中等專業學校教學用書

代數學教程

上册

Р. А. КАЛНИН著
趙根榕　張理京譯

高等教育出版社

中等專業學校教學用書

代數學教程

上册

P. A. 卡爾寧著
趙根榕 張理京譯

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的卡爾寧(Р. А. Калнин)著"代數學教程"(Курс алгебры для техникумов)1952年初版翻譯的。原書經蘇聯高等教育部審定爲中等技術學校教科書。

本書原由商務印書館出版,自1954年8月起改由本社出版。

代 數 學 教 程

上 冊

卡 爾 寧 著

趙根榕 張理京 譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

〔北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號〕

新華書店華東總分店總經

商務印書館印刷廠

上海天通菴路一九〇

開本787×1092 1/25 印張5 10.5/12

一九五四年八月上海新一版

一九五四年八月上海第一次印刷

趙鳳

原　　序

本書爲適應蘇聯高等教育部批准的中等技術學校數學教學大綱而寫，預定作爲中等技術學校各專業的教本。中間專門有一章講結合的初等理論，是爲中技社會經濟專業用的。關於複數的一章是爲中技電機及機械製造專業而寫的，其中也講到複數的三角形狀。

按照中等技術學校的需要，這教本中關於基本近似算法及對數算尺的理論與實踐，比十年制中學的教本要講得詳細些。

在中等技術學校教本中，當然不可能把初等代數中的許多基本問題（關於無理數，指數及對數函數，以及複數等等的理論）講得十分嚴格。因此著者有意地採用了一些不加證明的命題，而在適當的地方作必要的說明。

著者對於材料的講解力求簡短，避免跟讀者"聊閑天"。課文中引入了好些例題與有解答的問題；有時這些例題在新概念的定義之前，有時在這些定義之後。著者把圖象說明的方法用得十分廣泛，並且藉此力求在教程中有機地輸入函數概念及近世數學上的其他概念。

教本中除了有理論及在課文中所選出的例題之外，教程的每一章還各有一套習題及問題。

著者儘可能使讀者熟悉俄羅斯傑出數學家對科學的貢獻。根據中技數學教學大綱說明書中的建議，我們在好些地方給出簡短的歷史知識。

著者

上册目錄

代數學教程

第一章　最簡單的函數及其圖象

§1 常量與變量

研究我們周圍自然界中、技術上、社會生活上所發生的各種現象和過程時，我們必須要處理各種的量（長度、重量、體積、温度、速度、電流強度、人口密度等等）。

觀察的結果告訴我們，參與已知現象的有些量始終保持同一值，就是說，它們是不變的，而另一些量則取得不同的值，它們是可變的。

例 1　物體從某一高度 h 自由下落時，落體的速度及其跟地面的距離是可變的；但，例如物體的重量卻保持不變。

例 2　若把圓形金屬板加熱，它的直徑和面積就要改變；但圓板的周長與直徑之比保持不變。

例 3　若三角形 ABC 的頂點 C 在跟底邊平行的直線 AB 上移動，而底邊保持不變（圖 1），則三角形側邊與各角就要變化；但三角形的面積及其各內角之和仍保持原值。

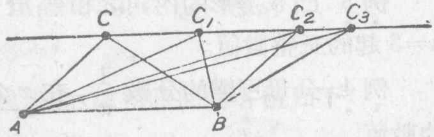

圖　1

在所給問題的條件下，保持同一值的量，叫做常量。

在所給問題的條件下，取得不同值的量，叫做變量。

這樣說來，在上述各例中，落體的重量、圓板的周長與其直徑之比、三角形的面積及其內角之和都是常量；而落體的速度、它跟地面的距離、圓板的直徑、三角形的各角都是變量。

同一個量在某些情況下可看作常量，而在另一些情況下可看作變量。例如鐵的比重是常量，其值等於 7.8。

但若我們要來考慮各種不同的金屬：鋁、銅、錫、鐵、鋅、銀等等，那末這時的比重就成爲變量了。

通常用頭幾個拉丁字母 a, b, c, d 等等來記常量，用末後幾個拉丁字母 x, y, z, u, v 等等來記變量。

§2 變量可能取的值

例1 各種型式的飛機有不同的上昇高度 h，但每一種型式的飛機有它的"上昇限度"，或者說昇得最高的高度，比方說是 15 公里；飛機要想再往上昇是不可能的。

如果從這種飛機起飛時開始，觀察它的飛行，就可以說：飛機所達高度是個變量，它可能取 0 與 15 公里之間的任何值。

例2 研究空氣溫度對於某種植物生長情形的影響的生物學家只在一定的圍範內，比方說從 5°C 到 35—40°C，改變溫度，更高或更低的溫度就可能使植物致死。

例3 凸 n 邊形的內角之和等於 $2d(n-2)$。[1] 這裏 n 只可能取從 $n=3$ 起的正整數值。

例4 分母可變的分數 $\frac{1}{x}$，在 x 爲不等於零的任何值時，有一定的數值。

變量 x 在所研究現象的具體條件下所能取的一切值，規定叫做該變量可能取的值。

§3 函數與自變量

在科學及其無數應用上，所關心的倒不是有變量存在這件事實的本身，而是所給現象中各種變量間的關係；換句話說，我們所關心的是

[1] 式中字母 d 代表一直角，90°。以下準此。——譯者。

底下的問題:一個量的變化怎樣引起另一個量的變化? 例如,讓金屬桿受拉力作用時,由簡單的實驗研究可以發現:負荷增大時,桿長也有一定程度的增大。隨着發動機的轉數變化,飛機的速度也就按一定的規律而變化。

我們來詳細分析幾個簡單的例子。

例1 已給底爲 $a=8$ 公分的矩形。若其高 h 取以下各值:

$$h=1,1.5,2,2.5,3,4,\cdots(\text{公分}),$$

問這矩形的面積 F 怎樣變化?

顯然,面積 F 的對應值將爲:

$$8,12,16,20,24,32,\cdots(\text{平方公分})。$$

例2 人騎自行車平均每分鐘行 400 公尺。問所行路程 S 怎樣隨時間 t 而變化?

若使時間 t 的值爲

$$t=1,2,3,4,\cdots(\text{分}),$$

則路程 $S=400,800,1200,1600,\cdots$(公尺)。

例3 均勻運動物體的速度 v 爲下列各值時:

$$v=10,12,15,18,20,30,\cdots(\text{公尺/秒})$$

經過路程 360 公尺所需的時間要多少?

因運動時間等於所走路程被速度除,故得時間的各值如下:

$$t=36,30,24,20,18,12,\cdots(\text{秒})。$$

上述各例中都有兩個變量,彼此間有這種關係,其中一個量變化,會引起另一量按一定規律變化。

定義 如果對於變量 x 的每一個可能取的值,都對應着有變量 y 的完全確定值,那 y 就叫做另一變量 x 的函數或因變量。變量 x 叫做自變量。

關於變量 x 及 y 兩者,我們說它們有函數依從關係。

拿前面的例子來看,可以說:桿長是拉力(負荷)的函數,飛機速度

是發動機轉數的函數。

函數 y 可能依賴於好幾個自變量。例如矩形面積是兩個自變量——矩形的底及高——的函數。直角平行六面體是三個自變量——長、寬及高——的函數。

我們要知道,自變量和因變量這兩個名稱是有條件的。一個變量之為自變量或因變量,是要由問題的具體條件來定的。因變量和自變量的地位常常是可以交換的;可以說,圓面積是半徑的函數,因為對於每個半徑值,對應着有圓面積的一定值;但反過來說也是對的:圓半徑是其面積的函數,因為對於圓面積的每個數值,對應着有圓半徑的一定值。

§4 直角坐標系

1. 前言 看電影的人可以根據兩個數在電影院中正確地找到他的坐位,這兩數便是印在入場劵上的排數及該排的號數。

電氣匠會把開關裝在你所需要的地方,如果——比方說——告訴他下面的事:在窗子右邊距窗 0.5 公尺,距地面高為 1.5 公尺。在上述兩例中,用兩個數可能定出平面上的方位。平面上點的位置的一般定法如下。

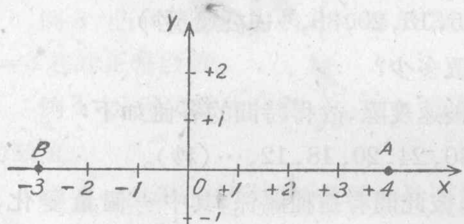

圖 2

在平面上作互相垂直的兩根直線: OX 及 OY; 在每根直線上選取正方向,用箭頭表示(圖 2)。

有向直線 OX 及 OY 叫做坐標軸,而 OX 叫做橫坐標軸, OY 叫做縱坐標軸,軸的交點 O 叫做坐標原點。再選定單位尺標,也就是一根線段 e,它的長度取作單位。

與坐標軸上起點在 O 處的任何線段對應着有一個正數或是負數，那數的絕對值表示線段在所定單位尺標下的長度，其正負號則指明線段的方向。

在坐標軸正方向上截取的線段對應着正數，在相反方向上截取的線段則對應着負數。

例如，線段 OA 對應着數 $(+4)$，線段 OB 對應着數 (-3)，線段 OD 對應着數 (-5)（圖 2）。

設 M 是平面上任意點。如果量出點 M 到坐標軸的距離，它跟坐標軸的相對位置便可定出。為此，我們從點 M 向坐標軸作垂線 MP 及 MQ（圖 3）；在坐標軸上得出兩根線段 OP 及 OQ。用單位尺標量有向線段 OP，並使量得的結果具有相應的正負號。得到的數叫做點 M 的橫坐標。

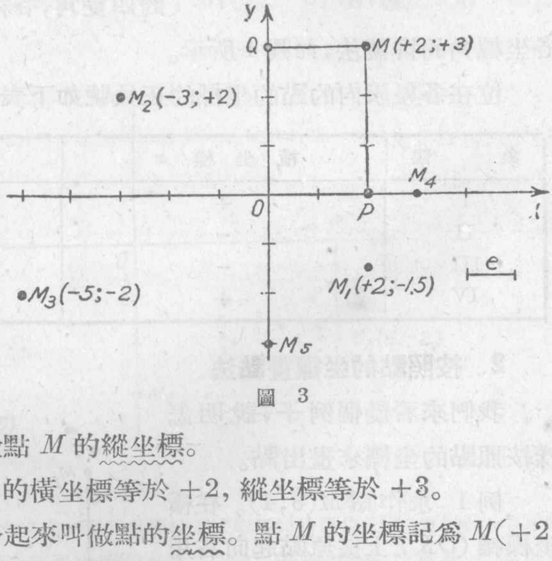

圖 3

用同一單位尺標量線段 OQ 並使量得結果取相應的正負號後，得到另一個數，叫做點 M 的縱坐標。

在第 3 圖中，點 M 的橫坐標等於 $+2$，縱坐標等於 $+3$。

橫坐標與縱坐標合起來叫做點的坐標。點 M 的坐標記為 $M(+2, +3)$；括弧裏面第一個數總是橫坐標，第二個數總是縱坐標。

應當記住，點的坐標是相對的數；我們要看所給點跟坐標軸的相對位置，而給這數以 $(+)$ 號或 $(-)$ 號。圖 3 中點 M_1 的坐標為：橫坐標等於 $+2$，縱坐標等於 -1.5；點 M_2 的坐標為：橫坐標等於 -3，縱坐標等於 $+2$；點 M_3 的坐標為 $(-5, -2)$。

橫坐標軸上的點的縱坐標等於零,如 $M_4(3,0)$。縱坐標軸上的點的橫坐標等於零,如 $M_5(0,-3)$。坐標原點的橫坐標及縱坐標都等於零: $O(0,0)$。

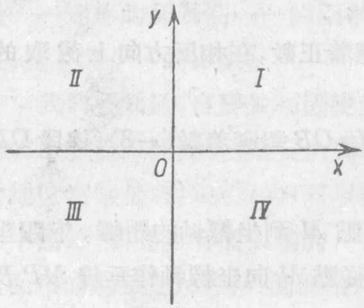

圖 4

爲書寫簡便起見,以後規定把正數坐標前面的正號(+)略去:我們以後不寫 $M(+2,+3)$,而寫 $M(2,3)$;不寫 $N(-5,+4)$而只寫 $N(-5,4)$。

坐標軸 OX 及 OY 把平面分成四部分,各稱爲象限。坐標軸相交而成的四隻角,各稱爲坐標角。各象限及各坐標角的排號法,如圖 4 所示。

位在各象限內的點的坐標的正負號如下表:

象　限	橫 坐 標 x	縱 坐 標 y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

2. 按照點的坐標畫點法

我們來看幾個例子,說明怎樣按照點的坐標來畫出點。

例 1　求作點 $M(3,4)$。在橫坐標軸 (OX) 上從原點起向右用所選的單位尺度(比方說是 1 公分或 1 格)截取三段(量三下),得線段 OP (圖 5);然後在縱坐標軸 (OY) 上向上用同一單位尺度量四下,得線段 OQ。在點 P 及 Q

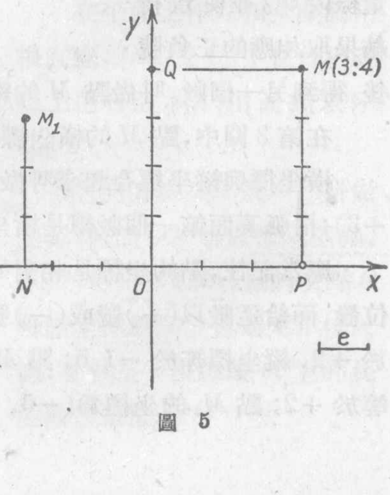

圖 5

處作坐標軸的垂線 PM 及 QM，這兩根垂線的交點 M 便是所求點。

點 M 也可用另法作出如下：在 OX 軸上截取線段 OP 使它等於 3 個單位尺度，在點 P 處作垂線，並在這垂線上向上截取線段 PM 使它等於 4 個單位尺度。

以後我們一直要用這個方法來作，因爲它只需要作一根垂線，比較實用。

例 2　求作點 $M_1(-2.5, 3)$。在橫坐標軸上，從原點起向左截取線段 ON，使它的長度等於 2.5；在點 N 處作 OX 軸的垂線，並在垂線上向上截取線段 NM_1，使它的長度等於 3，於是得所求點 M_1。

點 $M_2(-5, -3.5)$，$M_3(4, -2)$，$M_4(0, -3)$ 的作法如第 6 圖所示。

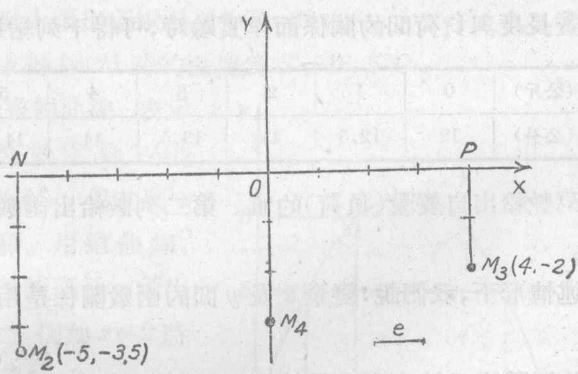

圖　6

註　按照坐標作點時，常常得在不同的坐標軸上採取不同的單位尺標。當點的一個坐標的絕對值比另一坐標的絕對值大得多時，我們就常這樣做。例如，要在方格紙上作出點 $M(3, 120)$ 時，可在橫坐標軸上取兩格作爲單位，在縱坐標軸上取一格作爲十個單位。不過通常我們認爲坐標軸上的尺標是一樣的。

3. 結論　1. 按照定義，互相垂直的兩軸 OX 及 OY，它們的交點 O 以及所選的單位尺標一起，就是所謂直角坐標系。

2. 坐標平面上點的位置可用數偶——該點的坐標——來定出。

數偶中的第一個數叫做該點的橫坐標,第二個數叫做縱坐標。寫成一般形式時,橫坐標用 x 來記,縱坐標用 y 來記,於是把點 M 寫成: $M(x, y)$。

3. 點的坐標是相對的數,因爲它們表示有向線段的長度。

4. 以一定次序寫出的每一數偶,可用平面上的點來表示,只要把第一個數當作點的橫坐標,把第二個數當作點的縱坐標。

§5 函數的三種基本表示法

變量間的函數關係,可以用各種不同的方式來表示。最常用的是底下這三種。

1. 表格法　作任何實驗或硏究任何現象時,常得出兩列數。例如,爲確定彈簧長度與負荷間的關係而作實驗時,可得下列結果:

$y=12+0.5x$
$y=b+kx$

負荷 x (公斤)	0	1	2	3	4	5	6
長度 y (公分)	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15

第一列數給出自變量(負荷)的值。第二列數給出函數(彈簧長度)的對應值。

在上述情形下,我們說:變量 x 及 y 間的函數關係是用表格法給出或表示的。

函數的這種表示法在科學及技術上用得很廣。各種各樣的數學表:平方表、立方表、平方根表、立方根表等等,都是這種函數表示法的例子。

2. 圖象法　圖 7 用曲線形式表示夏天某日一晝夜間的溫度變化情形。

水平軸上的線段表示時間 t 的鐘點數,鉛垂軸上的線段表示溫度 T 的攝氏度數。在水平軸上取 1 格作爲單位尺標,在鉛直軸上取 0.5 格作爲單位尺標。從圖對於時間 t 的每一值可求出溫度 T 的對應值。

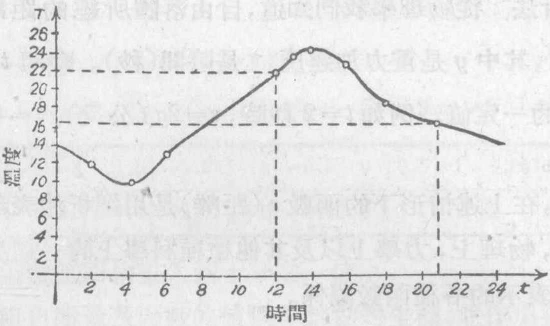

圖 7

例如要求當 $t=12$ 即中午時的溫度 T。為此，可在水平軸上點 $t=12$ 處作垂線使它跟曲線相交。從交點向鉛直軸作垂線如圖所示。便可在鉛直軸上讀出所求溫度：$T=22°C$。

同樣可求得 $t=21$ 時的溫度為 $T=16.5°C$。

圖 8 所畫的曲線，表示周邊長度等於常量 12 公分的矩形的面積 y 與其底 x 間的函數關係。用這曲線，便可按照所給的底長 x 求出對應的面積值。例如 $x=2$ 時 $y=8$；$x=3$ 時 $y=9$。

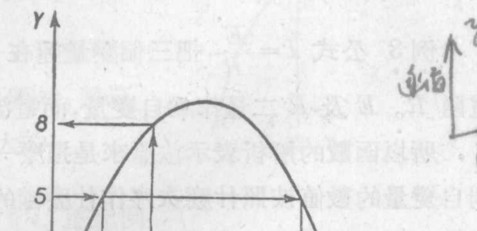

圖 8

y
通省
X
自变量

反過來說，如果給出了面積 y 的值，便可求出底 x 的對應值。例如

$y=5$ 時，x 等於 1 或 5。

所以，若函數用圖象給出，那它就表示底下的事：給出直角坐標系中的曲線；這曲線上的每一點對應着一定的自變量值及函數值：點的橫坐標是自變量值，它的縱坐標是函數的對應值。