高級中学課本平面几何
教学参考資料

江苏教育学院数学教研組編

江苏人民出版社

高級中学課本平面几
何教学参考資料
江苏教育学院数学教研組編
*
江苏省书刊出版營业許可証出〇〇一号
江苏人民出版社出版
南京湖南路十一号
新华书店江苏分店发行　宁印刷厂印刷
*
开本787×1092耗1/32　印張$5\frac{1}{4}$　字数132,000
一九五八年七月第一版
一九五八年七月南京第一次印刷
印数1—14,000
統一书号：7100·497
定　价：(5)三角六分

前　言

这本教学参考資料是根据現行“高級中学課本平面几何”(人民教育出版社，1956年第二版)的內容編写，专門供給教师在教学中作参考用的。

本书每一单元共分三大項：

一、教学目的——这是編者根据中学数学教学大綱（修訂草案)的精神和各单元教材的內容提出的。

二、教材研究——这是編者根据自己对教材的体会而提出的；它包括有：教材的主要精神、前后联系、教学重点，課文內容的分析以及某些較难的习題的解法等等。

三、教学建議——这是編者根据一般的教学經驗提出的；它包括有：教学中应注意的事項，每一单元的教学时数和各課时的教材分配；并且，为了对教师有較多的帮助，編者还就每一課时的教学提出了“教学要求”、“教法建議”及“作业”的安排。

此外，在本书的最后部分还有两个附录：一个是“軌迹問題”，一个是“实习作业”。这些都是編者針对教学上的需要，根据自己的一得之見写出的。

編写本书时，編者虽力求适合一般学校的需要，但因各校的具体情况不同，教师們还需从实际出发，灵活运用本书所提供的資料。

本书所拟訂的高中平面几何的教学时数共为101課时（学期复习在外)。每学期以实足上課17周計算，如果高一上每周上2課时，高一下每周上3課时，高二上每周上2課时，則两个半学期全书可以授完；如果高一上、下每周各上3課时，則两个

学期可以授完。

由于編者的水平所限，本书难免还有缺点和錯誤，希望教师們多多提出意見和批評。

編　者 1958.5.

目　录

第一章 相似形

I. 綫段的度量

一 教学目的

1. 講解两綫段的公度的意义和两綫段的最大公度的求法，从而使学生了解确有无公度綫段存在。

2. 闡明关于綫段度量的概念，使学生了解綫段长度的意义，借以打下今后講解相似形和面积的理論基础。

3. 講解两綫段之比的意义，使学生明确了解綫段的比及由綫段組成的比例分别具有数的比及比例的性質。

二 教材研究

1. 在中学几何里，对于綫段的比例和乘积的理解乃是以綫段长度的概念为基础的。因为，在初中几何里，我們并沒有确切地講过綫段长度究竟是什么意义，而在高中几何里，进行相似形和面积的研究，却要用到綫段的比例和乘积，所以，在教学高中几何时，如果不首先弄清綫段长度的意义，則后面的教材都将失去依据。因此，在本单元里，我們必須闡明有关綫段度量的概念，使学生对于綫段长度能有正确的理解。

本单元教材，总括起来，可以分为如下的三个部分：

(一)关于两綫段的公度和最大公度(§1—§6)；

(二)关于綫段度量的概念(§7)；

(三)两綫段的比和綫段的比例(§8、§9)。

其中，第二部分是本单元的主体，它説明了度量綫段的方法并建立起用实数表示綫段长度的概念；而第一部分則是第二部分的先导，它主要的説明了两綫段不一定有公度并証实了确有无公度綫段存在，因此，在第二部分講到度量綫段时，就能很自然地指出要分作两种情形来研究；至于第三部分乃是在第二部分的基础上明确一下綫段长度的意义并进而确立綫段的比及比例的概念。

2. 亚儿默得公理（§1），又名測度公理，它是綫段度量理論的基础。根据这公理，我們对于任一綫段，总可以在取定长度单位后，唯一地确定一个表示这綫段的正数（叫作这綫段的量数）。

关于这公理，有以下几点是值得注意的：

（一）就两条已知的綫段 a 和 b 而言，无論較长的綫段 a 怎样长，較短的綫段 b 怎样短，总有合于关系式：

$$mb \leq a < (m+1)b。$$

的数 m 存在（因而就总可以求出这样的数 m）；

（二）对于既定的綫段 a 和 b 来説，这样的数 m 是唯一的（即：这样的数 m 不能有两个）；

（三）因为 $a > b$，所以这个数 m 不小于 1（即不为 0，而为自然数）；因此，課本上 §1 里所説的“整数 m”应該正确的説成是“非 0 的整数 m”（或自然数 m）。

我国古代，墨子曾經有过“穷、或有前不容尺”的説法，这与亚儿默得公理的意义完全相同——墨子的这句話乃是説：“用一条綫段（所謂“尺”）来量另一綫段时，有两种可能发生的情况：（1）正好量尽（所謂“穷”），（2）量到后来还有剩余（所謂“有前不容尺”）。用記号表之，就是：（1）$a = mb$，（2）$a = mb + r$，且 $0 < r < b$。

3. 根据两綫段的公度的定义（§2）来講，当 MN 是 AB 和 CD 的公度时，我們也可以説：AB 和 CD 都能被 MN 量尽而沒

有剩余，并且我們还可以用式子来表示：

$AB = p \cdot MN$，$CD = q \cdot MN$（p、q 各为非 0 的整数）。

应該注意，“公度”并不限于是指两綫段的公度而言的。对于任何两个同类量，我們都可以同样的来定义它們的公度（例如，两个角的公度，同圓或等圓中两段弧的公度）。因此，当我們說到两綫段的公度时，就不宜将其簡单地說成“公度”。

4. 关于两綫段的公度，必須明确以下几点：

（一）并非任何两綫段都能有公度（見 § 4—§ 6）；

（二）如果两綫段有某一个公度，則它們就一定有无数的公度（§ 2）；

（三）如果两綫段有公度，則它們必有一个最大的公度（§ 2），但是并沒有一个最小的。

5. § 3 所講的两个定理乃是两綫段最大公度的求法（輾轉相截法）的依据。定理 1 应該分两步来証明：第一步，証明綫段 b 是 a 和 b 的公度；第二步，証明 b 是 a 和 b 的最大公度；而定理 2 則要分作两方面来証明：（一）証明 a 和 b 的任一公度都是 b 和 r 的公度；（二）証明 b 和 r 的任一公度也都是 a 和 b 的公度；因而两組綫段 a 和 b 及 b 和 r 的所有公度都是相同的，于是就断定它們的最大公度也必定相同。

6. 关于 § 4 所講的求两綫段的最大公度的方法，应該注意：

（一）在輾轉相截的过程中，每一回都有可能发生下列情形中的一种：

（1）正好截完（沒有剩余）——这时我們得到了所求的最大公度；

（2）还有剩余——这时，我們还沒有得到所求的最大公度。

（二）求两綫段最大公度所用的輾轉相截法，与算术中求两个整数的最大公約数所用的輾轉相除法，是相似的，但两者也有

很大的不同。由于两个整数总有最大公約数（如果两数不是互質的，則它們的最大公約数是大于1的整数；如果两数是互質的，則它們的最大公約数就是1），所以輾轉相除法的进行，不会有无限繼續下去的情形；但是輾轉相截，却会发生无限繼續下去，永远有剩余的情形。

7. 从实际进行輾轉相截的过程中，我們很难看出有“永远有剩余”的情形；这因为輾轉相截到若干回后，所得的剩余已愈来愈小，截到后来，虽然仍有很小的剩余，我們却已不易再观察出来。因此，为了表明有“无公度綫段”的存在，就在§6中提出了“正方形的对角綫和它的边是无公度綫段”这个定理。

应該注意，正方形的对角綫和它的边，只是无公度綫段的一例；此外，我們还有很多这样的例子，比方說：在底角为36°的等腰三角形中，底边和腰也是无公度綫段（見习題一的第6题）。

8. 在§7里，对于綫段的度量，我們是分作两种情形来討論的；并且在每一种情形下，我們所論及的，总是这样的两个方面：关于度量的方法和关于度量的結果。現在，就将§7里对于两种情形所作的論述分别地条列于下：

第一种情形——被量綫段 a 和长度单位 l 有公度。

(一)进行度量的方法：

第一步：求 a 和 l 的最大公度——假設求得的最大公度为 u；

第二步：用 u 去量 a 和 l，借以判明 a 和 l 各是 u 的多少倍——比方說：$a=p\cdot u$，$l=q\cdot u$（这里，p 和 q 为非0的整数）；

第三步：得到綫段 a 的量数为$\frac{p}{q}$。

(二)关于度量的結果：据上面所述的方法，可以知道：

(1) 所得的量数是唯一确定的；这因为 a 和 l 既有公度，就

必然有而且只有一个最大公度；

（2）所得的量数一定是一个有理数（整数或分数）；当 l 就是 a 和 l 的最大公度时，这个量数是整数（这时，因 $u = l$，故 $q = 1$）；而当 $u \neq l$ 时，这个量数是分数（这时，p 和 q 互質）。

第二种情形——被量綫段 a 和长度单位 l 沒有公度。

（一）进行度量的方法：

（1）为了求出綫段 a 的量数的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的近似値，我們用这样的方法来度量：

第一步：把 l 分成 10^n 个等分（我們知道，“把一条綫段分成任何整数等分”的作图，总是可能的）；假設其每一个等分为 b（$b = \frac{1}{10^n} l$）；

第二步：用 b 去量 a，找出一个整数 m，使得

$$mb < a < (m+1)b;$$

第三步：得到綫段 a 的长度的量数的近似値为 $\frac{m}{10^n}$ 和 $\frac{m+1}{10^n}$，并且前一个是不足近似値，后一个是过剩近似値，它們都精确到 $\frac{1}{10^n}$。

（2）如果要求出一个数来表示綫段 a 的长度的量数的正确値，我們可以采用下面的方法：

首先求出綫段 a 的长度的量数的某一精确程度的近似値，例如，精确到 0.1 的近似値；然后再依次提高其精确程度，由精确到 0.1 而 0.01 而 0.001 而 0.0001，并且把这样的过程无限地繼續下去（如果不是无限地繼續下去，則得到的仍然是綫段 a 的近似値）；因为每次提高近似値的精确程度总会使之多出一位

小数，所以象这样的无限地繼續下去，就得到了一个无限小数（不循环的），它就是綫段 a 的长度的量数的正确值。

（二）关于度量的結果：

（1）在求綫段 a 的长度的量数的近似值时，对于既定的精确程度 $\frac{1}{10^n}$ 来講，所得的不足近似值 $\frac{m}{10^n}$ 和过剩近似值 $\frac{m+1}{10^n}$，都分别是唯一确定的；这因为用 b 量 a 必能而且也只能求出一个合于 $m \cdot b < a < (m+1)b$ 的整数 m（根据亚儿默得公理）；

（2）在依次提高近似值的精确程度的过程中，不足近似值越来越大，过剩近似值越来越小，也就是，它們的相同小数位越来越多；所以，如果把这样的过程无限地繼續下去，則两种近似值将随着相同小数位的无限增多而变成了同一个无限小数。由此可知，綫段 a 的量数的正确值也是唯一确定的。

（3）上述的无限小数必定是不循环的；这因为如果是循环的，則 a 和 l 就要是有公度的二綫段。据代数学可知，无限不循环小数叫做无理数；所以，在 a 和 l 沒有公度的情形下，用 l 量 a 所得的量数的正确值是一个无理数。

9．关于綫段的度量，还有以下几点，也是我們所应該明确的：

（一）在任何情形下，进行綫段的度量，总是为了要找出被量綫段的量数。

（二）进行綫段的度量，必須有取定的长度单位；而所謂“綫段的量数”，則是对于所取定的长度单位而言的。

就同一被量綫段来說，如果用不同的长度单位来量它，則所得的量数也不相同；用較大的长度单位来量时，所得的量数較小，并且用一种长度单位来量而得到无理数，則在換用另一种长度单位时，所得到的就未必仍然是无理数。

（三）长度单位本身的量数等于 1。

(四)对于固定的长度单位来說，(1) 相等的綫段有相同的量数，(2) 較大的綫段有較大的量数，(3) 若干条綫段之和的量数等于这些綫段的量数之和。

(五)在被量綫段 a 和单位綫段 l 有公度的情形下，有时为了实用上的需要，我們也可以来求出 a 的量数的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的近似值(把 a 当作是和 l 沒有公度的)；事实上，这个近似值与由 a 的量数的正确值 $\frac{p}{q}$ 所化得的近似小数(含 n 位小数)是一样的。

10. "綫段"和"綫段的长度"乃是两个不同的概念。所謂"綫段"，指的是图形；而所謂"綫段的长度"，則是指的"用取定的长度单位所量得的这綫段的量数"(§8)。

在中学几何里(甚至一般的初等几何教程里)，对于綫段的运算总是把它理解为用同一个长度单位量各綫段所得的量数的运算。比方說，对于两綫段的比应当理解为用同一个长度单位所量得的这两綫段的量数的比，对于若干綫段的乘积应当理解为用同一个长度单位所量得的这些綫段的量数的乘积。因此，綫段的运算具有数的运算的性質。

11. 当比例式 $a:b=c:d$ 成立时，我們說：d 是 a、b、c 的第四比例項，但不能說：d 是 b、a、c (或 c、a、b)的第四比例項。

又，就比例式 $a:b=b:c$ 而言，我們不說 c 是 a、b、b 的第四比例項，而說 c 是 a、b 的第三比例項。

12. $a:b:c=d:e:f$ 和 $a:d=b:e=c:f$ 虽然在写法上有不同的形式，但在实質上則具有相同的意义(这是在初中算术里已經講过的)。

13. 对于 $a:b$，我們可以将其改写为 $a \div b$；但是对于

$a+b:c$，則要注意到：可以改写为$(a+b)\div c$而不可改写为$a+b\div c$。

14．对于任一已知的比例式，我們都可以根据比例的性質（§9）来加以变化；但是，必須明确，比例式中的各項并不是可以任意交換的，例如，对于$a:b=c:d$，就不能变換成$a:b=d:c$。

三　教学建議

1．本单元的敎学，应該着重在使学生能清楚地了解有关綫段度量的概念和綫段的比及比例的意义。由于本单元的敎材大部分都比較艰涩，因此，在講解时，要多举实例，要指明关鍵，要注意复习和小結，使学生确切地掌握住每一段敎材的主旨和要点。

2．本单元共講授七課时。

3．敎材分配：

第一課时

課題：§1、亚几默得公理；§2、两綫段的公度。

敎学要求：

（一）明确本单元敎材的目的性。

（二）使学生掌握亚几默得公理的实質和两綫段的公度的定义。

敎法建議：

（一）这是高中几何課的第一堂課，应該簡要地說明一下課程計划，并指出应行注意的事項。

（二）說明研究綫段度量的重要性，指出本单元乃是今后敎材的理論依据。

（三）关于亚几默得公理，要举出实例說明。例如：

（1）若$a=6$寸，$b=2$寸，則$a=3b$。在这种情况下，

$m=3$。

(2) 若$a=7$寸，$b=3$寸，則$2b<a<3b$。在这种情况下，$m=2$而$m+1=3$。

指出用一条綫段来量另一条較长的綫段时，有两种可能发生的情况：(甲)正好量尽(沒有剩余)，(乙)不能量尽(还有剩余)；并归納出式子：

$$mb\leq a<(m+1)b。$$

强調亚几默得公理(和所有的公理一样)是从实际經驗中总結出来的；平常，我們在进行度量(如用尺量布)时，都曾不自覚的用了这公理。

(四)講两綫段的公度的定义时，宜先举实例，并可与两数的公約数对照起来講(但要注意：并非任何两綫段都有公度)。

(五)講两綫段的最大公度时，可以用实例来启发学生，讓他們自己体会出：两綫段如有一个公度，就必有无数的公度，并且在这无数的公度中，必有一个是最大的。

(六)小結：指出在这一課时里我們講过了这样的几个問題：(1) 为什么要研究綫段的度量？(2) 何謂亚几默得公理？(3) 何謂两綫段的公度，最大公度？

第二課时

課題：§3、求两綫段最大公度的定理。

教学要求：使学生了解§3中的两个定理，为下一課时研究两綫段最大公度的求法提供基础。

教法建議：

(一)在講解定理1之前，可以采用象习題一第1題那样的一些例子来引导学生进行研究；并要指出：两綫段的最大公度必不大于这两綫段中較短的綫段(讓学生答出为什么)。

(二)对于定理1，要把証明的步驟写清楚(分两步写)。

(三)对于定理2，不必作一般的論証(按課本上的証法进行

講解就行了);但是应該向学生指出要分作两方面来証明。

(四)要用实例說明这两个定理的作用，使学生对于这两个定理能有眞正的了解而不是形式上的接受。

作业：习題一的1—3。

第三課时

課題：§4、求两綫段的最大公度的方法——輾轉相截法。

教学要求：使学生掌握求两綫段最大公度所用的輾轉相截法，并进而了解到两綫段可能沒有公度。

教法建議：

(一)在复习前两課时的教材的基础上，轉入新課的講解；比方說，画出两綫段 AB 和 CD (AB>CD)，引导学生研究：

(1) 用CD 去量 AB，可能发生哪两种情况？——“正好量尽”和“不能量尽”。

(2) 若 CD 恰能量尽 AB，則这两綫段的最大公度如何？为什么？——据§3的定理1可知：CD 就是 AB 和 CD 的最大公度。

(3) 若 CD 不能量尽 AB (得到了剩余綫段 EB)，則这两綫段的最大公度如何？为什么？——据§3的定理2可知：这两綫段的最大公度就是 CD 和 EB 的最大公度；因此，为了求 AB 和 CD 的最大公度，就要来求 CD 和 EB 的最大公度。

(4) 若 EB 能量尽 CD，則 AB 和 CD 的最大公度如何？反之，若 EB 不能量尽 CD，又如何？

在通过上面这一系列的研究后，就可以很自然的提出輾轉相截法。

(二)要指出在輾轉相截的进程中，每一回都可能发生下列两种情形中的一种：

(1) 正好量尽(卽，恰好截完而沒有剩余)；

(2) 不能量尽(还有剩余)。

幷要引导学生想象出：在輾轉相截的过程中，可能有“一直进行下去，永远有剩余”的情形。

（三）在講解“輾轉相截到若干回后，正好截完”的情形时，要順次写出象課本上所列的算式；同样的，在論述“如果两綫段輾轉相截永远有剩余，則它們不可能有公度”时，也要清楚地給出証明（分清“假設和終結”，幷写出証法）。

（四）小結：为了求两綫段的最大公度，我們怎样来把这两綫段輾轉相截？在輾轉相截的进程中，怎样便得到了所求的最大公度？如果两綫段輾轉相截，永远有剩余，則它們能否有公度？为什么？

作业：习題一的4、5。

第四課时

課題：§5—§6、无公度綫段的存在。

教学要求：使学生了解“正方形的对角綫和它的边是无公度綫段，”幷通过这个定理的証明，使学生深信确有无公度綫段存在。

敎法建議：

（一）由复习前一課时的內容来轉入§5的講解。

（二）在証明§6的定理时，也可以連結AE（不連BD），幷由直角三角形ABE和ADE的全等来証出BE＝DE（課本上的图5）。

（三）对于§6的定理的証明，应向学生指明証法关鍵：

（1）用BC截AC；只截了一次，就得到剩余綫段CD；

（2）用CD截BC；因为BE＝CD，所以在BC上截了一次之后，就要在EC上截取等于CD的綫段了；但EC是等腰直角三角形EDC的斜边，而CD是它的直角边；因此，若在EC上截取等于CD的綫段，則其結果将又要得到比CD小的剩余綫段；

（3）照这样繼續进行下去，每回都是在一个新的較小的等

腰直角三角形的斜边上截取等于它的直角边的綫段；显然，这种过程是沒有止境的。于是断定了AC和BC无公度。

（四）应該指出，正方形的对角綫和它的边乃是无公度綫段的一例；此外，我們还能有其他的例子。

作业：习题一的6。

第五課时

課題：§7、关于綫段的度量的概念。

教学要求：使学生了解进行綫段度量的方法，从而明确：和长度单位有公度的綫段的量数是有理数，和长度单位无公度的綫段的量数是无理数。

教法建議：

（一）这一課时的教材，份量較多，教师須妥慎地进行講解，有条理地板书要点，并应与代数課取得联系。

（二）开始講課之前，可以說明一下“分数与循环小数的关系”以及“不足近似值和过剩近似值的意义”等等；并可以用“量布”为例說明我們平常是怎样来进行度量的。

（三）講解“綫段的量数”的意义时，要强調是对于所取定的长度单位而言的；并可指出：长度单位本身的量数是1。

（四）在論述綫段度量的兩种情形时，要分别把度量方法和度量結果清楚地加以說明（参看教材研究8）；并可指出：研究綫段的度量，就是为了要建立起适当的方法来找出被量綫段的量数，所以，在每一种情形下，我們所討論的总是这样的两方面，一是怎样进行度量的方法，一是得到的量数是如何的数。（講課毕，教师应就这两方面作出适当的小結。）

作业：习题一的7。

第六課时

課題：§8—§9、綫段的比和比例。

教学要求：使学生了解綫段的比和比例的意义及性質。