

21世纪高等农林院校数学基础课规划教材

高等数学学习与解题指导

(理工类·经管类·农学类)

李德新 编著



厦门大学出版社

XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高等数学学习与解题指导

(理工类·经管类·农学类)

李德新 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与解题指导/李德新编著. —厦门:厦门大学出版社, 2009. 6
ISBN 978-7-5615-2909-6

I. 高… II. 李… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 066772 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)

<http://www.xmupress.com>

xmup@public.xm.fj.cn

南平市武夷美彩印中心印刷

2009 年 6 月第 1 版 2009 年 6 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:31.5

字数:1043 千字 印数:1~6500 册

定价:30.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

前 言

本书是工科类、经管类、农学类本科《高等数学》课程教学的补充材料,可作为学生期末考和考研备考的学习辅导书,也可作为教师研究《高等数学》教学方法的参考书。考研备考的读者可以按题型的求解目标,把分布于不同章节的典型题进行更大类的归纳。不同层次的读者可根据需要进行筛选取舍。

本书有如下特色:

1. 把全部教学内容以及部分延伸的内容进行提纲挈领地归纳。
2. 按照教学内容的顺序编排典型题,对典型题进行了比较详尽的分类。对各类题型给出了求解思路,对大部分例题给出提示或详解。对一题多解的方法也一一道出。
3. 收集与构造的典型题覆盖面十分广泛,各题的注释是对题型规律的小结或必要的引申,其中不少是作者本人研究的成果。
4. 各道典型题所配上的类题,可作为巩固与提高时的练习。
5. 书的最后,附录了近年来的全国考研数学试题中属于高等数学的部分试题及其答案,供总复习与考研备考时参考。

在本书的写作与付梓过程中,得到了宁正元、王秀丽教授的热情鼓励和大力支持,同时张朝阳、温永仙、姜永、陈超英、陈绩馨、陈建华、官明友、林妹妹老师为本书提供了很多素材和建设性意见,在此谨表诚挚的谢意。

由于水平有限,疏漏之处希望同仁和读者指正。

E-mail: fjauldx@126.com

编著者
2009年1月

目 录

前言

第 1 章 函数、极限与连续	1
§ 1.1 函数	1
§ 1.2 极限的基本概念与基本性质	4
§ 1.3 函数极限的计算	6
§ 1.4 数列极限的存在性判别	10
§ 1.5 极限的初步应用	11
§ 1.6 函数的连续性与间断点	12
§ 1.7 经济中常用的函数与极限在经济中的应用	14
§ 1.8 典型题分类分析	16
题类一、有关函数概念与特性的问题	16
题类二、有关极限基本概念与基本性质的问题	18
题类三、求函数的极限	19
题类四、判别数列极限的存在性与求极限	22
题类五、极限的初步应用问题	25
题类六、判别函数连续性与间断点	28
题类七、证明函数中值命题或方程根命题	30
题类八、极限在经济中的应用	32
第 2 章 导数与微分	34
§ 2.1 导数、微分的概念与基本性质	34
§ 2.2 导数与微分的运算法则与求法	37
§ 2.3 隐函数与参数方程确定的函数的导数	40
§ 2.4 导数的初步应用	42
§ 2.5 典型题分类分析	43
题类一、有关导数概念的问题	43
题类二、求直接函数的导数与微分	46
题类三、求间接函数的导数	50
题类四、导数的初步应用问题	52
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	54
§ 3.1 微分中值定理	54

§ 3.2	利用导数研究函数与平面曲线的一般性态	55
§ 3.3	罗必达法则	59
§ 3.4	泰勒公式	61
§ 3.5	导数在经济中的应用	63
§ 3.6	典型题分类分析	65
	题类一、微分中值定理的初步应用的问题	65
	题类二、证明微分中值命题	71
	题类三、研究函数与曲线的性态	77
	题类四、求函数的最大、最小值的问题	82
	题类五、讨论方程实根的个数	85
	题类六、证明不等式	87
	题类七、利用罗必达法则求极限	92
	题类八、利用泰勒公式求极限和高阶导数值	96
	题类九、利用泰勒公式证明不等式和中值命题	100
	题类十、导数在物理中的应用	104
	题类十一、导数在经济中的应用	106
第 4 章	定积分与不定积分	109
§ 4.1	定积分的概念与基本性质	109
§ 4.2	不定积分的概念与微积分基本定理	111
§ 4.3	积分公式与积分方法	112
§ 4.4	变限积分函数与定积分中值定理	122
§ 4.5	广义积分	124
§ 4.6	定积分在几何中的应用	126
§ 4.7	典型题分类分析	128
	题类一、有关定积分概念与基本性质的问题	128
	题类二、解有关原函数、不定积分概念与基本性质的问题	132
	题类三、求线性型的积分	135
	题类四、求非线性型积分之一(拼凑微分法)	137
	题类五、求非线性型积分之二(分部积分法)	138
	题类六、求非线性型积分之三(变量替换法)	142
	题类七、求非线性型积分之四(综合法)	148
	题类八、求解有关积分中值定理与变限积分函数的问题	151
	题类九、证明积分等式(含有关函数的奇偶性与周期性)	156
	题类十、证明积分不等式(含有关函数的单调性与凹凸性)	159
	题类十一、证明与积分有关的方程根与中值命题	166
	题类十二、广义积分	169
	题类十三、利用定积分求几何度量	172
	题类十四、一元函数微积分在几何中的综合应用	178
	题类十五、积分在物理中的应用	182

题类十六、积分在经济中的应用	188
第 5 章 微分方程与差分方程	190
§ 5.1 微分方程的基本概念	190
§ 5.2 一阶微分方程	191
§ 5.3 二阶微分方程	194
§ 5.4 差分方程	200
§ 5.5 典型题分类分析	201
题类一、求解一阶微分方程	201
题类二、求解二阶微分方程	207
题类三、已知通解或特解,反求微分方程的问题	212
题类四、利用微分方程解函数方程,求未知函数	214
题类五、利用微分方程解几何问题,求未知曲线	216
题类六、利用微分方程构造辅助函数,证明微分中值命题	219
题类七、微分方程在物理等问题中的应用之一(解物体的运动问题)	220
题类八、微分方程在物理等问题中的应用之二(解物质的变化问题)	224
题类九、微分方程在经济等问题中的应用	227
题类十、差分方程及其在经济等问题中的应用	230
第 6 章 无穷级数	233
§ 6.1 常数项级数的概念与性质	233
§ 6.2 数项级数的审敛法	234
§ 6.3 幂级数	236
§ 6.4 傅里叶级数	240
§ 6.5 典型题分类分析	242
题类一、有关级数概念与基本性质的问题	242
题类二、数项级数敛散性的判别之一(正项级数审敛法)	247
题类三、数项级数敛散性的判别之二(交错级数与任意项级数 审敛法)	254
题类四、求幂级数的收敛半径和收敛区域	259
题类五、求幂级数的和函数	262
题类六、求函数的幂级数展开式(间接展开法)	270
题类七、级数应用之一(解数列极限的问题)	273
题类八、级数应用之二(解有关函数的问题)	277
题类九、傅氏系数及其性质	281
题类十、傅氏级数的和以及函数展开成傅氏级数	284
题类十一、级数在经济中的应用(现值存入与逐年提取问题)	289
第 7 章 向量代数与空间解析几何	291
§ 7.1 向量	291
§ 7.2 平面与直线	295

§ 7.3 曲面与空间曲线	298
§ 7.4 典型题分类分析	301
题类一、有关点的坐标、向量的概念与运算的问题	301
题类二、求解平面与直线的方程以及位置关系	305
题类三、求解几个有关平面与直线方程的应用的问题	310
题类四、求解曲面与空间曲线的问题	314
题类五、柱面坐标与球面坐标的初步应用	319
题类六、向量与空间曲线在物理中的应用	320
第 8 章 多元函数微分学	321
§ 8.1 多元函数微分学的基本概念与基本性质	321
§ 8.2 复合函数的求导法	323
§ 8.3 隐函数的求导法	325
§ 8.4 多元微分学在几何中的应用	325
§ 8.5 多元函数的极值	327
§ 8.6 方向导数与梯度	329
§ 8.7 典型题分类分析	330
题类一、有关二元函数、极限与连续的问题	330
题类二、利用定义求二元函数的偏导数与全微分(含存在性判别)	333
题类三、利用一元函数的求导法则求多元函数的偏导数与全微分	337
题类四、求复合函数的偏导数与全微分	339
题类五、求隐函数的(偏)导数与(全)微分	341
题类六、已知偏导数,反求函数或参数(含对偏微分方程作变换)	347
题类七、求解与空间曲线(曲面)的切向量(法向量)有关的问题	351
题类八、求解多元函数的极值与最值问题	357
题类九、最值问题在几何中的应用	362
题类十、梯度与方向导数	366
题类十一、偏导数在经济中的应用	369
第 9 章 二重积分与三重积分	371
§ 9.1 二重积分、三重积分的概念和性质	371
§ 9.2 二重积分的计算	372
§ 9.3 三重积分的计算	375
§ 9.4 重积分在几何中的应用	379
§ 9.5 典型题分类分析	380
题类一、有关二重积分、三重积分概念与基本性质的问题	380
题类二、二重积分计算之一(基本积分法:利用两种坐标计算二重积分)	382
题类三、二重积分计算之二(二重积分法的几种技巧)	387
题类四、交换二次积分次序与计算二次积分	390

题类五、有关二重积分综合应用问题	394
题类六、三重积分计算之一(基本积分法:利用三种坐标计算三重积分)	396
题类七、三重积分计算之二(利用对称性计算三重积分)	403
题类八、重积分在几何中的应用	404
题类九、重积分在物理中的应用	408
第 10 章 曲线积分与曲面积分	414
§ 10.1 曲线积分	414
§ 10.2 曲面积分	418
§ 10.3 三大积分公式	422
§ 10.4 平面曲线积分与路径无关的条件与二元全微分形式的原函数	425
§ 10.5 “两量”与“三度”	426
§ 10.6 典型题分类分析	428
题类一、计算对弧长的曲线积分	428
题类二、计算对坐标的曲线积分之一(直接法)	431
题类三、计算对面积的曲面积分	434
题类四、计算对坐标的曲面积分之一(直接法)	438
题类五、平面曲线积分与路径无关性的判别与等价性问题	441
题类六、计算平面上对坐标的曲线积分之二(间接法,含格林公式应用)	446
题类七、计算空间中对坐标的曲线积分之二(间接法,含斯托克斯公式应用)	453
题类八、计算对坐标的曲面积分之二(间接法,含高斯公式应用)	455
题类九、计算“两量”与“三度”	461
题类十、曲线积分与曲面积分在物理中的应用	465
附录 2006 ~ 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题(高等数学部分)选解	469
■ 2006 年数学一 ~ 数学四试题选解	469
■ 2007 年数学一 ~ 数学四试题选解	473
■ 2008 年数学一 ~ 数学四试题选解	483
■ 2008 年农学门类数学试题选解	493

第1章

函数、极限与连续

§ 1.1 函数

高等数学是建立在实数集基础上的,以函数作为研究对象的一门学科.

一、函数的基本概念与基本特性

1. 函数的基本概念

函数的概念包含函数定义、函数值、函数两要素、函数图形等.

(1) 函数定义就是对函数的五个因素(自变量、因变量、定义域、对应法则和值域)进行定义. 函数与函数表达式不同. 函数表达式是表示函数的一种形式,表示函数还可以用其他的形式(如列表法、图形法等),不要以为函数就是式子.

$f(x)$ 是函数的记号, $f(x_0)$ 是函数值的记号(是 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值).

(2) 函数的定义域 D 与对应法则 f 是函数的两要素.

函数的定义域是使函数有意义的自变量的取值范围. 对实际问题中的函数,其定义域应由问题的实际意义确定. 如果函数是用公式法表示的,且没赋予实际意义,则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量所有可能取值的全体.

对用公式法表示的函数,求定义域的方法有:

① 求初等函数定义域,要注意几个基本原则:分式 $\frac{1}{g(x)}$ 中的分母 $g(x) \neq 0$; 根式 $\sqrt{g(x)}$ 中的被开方式 $g(x) \geq 0$; 对数 $\log_a g(x)$ 中的真数 $g(x) > 0$; 反正弦 $\arcsin g(x)$ 中 $|g(x)| \leq 1$, 等等; ② 若函数表达式由几项经四则运算而成,则其定义域是各项定义域(注意分母非零)的交集; ③ 已知 $f(x)$ 定义域 D_f , 要求复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义域,就是解不等式组: $x \in D_\varphi, \varphi(x) \in D_f$; ④ 反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域等于原来函数 $f(x)$ 的值域; ⑤ 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集; ⑥ 对由极限、导数、积分确定的函数,其定义域要保证这些分析运算有意义; ⑦ 用无穷级数定义的函数,其定义域是使得级数收敛的参变量的取值范围.

对应法则是函数的核心,是正确理解函数概念的关键. 对应法则只是表示自变量与因变量之间的对应关系,当函数用公式法给出时,对应法则表示公式里的全部运算.

两个函数只有当它们的定义域相同,且对应法则也相同时,这两个函数才是相同的(与变量记号无关).

(3) 函数的图形就是指满足函数关系的点 (x, y) 的集合. 描绘函数图形的基本方法是描点连线,至于要描出哪些点以及相邻两点用什么线连接,则要考虑到函数的一些性质与几何状态(如奇偶与对称、升降与凹凸等). 对简单函数,其图形可以直接给出,比如线性函数的图形是直线,二次函数的图形是抛物线.

函数图形在 x 轴和 y 轴上的投影分别就是函数的定义域和值域.

函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 的图形关于 y 轴对称, $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 的图形关于 x 轴对称, $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 的图形关于原点对称,另外函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

今后研究函数时,常用数形结合法,即把公式法和图形法结合起来分析处理问题.

2. 函数的基本特性

函数的基本特性包含奇偶性、周期性、单调性与有界性. 并不是函数都具有上述的特性,而是在研究函数时,常要研究函数是否具有这些特性. 其中,函数是否“单调”或“有界”与所讨论的区间有关.

(1) 具有奇、偶性的函数的定义域关于原点对称.

设定义域 D_f 是包含原点且关于原点对称的区间, 那么: 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(0) = 0$; 反之, 如果 $f(0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 肯定不是奇函数.

$f(x)$ 既是奇又是偶函数的成分必要条件是 $f(x) = 0$. 非零的常数函数是偶函数.

除了利用奇偶性定义外, 判别函数奇偶性的方法还有:

① 利用 $f(-x) \pm f(x)$ 是否为零;

② 利用奇偶函数的四则运算, 即(在共同的有定义的对称区间内) 函数的奇偶性有如下的运算规律:

奇 + 奇 = 奇, 偶 + 偶 = 偶, 奇 + 偶 = 非奇非偶, 奇 $\times$ 奇 = 偶, 偶 $\times$ 偶 = 偶, 奇 $\times$ 偶 = 奇;

③ 利用奇偶函数的复合运算;

④ 利用奇函数的反函数(还是奇函数) 等等.

奇偶函数在分析运算中具有比较重要的地位, 利用下述的结论可以把一般函数转化为奇偶函数来进行研究: 设 $f(x)$ 在关于原点对称的区间上有定义, 则 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和, 即

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

其中 $G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇函数, $H(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数.

注 在分析运算中, 奇偶性与求导、原函数、积分、级数有密切联系.

(2) 周期函数的周期通常是指其最小正周期, 但不是任何函数都有最小正周期. 证明一个函数不是周期函数, 可以用反证法. 证明函数 $f(x)$ 的周期为 T , 可以证明恒等式 $f(x+T) - f(x) = 0$.

注 周期函数与导数、原函数、积分、级数有密切联系.

(3) 函数单调性(又称增减性) 除了用 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 形式定义外, 可以用下列的等价定义: 设 $f(x)$ 在区间 I 内有定义, 若对 I 中任两个不同的点 x_1, x_2 恒有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 (< 0),$$

则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加(减少), 并称 I 是 $f(x)$ 的单调增加(减少) 区间.

等价定义把函数的单调性用曲线上的割线的斜率来表示. 这对后面利用导数判别单调性的理解有一定的帮助.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 和 $[b, c]$ 上单调增加, 则 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上仍单调增加. 但是, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 和 $(b, c]$ 上单调增加, 那么 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上未必单调增加(注意其中的端点 b). 函数的单调性与考虑的区间有很强的相关性.

注 函数单调性是函数的很重要的性质, 它在研究函数极限、函数作图、函数极值、证明不等式以及判别方程根的个数等问题中有广泛的应用.

(4) 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在正数 K , 使得对任意的 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq K$, 或存在常数 m, M , 使得对任意的 $x \in I$, 恒有 $m \leq f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是有界的.

定义中的正数 K , 常数 m, M 各只要找一个就行了, 它们都不唯一.

若对任意的正数 K , 存在 $x_0 \in I$ 使得 $|f(x_0)| > K$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是无界的.

注 在分析运算中, 与有界、无界有关的结论有: 极限存在的函数必是局部有界的, 极限存在的数列必是有界的; 极限为无穷大的函数必是无界的; 闭区间上的连续函数必是有界的; 闭区间上的可积函数必是有界的.

二、函数的基本运算与函数分类

1. 函数的基本运算

函数的基本运算包括四则运算、复合运算和反演运算三类, 后面的求极限、求导数或微分、求积分等是函数的分析运算.

(1) 对常数 k , 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 施行以下的四则运算可以得到新的函数:

$$kf(x), f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}.$$

反之,把一个复杂的函数分解成若干个简单的函数的四则运算,就是函数的分项法.分项法在分析运算中经常要用到.

(2) 对函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 施行复合运算,通俗地理解,就是函数套函数,从而可以得到复合函数(其中, $y = f(u)$ 为外层函数, $u = \varphi(x)$ 为内层函数, u 为中间变量):

$$y = f[\varphi(x)].$$

但要注意,不是任何两个函数都能复合成一个复合函数的.复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成.

注 把一个复杂的复合函数分解成若干个简单的函数的复合运算,这个过程称为函数的分层法.复合函数的复合运算过程是由内到外进行的,而复合函数的分层过程与复合运算过程恰好是反序的——由表及里逐步设中间变量,因此,复合函数的分层俗称“剥皮法”.正确而熟练掌握这一方法,将给今后学习带来很多方便.另外,研究复合函数时,还常常用到“换元法”和“还原法”.

(3) 对函数 $y = f(x)$ 施行反演运算,实质是由函数 $y = f(x)$, $x \in I$ 反解出新函数 $x = \varphi(y)$,这新函数是 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上把 $x = \varphi(y)$ 改号成 $y = \varphi(x)$,并记为 $f^{-1}(x) = \varphi(x)$.

单调区间上的函数一定有反函数.函数与其反函数的图形关于直线 $y = x$ 是对称的.由于 $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$,函数与其反函数满足相消关系:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

2. 关于函数分类

研究函数时,常要对函数进行适当的分类,分类思维是高等数学中最常用和最重要的思维方法.

(1) **基本函数**:它是构成复杂函数的基本单位,是常数函数 $y = C$,幂函数 $y = x^a$ (a 是常数),指数函数 $y = a^x$ (a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$),对数函数 $y = \log_a x$ (a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$),三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ 和反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 等的统称.

对基本函数的定义域、图形、特性以及极限、导数、积分的理解与记忆,对学好高等数学课程是相当必要的.

(2) **初等函数**:初等函数是最常见的函数,其内涵有三点:①由基本函数构成;②用有限次基本运算;③可以用一个式子表示.

多项式函数、有理函数、无理函数统称为代数函数,代数函数是初等函数.初等函数中,代数函数以外的函数统称为超越函数.如下的双曲函数是超越函数,是初等函数:

$$\text{双曲正弦 } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{双曲余弦 } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{双曲正切 } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$,一般是初等函数.

注 研究初等函数时,所采用的方法有分项法、分层法、换元法、恒等法等.

(3) **分段函数**:分段函数简单说就是用不止一个的式子表示(即分段表示)的函数.

例1 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$,符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$,取整函数 $y = [x]$,最大

值函数 $y = \max(x, x^2)$,都是分段函数.

一部分分段函数也是初等函数,大部分分段函数不是初等函数.

注 研究处理分段函数的方法常称为“分段法”:分段函数的定义域是各段表示式的定义域的并集,分段函数的函数值是自变量所在的段的函数的值,分段函数作图时必须分段分别作图(各段的图形可能相连接,也可能断开).以后讨论分段函数的极限、连续、导数、积分等问题时也都都要用到分段方法,尤其对分段点的处理要特别小心.

(4) **直接函数与间接函数**:基本函数、初等函数与分段函数,都是直接用自变量的表达式来表示因变量的,都是直接函数.间接函数主要有由一个二元的方程 $F(x, y) = 0$ 来确定的隐式函数 $y = y(x)$,以及由含参数 t 的方程组 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ 确定的参数函数 $y = y(x)$.

(5) **无穷数列**:是自变量为正整数 n 的特殊函数 $y_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$,可简记为 $\{y_n\}$ 或 y_n .

套用函数的特性,数列也有相应的单调性与有界性.

判别简单数列的单调性,可以用观察法、放缩法;对复杂数列的单调性,可以用比较法、比值法或归纳法以及转化为函数的单调性等加予判别.

数列与其极限对无穷级数有密切关系.

注 除了以上函数类型外,还可以用极限、导数、积分、级数或相关运算来表示一个函数.

§ 1.2 极限的基本概念与基本性质

极限是高等数学的理论基础和生命线,它是指函数(或数列)无穷变化的趋势.

一、极限的基本概念

1. 极限的直观描述

对函数 $y = f(x)$,若自变量 x 无限趋于“某个目标”(有限值或无穷大,用 $x \rightarrow ?$ 表示,这里问号指“某个目标”),对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A ,那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 x 趋于?时的极限,或当 x 趋于?时 $f(x)$ 的极限为 A ,记为

$$\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow ?).$$

其中,“lim”是极限符号,它的下方 $x \rightarrow ?$ 是极限条件.

如果函数没有极限,就称极限不存在.

特别地,数列的极限记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ 或 $y_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$,此时也称数列 y_n 收敛于 A .如果数列极限不存在,也称数列是发散的.

注 ① 针对不同场合,“某个目标”即?,一共有 $x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, -\infty, +\infty$ 等六种情形.函数在不同的自变量变化情形下的极限一般是不一样的,计算极限时,lim下方中的“?”号不可省.在一个函数前面加上lim,表示对该函数进行极限运算,其结果是函数的极限,即函数无限接近于的那个数.

② 若当 $x \rightarrow ?$ 时, $f(x)$ 不能都无限接近于同一个常数,这时极限 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x)$ 不存在.在极限不存在的类别里,如果是由于 $f(x)$ 的值在两个或多个数值之间摆动,称 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x)$ 不存在(“摆动型”或“振荡型”极限不存在),可记为 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) \nexists$;如果是由于 $f(x)$ 的绝对值无限增大,称极限是无穷大(“无穷型”极限不存在),记为 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \infty$.如 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \nexists, \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ 等等.

③ 若 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = 0$,则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow ?$ 时为无穷小.

④ 若 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \infty$,则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow ?$ 时为无穷大.

⑤ 利用直观分析方法(或结合图形)可以判别简单函数(或数列)的极限,对基本函数,当自变量趋于定义区间端点时的极限就可以用此法.如:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (\text{其中 } |q| < 1), \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \nexists, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C (C \text{ 是任意常数}), \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} k|x - x_0| = 0 (k \text{ 是常数}), \text{等等.}$$

2. 极限的精确定义及其等价条件

极限的精确定义就是用 ϵ -语言对极限概念进行严格的定量描述.利用精确定义验证极限时,关键是对

任给的 $\epsilon > 0$, 要找符合定义要求的正整数 N (或正数 δ, X). 由于在工科、经管类以及农学类本科考试与考研中, 不要求用极限的严格定义来证明或推理, 因此, 可以直接用下列等价条件来代替极限的严格定义:

$$\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = A \Leftrightarrow |f(x) - A| \leq \beta(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow ?),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \Leftrightarrow |y_n - A| \leq \beta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

利用这个条件来验证极限时, 关键是寻找满足条件的函数 $\beta(x)$ (或数列 β_n).

例 1 因为 $\left| \frac{\sin x + x}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{x} = 1$.

例 2 利用三角的和差化积公式及不等式 $|\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq |\theta|$; 得

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0| \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.

尽管极限的精确定义可以不作较高要求, 但定义中隐含的一些信息还是要给予重视: 如, 从定义可以看出, 数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 与有限项无关, 即增加、减少或改变数列的有限项, 不影响数列的敛散性; 函数的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 无关, 即增加、去掉或改变 $f(x_0)$, 不影响极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. 所以, 极限具有两重性: 既是无穷变化趋势, 又是局部的变化趋势.

3. 关于极限的关系

(1) **单侧极限与双侧极限的关系:** 函数的双侧极限存在的充分必要条件是两个单侧极限都存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

若左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 、右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 有一个不存在或虽然两者都存在, 但不相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 不存在.

数列没有双侧极限, 但有下列的数列极限与其奇偶子列极限之间的关系:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = A.$$

例 3 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

(2) **函数极限与数列极限的关系:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A \text{ (反之不然)}.$$

这是利用函数极限求数列极限的依据.

(3) **有极限的函数与无穷小的关系:** 以“lim”表示自变量的同一变化过程, 则有: 函数有极限的充分必要条件是函数可写成一个常数与一个无穷小之和, 即

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是无穷小.

这个性质隐藏着一个道理: 极限方程 $\lim f(x) = A$ 的解为 $f(x) = A + \alpha(x)$ (其中 $\alpha(x)$ 是无穷小). 当已知条件为 $\lim f(x) = A$ 时, 要研究 $f(x)$ 的某些性质, 可以先把 $f(x)$ 表为

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

然后利用无穷小的有关性质研究 $f(x)$.

(4) **无穷小与无穷大的关系:** 互相倒数, 即若 $f(x) \neq 0$, 则

$$\lim f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

二、极限的基本性质

极限的基本性质主要描述极限与有界, 极限与符号之间的关系. 为了方便, 把无穷小与无穷大的简单性质

也归入本目.

1. 极限存在条件下函数的局部性质

(1) **局部有界性**: 若函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时有极限, 则它在 x_0 的某去心邻域中有界.

注 对数列来说, 收敛的数列一定有界. 数列收敛是数列有界的充分条件, 不是必要条件, 也就是说, 如果数列有界, 不能断定数列一定收敛. 如数列 $y_n = (-1)^n$ 有界, 但却是发散的. 无穷小是局部有界的, 无穷大是无界的.

(2) **局部保号性**: 已知极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的正、负号, 则函数在点 x_0 的某去心邻域内与其极限保持相同的正、负号. 用此, 可以证明在“局部”范围内成立的函数不等式.

2. 极限存在条件下极限的性质

(1) **保号性**: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且存在一个 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$) (注意等号).

(2) **保序性**: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 且存在一个 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(3) **估值法**: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且存在一个 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $m \leq f(x) \leq M$, 则 $m \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq M$.

(4) **唯一性**: 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

(5) **夹值同限准则**: 若有 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

3. 自变量在同一个变化过程中无穷小、无穷大的性质

以下性质要注意对比、类比:

(1) **无穷小的有界乘**: 无穷小与有界函数的乘积为无穷小.

(2) **无穷小的运算**: 有限个无穷小的和、差、积为无穷小.

(3) **无穷大的有界和**: 无穷大与有界函数的和(或差)为无穷大.

(4) **无穷大的乘积**: 无穷大的乘积为无穷大.

注 无穷多个无穷小之和未必是无穷小; 两个无穷大之和未必是无穷大.

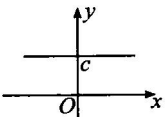
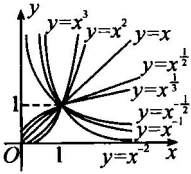
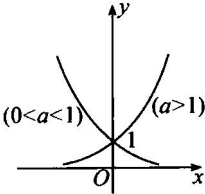
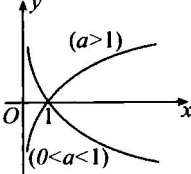
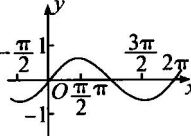
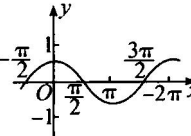
§ 1.3 函数极限的计算

极限是最为基础和重要的一种分析运算. 在掌握极限计算之前, 一定要把极限的类型搞清楚. 从研究对象来分, 有函数的极限, 也有特殊函数即数列的极限; 从自变量趋于的方式来分, 有自变量趋于有限值时的极限和自变量趋于无穷大时的极限; 从自变量趋于的方向来分, 有单侧极限和双侧极限. 同时, 对各子类与子类之间的联系要熟记.

一、基本函数与初等函数的极限

1. 基本函数的极限

基本函数当自变量趋于定义区间端点时的极限, 均可用直观分析方法或单双侧极限关系给出. 记住下表中的结论是必要的.

基本函数	单边极限	双边极限
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} C = \lim_{x \rightarrow +\infty} C = C$	$\lim_{x \rightarrow \infty} C = C$
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在且非 ∞
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 都不存在且非 ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在且非 ∞
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在且非 ∞

2. 初等函数的极限

由于初等函数在有定义的区间上连续,所以要求初等函数可考虑用下列的直接代入法:若 $f(x)$ 为初等函数(含基本函数),且 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间内的点,则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

二、极限的四则运算法则与复合运算法则

1. 极限的四则运算法则

在函数 $f = f(x), g = g(x)$ 的极限 $\lim f, \lim g$ 都存在的条件下,利用下列法则可把极限分项成有限个单极限的运算:

$$(1) \lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g; (2) \lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g;$$

特别地 $\lim kf = k \lim f$ (k 是常数); $\lim(f^n) = (\lim f)^n$ (n 是正整数);

$$(3) \text{当分母的极限 } \lim g = B \neq 0 \text{ 时, } \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

注 为强调极限存在性,上述法则左边的极限相应记为 $A \pm B$ 型、 $A \cdot B$ 型、 $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) 型,针对这些形式

的极限计算方法称为求极限的“分项法”。

2. 关于不能套用四则运算法则的极限类型

如果函数是由四则运算构成,但是各项极限中有不存在的情况,或函数由无穷项运算构成,那么计算极限就不能用四则运算法则。此时可能要用到下列算法:

(1) 若 $\lim f \exists, \lim g$ 存在,则 $\lim(f \pm g) \exists$,但 $\lim(f \cdot g)$ 是否存在不能肯定。

(2) 若 $\lim f \exists, \lim g \exists$,那么 $\lim(f \pm g), \lim(f \cdot g)$ 是否存在都不能肯定。

(3) 若 $\lim f = 0, |g| \leq K$ (常数),则 $\lim(f \cdot g) \stackrel{0 \cdot \text{有界}}{=} 0$ 。

(4) 若 $\lim f \neq 0, \lim g = 0$,则 $\lim \frac{f}{g} \stackrel{\frac{A}{0} (A \neq 0)}{=} \infty$ 。

3. 关于未定式极限的计算

不能套用上述方法的极限中,常见的有:分子、分母的极限都是零,记为 $\frac{0}{0}$,以及 $\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 这七种情况(统称未定式极限),各种未定式极限的计算,共同点是利用极限的保值变形消除不定性。常见的有约零因子、分子分母同除以某个式子、等价替换等。后面利用罗必达法则也是一种消除极限不定性的方法。

4. 两类有理式的极限

求 $\frac{0}{0}$ 型的有理式极限,先把分子、分母分解出零因子,然后约分,化成其他形式极限进行计算,即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)^p P(x)}{(x-x_0)^q Q(x)} = \begin{cases} P(x_0)/Q(x_0), & p = q, \\ 0, & p > q, \\ \infty, & p < q \end{cases}$$

求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的有理式极限,先把分子、分母中的最高次项保留,而把其他各项去掉(“抓大头”),然后约分,就可得到结果,即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & m = n, \\ 0, & m < n, \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10} (2x-1)^{20}}{(3x+2)^{30}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10} \cdot (2x)^{20}}{(3x)^{30}} = \frac{2^{20}}{3^{30}}.$

5. 复合函数的极限运算法则

复合函数的极限运算法则就是利用变量替换法计算极限。常用的有根值替换、倒数替换等。

注 换元时,极限条件要同步换掉。

例 2 设 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f\{f[f(x)]\}$ 。

解:用换元法,得 $\lim_{x \rightarrow \infty} f\{f[f(x)]\} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 1} f[f(u)] \stackrel{v=f(u)}{=} \lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = 1$ 。

三、两个重要极限与无穷小等价替换的应用

1. 两个重要极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。这是最重要的极限,通过它可以求出许多无法直接约去零因子的、尤其是分子或分母中

含有三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型的未定式。只有 $\frac{0}{0}$ 型的极限,且函数形式化为 $\frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}$ 后才能用这个重要极限,即:当

$\lim_{x \rightarrow ?} \varphi(x) = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow ?} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ 。利用商的极限法则,该极限的一个等价形式是:当 $\lim_{x \rightarrow ?} \varphi(x) = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow ?} \frac{\varphi(x)}{\sin \varphi(x)} = 1$ 。