊	psi
Ω	ω	欧 米 嘎	omiga

六、初等数学应用举例

1. 对应线段成比例

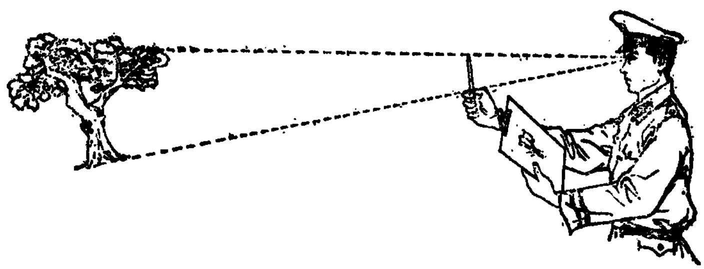
臂长尺：犯罪现场绘图工具——铅笔，沿铅笔平端向笔尖端每厘米刻一个道痕（一般刻 10 道即可），这样铅笔 称为臂长尺，用它可以测出现场的重要参照物的高度或与中心现场的距离.

现场勘查人员手臂长设为 60 厘米，按图中所示，用大拇指把测出的高度或宽度按住，读出铅笔刻度数设为 3，那么，只要知道参照物与勘查人员的距离，设为 200 米，便可算出参照物高度或宽度.

计算式为：

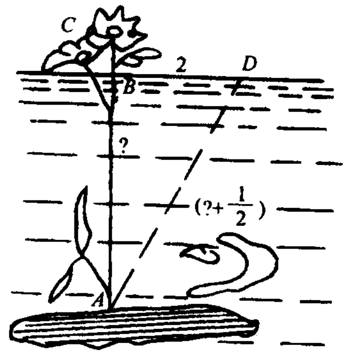
$$\frac{\text{臂长(60cm)}}{\text{距离(200m)}}=\frac{\text{铅笔刻度(3cm)}}{\text{参照物高(或宽)}}\text{，即，高(或宽)}=\frac{\text{距离(200cm)}\times\text{刻度(3cm)}}{\text{臂长(60cm)}}.$$

同理，知道参照物高时，亦可求出距离.



2. 勾股定理

现场勘查中，您能巧妙地利用水中植物测出水深吗？请看下面例子，题意如图所示：一朵莲花(C)原先比湖水高出半尺$\left(BC=\frac{1}{2}\right)$. 茎杆在 B 处露出水面. 一阵风吹来，将荷花吹到离 B 处两尺远的地方(即 $BD=2$). 这时，荷花的顶端刚好露出水面，求湖水有多深(即 $AB=?$)



印度莲花问题

这个题目不算太难，图中的 A、B、D 三点可以联成一个直角三角形. 我们不妨设 AB 的长为 x 尺. 由于 $AC=AD$，所以 AD 的长度是$\left(x+\frac{1}{2}\right)$尺. 根据勾股定理，两条直角边的平方和应等于斜边的平方，于是有

$$x^2+2^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

即

$$4=x+\frac{1}{4},\qquad x=3\,\frac{3}{4}\text{(尺)}.$$

3. 三维坐标测量计算

对冲击波破坏范围的勘查、测量，要客观反映破坏物体与炸点的距离、损坏程度、所处方位及与

冲击波作用的角度等情况. 例如要测量现场某处有 50% 的玻璃破碎点距爆心的距离，可以用三维坐标测量计算. 假设该点距爆炸中心正东 8 米，正南垂直距离 12 米，距地面高为 9 米，则测量点距爆心的距离 L 可以由下式计算：

$$L=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{8^2+12^2+9^2}=17(\text{米}).$$

4. 应用三角函数法计算水平和斜射距离

若在被射物体垂面上有一个弹孔，且物体有一定厚度，能够测出命中角度(如用一根细棍插入弹孔量取弹孔轴线与垂面的夹角，即命中角 μ)，并能测出弹孔到地面的高度，此时便可应用三角函数计算水平距离.

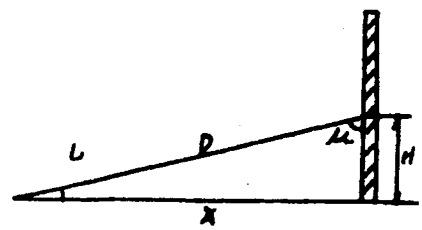
在量取命中角 μ 时，若向下方为正角度，测出 $\mu<90°$，则可能为近距射击，这时可利用弹道直线段采用三角函数计算. 计算式为：

水平距离(X)＝弹孔高度(H)×命中角的正切函数值($\tan\mu$)

即　　$X=H\cdot\tan\mu.$

例如，某建筑物的窗户玻璃被 56 步枪弹击穿，量取命中角度 $\mu=82°$，弹孔中心距地面的离度为 8 米，射击者距建筑物的水平距离多远呢?

解：如图



因为　　$H=8(\text{米})$，$\mu=82°$

故　　$X=H\cdot\tan\mu=8\cdot\tan 82°=56.9(\text{米})$

即射击者用 56 步枪对建筑射击时，距该建筑物的水平距离约为 60 米.

若能判定持枪口高度 L，则可从弹孔高中减去 L，用上述方法计算，计算式为：

$$X=(H-L)\cdot\tan\mu.$$

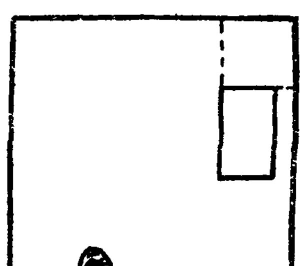
对上述例题，若 $L=1.5$ 米，则枪口到建筑物的水平距离为

$$X=(H-L)\cdot\tan\mu=-(8-1.5)\times\tan 82°=46.7(\text{米})$$

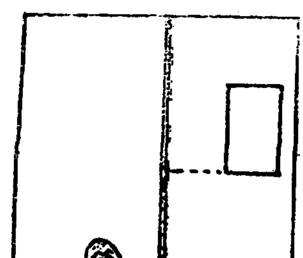
5. 运用坐标法测绘犯罪现场痕迹物证

(1)用皮尺、钢卷尺直接测量.

(2)用坐标法测定其位置. 一是以墙的长宽两条内侧线作为坐标轴，测量痕迹、物品、有关物体至两轴的平行距离见图(1). 二是在室内中央放一条皮尺作为纵坐标，仅测物体、物品、痕迹至这条纵坐标的垂直距离，同时读出纵坐标的距离即可. 测得的数据必须记于草图上. 见图(2).



(1)



(2)

第一章　函数

函数概念在日常生活领域及公安司法保卫等工作中普遍存在，它是客观现实中变量依从关系在数学中的反映. 函数是高等数学研究的主要对象，也是重要的概念之一，是微积分的基础. 本章将在中学已了解的函数基础上，简略而深刻地介绍函数的概念及其主要性质.

§1　函数

一、量与区间

我们遇到的量一般可分为两种，一种量在某过程中不起变化，保持一定的数值，称为常量，另一种量在某过程中变化，即可取不同的数值，称为变量.

例如自由落体，其质量是常量，而下降速度和路程就是变量.

这里强调某一过程是因为在具体问题中，要作具体分析. 例如汽车行驶速度，在行驶开始及刹车阶段，其速度是变化的，因此在该过程中速度是变量，而在匀速行驶过程中，其速度是常量.

在数学上，常量称为常数，在数轴上用定点表示，通常用字母 a，b，c 等表示常数. 变量称为变数，在数轴上用动点表示，通常用字母 x，y，z 等表示变量.

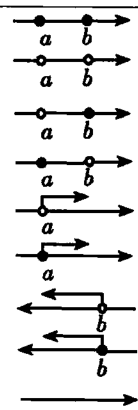
变量变化范围通常用区间来表示，我们给区间下个定义.

定义　设数 a 与 b 满足 $a<b$，则数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a, b) 即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}.$$

这里 a 与 b 分别称为开区间 (a, b) 的左端点与右端点，且 $a\notin(a, b)$，$b\notin(a, b)$.

类似地给其它区间下定义，列表如下：

名称	定义	符号	数轴表示
闭区间	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a, b]$	
开区间	$\{x\|a<x<b\}$	(a, b)	
左半开区间	$\{x\|a<x\leqslant b\}$	$(a, b]$	
右半开区间	$\{x\|a\leqslant x<b\}$	$[a, b)$	
无限区间	$\{x\|a<x\}$	$(a, +\infty)$	
无限区间	$\{x\|a\leqslant x\}$	$[a, +\infty)$	
无限区间	$\{x\|x<b\}$	$(-\infty, b)$	
无限区间	$\{x\|x\leqslant b\}$	$(-\infty, b]$	
无限区间	$\{x\|-\infty<x<+\infty\}$	$(-\infty, +\infty)$	

二、绝对值与邻域

1. 绝对值

定义　任意实数 a 的绝对值用符号“$|a|$”表示定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

由定义可知任何一个实数 a 的绝对值是非负的，几何上表示点 a 到原点的距离由定义论断 $|x|<r(r>0)$ 与 $-r<x<r$ 是等价的.

事实上，从几何上看这是明显的，因为 $|x|<r$ 表示点 x 与原点的距离小于 r，所以点 x 必落在 $(-r, r)$ 内，即 $-r<x<r$；反之，若 $-r<x<r$ 成立，则点必落在区间 $(-r, r)$ 内，即点到原点的距离小于 r，也就是 $|x|<r$.

同理可推知 $|x-a|<r$ 与 $a-r<x<a+r$ 是等价的，进而推知 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 与 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ 是等价的.

2. 邻域

定义 设 a 与 δ 是两个实数，而 $\delta>0$（一般认为 δ 为趋近于零的正数）. 满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体集合 **R** 称为点 a 的 δ 邻域，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，不等式又可写成

$$-\delta<x-a<\delta \quad 或 \quad a-\delta<x<a+\delta.$$

实际上，a 点的 δ 邻域就是以点 a 为中心，而长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，如图 1－1. 若把邻域的中心 a 去掉，所得到的邻域称为点 a 的去心的 δ 邻域. 记为 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

例 1 点 3 的 $\delta=\frac{5}{3}$ 的邻域可表示为

$$|x-3|<\frac{5}{3}.$$

即 $$3-\frac{5}{3}<x<3+\frac{5}{3},$$

即 $$1\frac{1}{3}<x<4\frac{2}{3},$$

该邻域是开区间 $(1\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3})$.

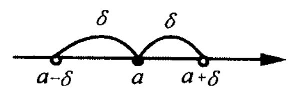


图 1－1

三、函数概念

在某一自然现象或侦破案件的过程中，往往同时遇到两个或多个变量，这些变量不是孤立地变化，而是互相联系，互相依赖，遵循着一定的规律变化，下面仅就两个变量的情形举例说明.

例 2 人的身高与脚长的关系，有经验公式 $h_{身高}=7L_{脚长}$. 当犯罪现场提取足迹的长度确定时，相应地可推测出其身高.

例 3 两个质点作相对运动，彼此间的距离 r 与相互作用的引力 f 是两个变量，根据万有引力定律，它们之间的关系式是：

$$f=G\frac{m_1m_2}{r^2}（G 是引力常数，m_1，m_2 是两质点的质量）.$$

上述例子表达了两个变量之间的依赖关系，这种关系给出了一种对应规律. 根据这种对应规律，当一个变量在某一个范围内取一个数值时，另一个变量就有一个确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

定义 设有两个数集 X、Y，f 是一个确定的对应规律，若对于每一个 $x\in X$，通过 f 都有唯一的 $y\in Y$ 和它对应. 记为

$$f(x)=y \quad 或 \quad x\xrightarrow{f}y.$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为 x 的函数，$x\in I$ 表示函数的定义域（或称 x 的取值范围）.

由定义知，定义域和对应规律是函数的两个要素. 而定义域在实际问题中是根据具体问题的实际意义来确定的，如面积及半径、时间等不能取负值. 不考虑实际意义时，函数的定义域就是使式子有

意义的自变量的一切实数值，通常用记号 D_f 来表示. 当 x 取遍 D_f 中的一切数时，与之对应的数 y 组成的数集$V_f=\{y|y=f(x)，x\in I\}$称为函数的值域.

习惯上把函数 y 说成“变量 y 是变量 x 的函数”，记作$y=f(x)$. 其中表示对应关系的记号“f”也常常用其它字母代替，例如“g”，“φ”，“F”，“G”等，这时函数的记号相应地表示为 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$和 $y=G(x)$等.

例 4 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域 $D_f=[-1,1]$，值域 $V_f=[0,1]$.

例 5 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & \text{当 } x>1.\end{cases}$$

的定义域 $D_f=[0,+\infty)$，值域 $V_f=[0,+\infty)$.

当 $x\in[0,1]$时，对应的函数值为 $f(x)=2\sqrt{x}$,如 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}$.

当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值为 $f(x)=x+1$，如$f(3)=3+1=4$.

四、函数的性质

1. 有界性

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x$，它们的函数值总介于-1与$+1$之间

即 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$. 而函数 $y=x^2$ 的函数值则不然，对于事先给定的怎样大的M，总可以找到x，使得 $x^2>M$. 为区别这两种函数性态，我们给出有界函数与无界函数的定义.

定义 设 I 为某一区间，如果存在一个正数 M，使得对一切 $x\in I$ 都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在区间 I 内有界，否则称函数 $f(x)$无界.

例 6 函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界函数.

解 因为无论 x 取任何实数，都有$|\sin x|\leqslant 1$，所以$f(x)=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是有界函数.

例 7 讨论函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$[1、2]$上是有界的，在区间$(0, 1)$内是无界的.

解 由于 $f(x)=\frac{1}{x}$在$x\in[1、2]$上满足$|f(x)|\leqslant 1$，显然$f(x)$在$[1、2]$上是有界的.

而 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0, 1)$内，因为不存在这样正数 M，使对于$(0, 1)$内的一切 x 值都有$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$成立，所以 $f(x)=\frac{1}{x}$在$(0, 1)$内是无界的.

2. 单调性

定义 如果在区间(a, b)内，任取两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)（\text{或 } f(x_1)>f(x_2)），$$

则称函数 $f(x)$在(a, b)内是单调增(或单调减)函数. 单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

单调增函数的图形是沿 x 轴正向上升的(图 1－2). 单调减函数的图形是沿 x 轴正向下降的（图 1—3).

例如函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$上是单调增的（图 1－4），函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty, 0]$上是单调减的. 而在$[0, +\infty)$上是单调增的(图 1－5).

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com