试用教材

工程力学

（专题选编）

華中工学院固体力学教研组编

一九七五年十二月

工 程 力 学（专 题 选 编）

编写：华中工学院固体力学教研组

印刷：华中工学院 / 大桥工程局 印刷厂

1975年12月第1版　1975年12月第1次[illegible]

目　　录

第一章　运动的合成与分解

§1—1　点的合成运动的概念

一、运动的相对性

恩格斯在论述自然科学的辩证法时指出：**"单个物体的运动是不存在的，——只是在相对的意义下[才谈得上]①——下落。"**(注) 在《工程力学》第九章里已经讲过，分析质点或物体的运动时，必须选择另一物体作为参考系。也就是说，任何物体的运动都是相对于所选定参考系而言的。若参考系本身也分别处于不同的运动状态（包括静止），则对于同一物体运动的描述，将会得出不同的结论。例如，下雨时，站在地面上的人观察到雨滴是铅直向下的，而坐在行驶着的汽车中的人却看到雨滴是倾斜向后的，而且汽车行驶得愈快，坐在汽车中的人看到雨滴向后倾斜得愈厉害（图1—1）。观察到的结果之所以不同，是因为前者是以相对静止的地面作为参考系（又叫做定参考系），而后者是以行驶着的汽车作为参考系（又叫做动参考系）。

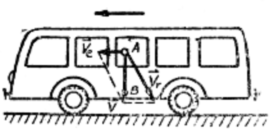


图 1—1

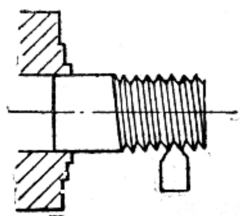


图 1—2

又如在车床上车螺紋时，车刀刀尖相对于固结在地面上的机床床身来讲是作直线运动，但相对于旋转着的工件来讲，刀尖却是沿着螺旋线运动（图1—2）。这也是由于前者是以相对静止的地面作为参考系，而后者却以定轴转动的工件作为参考系。

通过前面两个例子的讨论可以看出：同一质点（或物体）的运动，相对于不同的参考系来讲，对其运动的描述（轨迹、速度、加速度）是不相同的，这就是运动的相对性。

二、合成运动的概念

同一动点相对于不同的参考系的运动虽然不同，但是，**"一切客观事物本来是互相联系的和具有內部规律的"**，它们之间都存在着内在的联系，研究这些联系之间的规律性，将为生产实践中提出的质点运动的问题，提供分析的方法。

注：见《自然辩证法》人民出版社，1971年版，第226頁。

①方括号里的字是《自然証辩法》一书中根据恩格斯1873年5月30日致馬克思的信补上的。

3所示是起重行车吊运工件的情况。假设行车的大梁不动，在工件升高的同时，小车移动，则工件相对于地面的运动是沿图1—3中的AB线运动。这个运动可以看成工件随小车的水平移动和工件相对于小车的上升运动的合成。将工件简化为动点，把定参考系oxy固结在不动的大梁上，把动参考系$ox'y'$固结在小车上，则在这个问题中存在着三种不同的运动：工件（动点）相对于小车（动参考系）的运动，小车相对于大梁（定参考系）的运动，以及工件相对于大梁的运动。通常把动点相对于定参考系的运动叫做绝对运动，动点相对于动参考系的运动叫做相对运动，动参考系相对于定参考系的运动叫做牵连运动。同样把动点相对于定参考系运动的轨迹叫做绝对轨迹，动点相对于动参考系运动的轨迹叫做相对轨迹。在图1—1中，当我们把定参考系固结在地面上，动参考系固结在汽车上时，则雨滴铅直向下的运动是绝对运动，它的绝对轨迹是铅直线AB；汽车的前进运动是牵连运动；雨滴倾斜向后的运动则是相对运动，它的相对轨迹是倾斜线AC。车刀车螺纹时，哪是相对、牵连、绝对运动，请学员进行分析。

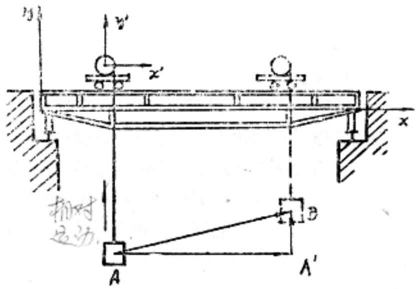


图1—3

例1—1　一自动记录振动的装置如图1—4所示。卷在圆筒上的纸带借助圆筒的转动以等速C向左移动，并记下了笔尖M的铅直振动。已知笔尖的绝对轨迹是铅直线，其绝对运动方程为

$$x=0,\qquad y=A\sin(\omega t+\alpha)。$$

其中x，y是相对于定参考系oxy的坐标。试求笔尖相对于纸带的运动方程式。

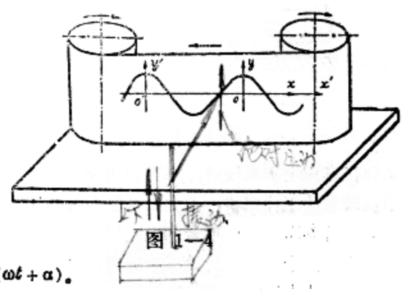


图1—4

解：选取动参考系$ox'y'$固结于纸带上，动点（笔尖）在此动参考系中的坐标为

$$x'=oo'+x,$$

而　$$x=0,\ oo'=Ct,$$

所以　$$x'=Ct,\ y'=y=A\sin(\omega t+\alpha)。$$

这就是笔尖的相对运动方程。从这组方程中消去时间t，则可得到笔尖在纸带上描出的轨迹（即相对轨迹）为

$$y'=A\sin\left(\frac{\omega}{C}x'+\alpha\right)。$$

可见，笔尖在纸带上描出的是一条正弦曲线。

§1—2 速度合成定理

牛头鉋床中的一种曲柄摇杆机构如图1—5所示。大齿轮D上装一偏心滑块A，并绕O轴转动。滑块A放置在摇杆O_1B的滑槽中，OA可以认为是一根曲柄，滑块由曲柄OA带动作圆周运动，通过滑块在摇杆O_1B槽内滑动，从而带动O_1B绕O_1轴摆动。取滑块A为动点，定参考系oxy固结于机架上，动参考系$o'x'y'$固结于摇杆O_1B上。则滑块A相对于机架所作的圆周运动是绝对运动，绝对轨迹是以O为圆心的圆弧$\widehat{AA'}$。滑块A沿摇杆滑槽的直线运动是相对运动，相对轨迹沿直线O_1B。摇杆O_1B绕O_1轴的转动则是牵连运动。

设t瞬时滑块在A点，摇杆位于O_1B。经过Δt时间后，摇杆相对于机架运动到O_1B'，此时滑块运动到A'位置(图b)。滑块从A到A'的绝对运动可以看成是由以下两种运动合成的结果：设想滑块相对于摇杆不动，滑块随着摇杆上与它重合的点一起运动，即沿着圆心为O_1的圆弧$\widehat{AA_1}$由A运动到A_1；滑块沿着摇杆的滑槽由A_1运动到A'。事实上这两种运动是同时发生的。连接$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{AA_1}$与$\overrightarrow{A_1A'}$三个矢量，分别叫做动点在Δt时间内的绝对位移、牵连位移和相对位移，并记作$\vec{s}_a$、$\vec{s}_e$和$\vec{s}_r$。从图1—5,b中可以看出：

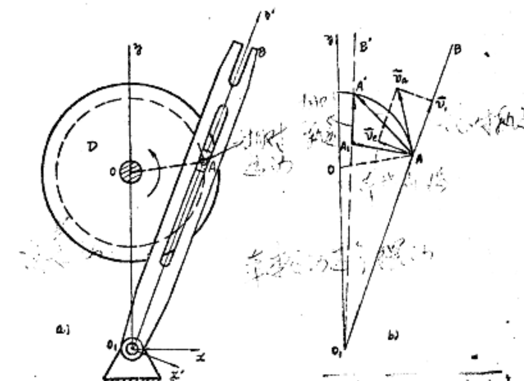


图 1—5

$\overline{AA'} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A'}$

$$\vec{s}_a = \vec{s}_e + \vec{s}_r 。$$

将上式除以Δt，并令$\Delta t \to 0$，则有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}_e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}_r}{\Delta t},$$

即

$$\frac{d\vec{s}_a}{dt} = \frac{d\vec{s}_e}{dt} + \frac{d\vec{s}_r}{dt}。$$

式中：$\frac{d\vec{s}_a}{dt}$是动点相对于定参考系的速度，即动点的绝对运动的速度，叫做绝对速度，记作$\vec{v}_a$；

$\frac{d\vec{s}_e}{dt}$是在给定的瞬时动参考系上与动点重合的点相对于定参考系的速度，叫做牵连速度，记作$\vec{v}_e$；

$\frac{d\vec{s}_r}{dt}$是动点相对动参考系的速度，即动点的相对运动的速度，叫做相对速度，记作$\vec{v}_r$。

因此有 $$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r, \quad (1—1)$$

即动点的绝对速度$\vec{v}_a$等于牵连速度$\vec{v}_e$与相对速度$\vec{v}_r$的矢量和。这就是点的速度合成定理。

上面我们通过曲柄摇杆机构的实例证明了速度合成定理。事实上只要注意到绝对位移等于牵连位移与相对位移的矢量和这个关系，便可证明一般情况下，速度合成定理也是成立的。

需要特别指出，正确分析和掌握牵连速度的概念是十分重要的。由于牵连运动是物体（动参考系）的运动，一般情况下动参考系上各点的速度是不相同的。例如绕定轴转动的物体内离转轴愈远的地方，点的速度愈大。运用速度合成定理时必须明确动参考系上哪一点的速度是牵连速度。从曲柄摇杆机构中可见，对滑块A而言，摇杆上作牵连运动的点是摇杆上该瞬时与滑块重合的点，只有这个点的速度才是该瞬时动点的牵连速度。由于滑块相对于摇杆在运动，所以这个重合的点是在变化的。因此在分析牵连速度时，必须指明所研究的瞬时，然后才能找出该瞬时动参考系上与动点重合点的位置，再根据动参考系的运动——牵连运动的性质，来决定牵连速度的大小和方向。

例1—2 牛头刨床的一种曲柄摇杆机构如图1—6所示。曲柄OA以匀角速度$\omega=2\ ^1/s$转动，通过滑块A带动摇杆O_1B摆动，而摇杆又通过滑块E使滑枕CD作往复运动（图1—6）。已知$OA=r=15cm$，$OO_1=\sqrt{3}r$，$O_1C=2\sqrt{3}r$，试求当曲柄OA水平时，摇杆O_1B的角速度与滑枕的速度。

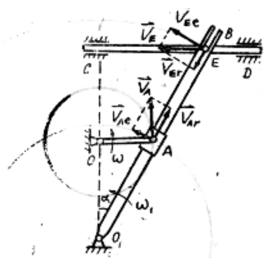


图 1—6

解：以滑块A为研究对象。由于滑块A一方面沿摇杆滑动，同时它又受曲柄的限制，只能绕O点作圆周运动。以地面为定参考系，则滑块A的绝对速度

$$v_A=r\omega,\qquad \text{方向垂直于曲柄}OA\text{，并指向上方。}$$

取摇杆为动参考系，则滑块A的相对速度$\vec{v}_{Ar}$沿着摇杆。摇杆上这时与滑块A重合的那一点的速度就是滑块A的牵连速度$\vec{v}_{Ae}$，它垂直于O_1A，大小为

$$v_{Ae}=O_1A\cdot\omega_1\ 。$$

根据速度合成定理，画出滑块A的速度平行四边形如图，于是得

$$v_{Ae}=v_A sin\alpha=r\omega\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+3r^2}}=\frac{1}{2}r\omega\ ,$$

从而得摇杆C_1B的角速度

$$\omega_1=\frac{v_{Ae}}{O_1A}=\frac{\frac{1}{2}r\omega}{\sqrt{r^2+3r^2}}=\frac{1}{4}\omega=0.5\ ^1/s\ 。$$

为了求滑枕的速度，再分析滑枕的运动。滑枕的运动是由摇杆O_1B通过滑块E而带动的。取滑枕上E点为动点，定参考系与动参考系选得和刚才一样时，则滑块E沿水平方向的速度是绝对速度$\vec{v}_E$，滑块E沿O_1B滑动的速度是相对速度$\vec{v}_{Er}$，在摇杆O_1B（动参考系）上这时与滑块E重合的点的速度是牵连速度$\vec{v}_{Ee}$，它垂直于O_1B，大小为

$$v_{Ee}=O_1E\cdot\omega_1=4r\omega_1=r\omega\ 。$$

根据速度合成定理，画出E点的速度平行四边形如图，于是得

$$v_E=\frac{v_{Ee}}{cos\alpha}=\frac{r\omega}{\frac{2\sqrt{3}\,r}{4r}}=\frac{r\omega}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=15\times2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=34.6\,cm/s=20.76m/min\ 。$$

即滑枕的速度为 $20.76m/min$ 。

工程上常用作图法画出曲柄在不同位置时，滑枕运动速度的变化曲线，从而找出滑枕运动速度的变化规律。请学员按此比例画出曲柄与摇杆在右侧或左侧互相垂直时的机构图和A、E两点速度的平行四边形，并量出速度v_E。

“认識的眞正任务在于經过感覺而到达于思維，到达于逐步了解客观事物的內部矛盾，了解它的規律性，了解这一过程和那一过程間的內部联系，即到达于論理的认識。” 从上面例子可以看出：主动件的运动与从动件的运动往往是通过连接点来传递的。这个连接点是这一过程与那一过程之间相互联系的媒介，它相对于不同参考系的运动以及这些运动之间的关系，反映了主动件与从动件运动传递的内部规律。因此，正确地选择动点与动参考系对于分析运动是十分重要的。一般把定参考系固结于地面或机架，而动点与动参考系选择的基本要求是：（1）动点对动参考系要有相对运动，因此，动点与动参考系不能选在同一物体上；（2）相对运动的规律需容易求出。例如上例中滑块A与摇杆有相对运动，而且滑块A相对于摇杆的运动就是沿摇杆滑动，所以选滑块A为动点，摇杆为动参考系。

“实践的观点是辯证唯物論的认識論之第一的和基本的观点。” 只有通过不断地实践，才能掌握正确选择动点、动参考系以及应用速度合成定理解决实际问题的方法。下面再讨论两个例题。

例1—3　水流在涡轮转子入口处的绝对速度$v=15m/s$，并与铅直半径成夹角$\alpha=60°$，如图1—7，a所示。转子半径$R=2m$，转速$n=30\,r.p.m.$，为了避免水流冲击叶片，叶片的安装应使水流沿叶片流动。求水流进入转子时相对于叶片的速度，以及转子外缘处叶片切线与转子半径应成的夹角。

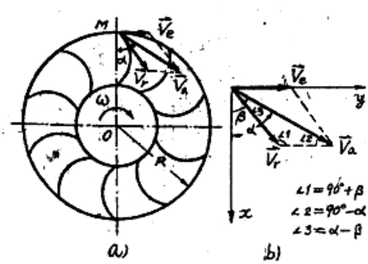


图 1—7

解：取转子为动参考系，入口处的水流为动点。设转子的角速度为ω，则入口处水流的牵连速度$\vec{v}_e$垂直于转动半径OM，大小为

$$v_e=R\,\omega=R\frac{2\pi n}{60}=6.28\,m/s\ 。$$

由于已知水流的绝对速度$\overline{v_a}$与牵连速度$\overline{v_e}$，应用速度合成定理，作速度的平行四边形如图1—7,b所示。设水流相对于叶片的速度为$\overline{v_r}$，它与转动半径的夹角，即转子外缘处叶片切线与转子半径的夹角为β，由图1—7,b可以看出:

$$\frac{v_a}{\sin\angle^1}=\frac{v_e}{\sin\angle^3},$$

所以
$$\frac{v_e}{v_a}=\frac{\sin\angle^3}{\sin\angle^1}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(90^\circ+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$=\sin\alpha-\cos\alpha\,tg\,\beta,$$

$$tg\,\beta=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha-\frac{v_e}{v_a}\right)=2\left(0.866-\frac{6.28}{15}\right)=0.894,$$

即
$$\beta=arctg0.894=41^\circ50'。$$

由图1—7,b还可看出:

$$\frac{v_r}{\sin\angle^2}=\frac{v_a}{\sin\angle^1},$$

$$v_r=v_a\frac{\sin\angle^2}{\sin\angle^1}=v_a\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\beta)}=v_a\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=15\cdot\frac{\cos60^\circ}{\cos41^\circ50'}=10.06\,m/s\ 。$$

例1—4　内燃机配汽凸轮机构简图如图1—8,a所示，顶杆AB沿铅直导向套筒DE运动，弹簧将顶杆A点紧压在凸轮表面上（顶杆端点A处的小滚轮未画出），凸轮绕O轴转动，推动顶杆上下运动（顶杆的上下运动控制汽阀阀门的开合程度）。设已知凸轮的角速度为ω，某瞬时凸轮轮廓曲线在A点的法线An与AO的夹角为α，$AO=b$，求此瞬时顶杆的速度。

解：凸轮是主动件，它的运动是已知的。顶杆是从动件，它沿铅直线平动，所以速度的方位已知，但大小不知道。为了求顶杆的速度，就需要从接触点A找出主动件与从动件运动之间的关系。

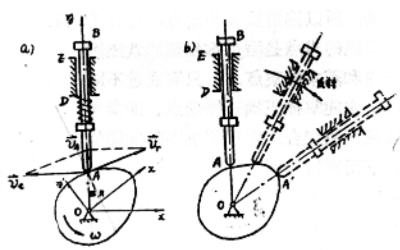


图 1—8

取顶杆上A点为动点，固定的机架为定参考系，顶杆上的A点相对于固定机架的运动是直线运动，所以动点A的绝对速度$\overline{v_a}$沿铅直线。取沿反时针方向转动的凸轮为动参考系，如果假定凸轮不动，则顶杆相对于凸轮应沿顺时针方向转动，如图1—8,b所示。这种情况正如人们坐在向前运动的汽车里看到路边的树木向后运动那样，两者的道理是一样的。同时由于动点A始终与凸轮表面接触，所以动点A相对于凸轮的运动是顺时针方向凸轮轮廓曲线$\overset{\frown}{AA'}$运动。在图示位置动点A的相对速度$\overline{v_r}$的方向就是沿轮廓曲线在A点的切线方向。

牵连运动是凸轮绕O轴的转动，角速度为ω。牵连速度则是凸轮上与顶杆端点A接触的那一点的速度，方向如图所示，大小为

$$v_e = b\omega \text{ 。}$$

根据速度合成定理，画出 A 点的速度平行四边形，则有

$$v_A = v_e tg\,\alpha = b\omega \cdot tg\,\alpha \text{ 。}$$

因为顶杆作平动，所以 A 点的速度也就是顶杆各点的速度。

上述处理问题的方法，叫做反转法。在凸轮设计和行星轮系的计算中经常用到。

§1—3 加速度合成定理

如上节讲过的绝对速度、相对速度和牵连速度的概念一样，通常把动点相对于定参考系运动的加速度叫做绝对加速度，用 $\vec{a}_a$ 表示；动点相对于动参考系运动的加速度叫做相对加速度，用 $\vec{a}_r$ 表示；在给定的某瞬时，动参考系上与动点重合的那一点相对于定参考系运动的加速度叫做牵连加速度，用 $\vec{a}_e$ 表示。

在研究三种速度的关系时，曾得到这样的结论：动点的绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和。点的三种加速度之间是否也有这种类似的关系呢？“**对于具体的事物作具体的分析**”。下面按动参考系作两种不同的运动情况（即平动或转动）来讨论。为了便于理解和说明两种情况下的差别，讨论时都是就两种较特殊的情况加以说明。

一、动参考系作平动时的加速度合成定理

设作为动参考系的物体 S 作平动，动点相对于物体 S 沿直线移动（图 1—9, a）。在瞬时 t 动点在 B，它的相对、牵连与绝对速度的关系是：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \text{ 。}$$

在瞬时 $t+\Delta t$ 时，动点到达 A_1，此时它的相对、牵连与绝对速度的关系是：

$$\vec{v}_{a1} = \vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1} \text{ 。}$$

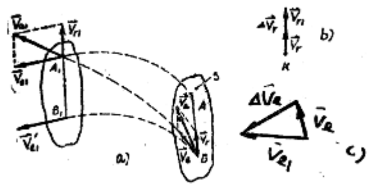


图 1—9

根据《工程力学》第九章讲过的关于质点运动的加速度的概念，动点的绝对加速度则应是：

$$\vec{a}_a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{a1} - \vec{v}_a}{\Delta t},$$

即

$$\vec{a}_a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{e1} - \vec{v}_e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{r1} - \vec{v}_r}{\Delta t} \text{。}$$

由于动点相对于动参考系作直线运动，而动参考系又作平动，所以动点相对速度的方向在任何瞬时都与原来的方向平行。为了求出相对速度的改变量，可将动点在 t 与 $t+\Delta t$ 瞬时的相对速度的矢量 $\vec{v}_r$ 与 $\vec{v}_{r1}$ 平行地移到同一点 K，如图1—9, b 所示，由图可以看出：

$$\Delta \vec{v}_r = \vec{v}_{r1} - \vec{v}_r \text{ 。}$$

由此得出动参考系作平动时，动点运动的相对加速度

$$\vec{a}_r=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}_{r1}-\vec{v}_r}{\Delta t}\ 。$$

同样，将动点在 t 与 $t+\Delta t$ 瞬时的牵连速度$\vec{v}_e$与$\vec{v}_{e1}$平行移动到同一点 L，如图 1—9,c 所示。由图可以看出：

$$\Delta\vec{v}_e=\vec{v}_{e1}-\vec{v}_e\ 。$$

由于动参考系作平动，在任一瞬时动参考系上各点速度的大小和方向都相同。所以，在$t+\Delta t$瞬时，动参考系上与动点相重合的 A_1点的速度$\vec{v}_{e1}$等于在 t 瞬时动参考系上与动点相重合的 B 点经过时间间隔Δt运动到 B_1点时的速度$\vec{v}'_{e1}$。由此得

$$\Delta\vec{v}_e=\vec{v}_{e1}-\vec{v}_e=\vec{v}'_{e1}-\vec{v}_e\ 。$$

由此得动点运动的牵连加速度等于在 t 瞬时动参考系上与动点相重合的 B 点运动的加速度

即
$$\vec{a}_e=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_e}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}_{e1}-\vec{v}_e}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}'_{e1}-\vec{v}_e}{\Delta t}\ 。$$

于是得到动点的绝对加速度

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r\ 。\tag{1—2}$$

即动参考系作平动时，动点的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。这就是动参考系作平动时的加速度合成定理。在这种情况下，三种加速度之间的关系与三种速度之间的关系相类似。应该指出，这个加速度合成定理是在动参考系作平动而动点相对于动参考系作直线运动的情况下得出来的。当动点相对于动参考系作曲线运动时，这个加速度合成定理同样成立。不过这时动点的相对加速度$\vec{a}_r$由相对切向加速度$\vec{a}_r^{(t)}$与相对法向加速度$\vec{a}_r^{(n)}$组成，即

$$\vec{a}_r=\vec{a}_r^{(t)}+\vec{a}_r^{(n)}$$

（1—2）式则变成为 $\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r^{(t)}+\vec{a}_r^{(n)}$ 。

例1—5　凸轮机构如图1—10所示，半径为R的半圆形凸轮的速度为$\vec{v}_o$，加速度为$\vec{a}_o$，推动顶杆沿铅直槽滑动。求当凸轮中心O与M点连线的倾角 $\theta=30°$时，顶杆的速度与加速度。

解：取凸轮为动参考系，顶杆下端与凸轮的接触点M为动点，则动点M的绝对运动是沿铅直线，牵连运动沿水平方向，相对运动则是沿凸轮轮廓在M点的切线方向。于是牵连速度

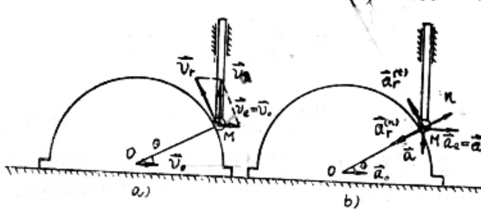


图 1—10

$\vec{v}_e=\vec{v}_o$，牵连加速度$\vec{a}_e=\vec{a}_o$，根据速度合成定理，作速度的平行四边形(如图1—10,a)，得

M点的绝对速度铅直向上，大小为

$$v = v_o tg(90° - \theta) = v_o tg60° = \sqrt{3}\, v_o \text{。}$$

相对速度$\vec{v}_r$沿轮缘在M点的切线，大小为

$$v_r = v_o / sin\theta = v_o / sin30° = 2v_o \text{。}$$

图1—10, b 上画出了M点的各种加速度。可以看出：绝对加速度$\vec{a}$沿铅直方向，相对加速度$\vec{a}_r$由两部分组成：即指向凸轮中心O的$\vec{a}_r^{(n)}$与沿轮缘在M点的切线方向的$\vec{a}_r^{(t)}$。其中

$$a_r^{(n)} = \frac{v_r^2}{R} = 4v_o^2/R \text{。}$$

根据动参考系作平动时的加速度合成定理，有

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r = \vec{a}_o + \vec{a}_r^{(n)} + \vec{a}_r^{(t)} \text{。}$$

将上式投影到经过O与M两点的On轴上，得

$$-a sin\theta = a_o cos\theta - a_r^{(n)} \text{，}$$

解得

$$a = \frac{a_r^{(n)}}{sin\theta} - a_o ctg\theta = \frac{4v_o^2}{R sin30°} - a_o ctg30°$$

$$= \frac{8v_o^2}{R} - \sqrt{3}\, a_o \text{。}$$

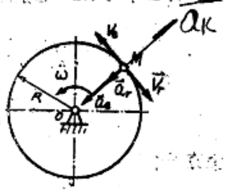


图 1—11

二、动参考系作定轴转动时的加速度合成定理

当牵连运动为定轴转动时，如图1—11所示的圆盘以匀角速度ω绕O轴转动，圆盘的半径为R。设在圆盘的边缘上有一动点M，沿着圆盘的边缘以相对速度$\vec{v}_r$运动，$\vec{v}_r$的方向如图示，其大小$v_r = R\omega$，由于动点M的牵连速度$v_e = R\omega$，且与相对速度共线反向，因此动点M的绝对速度始终等于零。即动点相对于定参考系是不动的。可见动点的绝对加速度应等于零。

即 $$a_a = 0 \qquad (a)$$

但是，动点的相对加速度$\vec{a}_r$与牵连加速度$\vec{a}_e$都指向圆心（图1—11），而且

$$a_r = a_r^{(n)} = \frac{v_r^2}{R} = R\omega^2 \text{，} \qquad (b)$$

$$a_e = a_e^{(n)} = R\omega^2 \text{，} \qquad (c)$$

于是 $$a_r + a_e = 2R\omega^2 \text{。} \qquad (d)$$

由(a)、(d)两式可以看出，此时动点的绝对加速度并不等于相对加速度与牵连加速度的矢量和。所以在动参考系作定轴转动时，不能应用(1—2)式计算动点的绝对加速度。为了说明牵连运动为定轴转动时的加速度合成定理，可假设一圆盘以匀角速度ω绕定轴O转动，圆盘上一动点沿半径方向移动，如图1—12, a 所示。设瞬时 t 动点在M处，

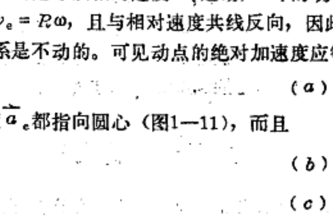


图 1—12

$OM=r$，此时动点的牵连速度为$\vec{v}_e$，其大小为$v_e=r\omega$；牵连加速度的大小为$a_e=r\omega^2$，指向O点。动点的相对速度为$\vec{v}_r$，相对加速度的大小为$a_r=\frac{dv_r}{dt}$，方向沿半径并假定其指向为背离O点。经过时间间隔Δt，即在瞬时$t+\Delta t$时，动点到达M_1处，此时动点的相对速度与牵连速度分别为$\vec{v}_{r1}$与$\vec{v}_{e1}$。为了求出相对速度的改变量，可将t及$t+\Delta t$瞬时相对速度矢量$\vec{v}_r$及$\vec{v}_{r1}$平行地移到同一点K，从图1—12，b可以看出，矢量$\vec{v}_{r1}$是$\vec{v}_r$与$\vec{v}_r'$的矢量和，而矢量$\vec{v}_r'$实际上是大小为$\Delta\theta v_r$与Δv_r两个矢量的矢量和。其中，Δv_r是动点沿半径方向作相对运动时，相对速度的改变量；$\Delta\theta v_r$则是由于动参考系作定轴转动时，相对速度方向发生改变所引起的相对速度的增量。将Δv_r与$\Delta\theta v_r$分别除以Δt，并取其极限，则可得：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_r}{\Delta t}=\frac{dv_r}{dt}$$（对应于相对速度$\vec{v}_r$大小的改变，沿着半径方向）；

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta v_r}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\cdot v_r=\omega v_r$$（对应于相对速度$\vec{v}_r$方向的改变，方向垂直于半径）。

因为相对加速度$\vec{a}_r=\frac{d\vec{v}_r}{dt}$，所以$\frac{dv_r}{dt}$就是相对加速度的大小。

同样，为求牵连速度的改变量，将t及$t+\Delta t$瞬时的牵连速度$\vec{v}_e$及$\vec{v}_{e1}$平行地移到同一点L，从图1—12，c可以看出，矢量$\vec{v}_{e1}$是$\vec{v}_e$与$\vec{v}_e'$的矢量和，而矢量$\vec{v}_e'$实际上是大小为$\Delta\theta v_e$与$\Delta v(=\Delta r\omega)$两个矢量的矢量和。其中，$\Delta\theta v_e$是由于动参考系作定轴转动而引起牵连运动方向改变而产生的牵连速度的增量；$\Delta r\omega$则是由于动点在动参考系中运动时，动点在动参考系中位置的改变，而引起牵连速度的大小发生变化而产生的牵连速度大小的改变量。

将$\Delta\theta v_e$与$\Delta r\omega$分别除以Δt，并取其极限，则可得：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta v_e}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\cdot r\omega=\frac{d\theta}{dt}\cdot r\omega=r\omega_e^2$$（对应于牵连速度$\vec{v}_e$方向的改变，方向沿半径并指向O点，这就是牵连加速度$\vec{a}_e$的大小）；

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r\omega}{\Delta t}=\omega\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\omega\frac{dr}{dt}=\omega v_r$$（对应于牵连速度$\vec{v}_e$大小的改变，方向垂直于半径）。

由此可以看出，M点的绝对加速度$\vec{a}_a$除了牵连加速度$\vec{a}_e$与相对加速度$\vec{a}_r$外，还须添加两个大小都等于ωv_r而且方向相同的附加量，这两个附加量合併起来成为附加加速度，又叫做哥氏加速度（或叫做哥里奥里斯加速度），记作$\vec{a}_k$。于是得：动参考系作定轴转动时，动点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度与哥氏加速度的矢量和，即

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_k. \tag{1—3}$$

这就是动参考系作定轴转动时的加速度合成定理。当动点在与动参考系的转轴相垂直的平面内作相对运动时，哥氏加速度的大小等于动参考系的角速度ω与相对速度v_r乘积的二倍，(注) 即

$$a_k = 2\omega v_r \quad 。 \qquad (1-4)$$

它的方向可以这样决定：将相对速度$\vec{v}_r$的方向顺着动参考系的角速度ω的转向转过90°角，就得到$\vec{a}_k$的方向。

图 1—13

以上分析说明，当动参考系作定轴转动时，动点的绝对速度的变化可分为四个部分：

（1）动点在动参考系中所表现的运动速度的改变；

（2）动参考系运动情况的改变引起与动点重合点的牵连速度的改变；

（3）由于动参考系的转动而引起相对速度方向的改变；

（4）由于动点从动参考系中的一点移到另一点，改变动点在动参考系中所占位置时而引起的牵连速度的改变（动参考系转动时，每一瞬时其上各点的速度都不相同）。

这里每个改变量都产生了相应的加速度。与第一部分相对应的是相对加速度，与第二部分相对应的是牵连加速度；第三、四部分的改变量在动参考系为平动时是不存在的，这是由于动参考系作定轴转动产生的加速度，它既与相对运动有关，同时又与牵连运动有关。

例1—6　试求例1—3中入口处水流的哥氏加速度。

解：　已知　$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi \ ^1/_s$

由例1—3求得　$v_r = 10.06 m/s$ 。

所以哥氏加速度　$a_k = 2\omega v_r = 2 \times \pi \times 10.06 = 63.2 m/s^2$ 。

从矢量$\vec{v}_r$按ω的转向转90°角便是哥氏加速度$\vec{a}_k$的方向，如图1—14所示，$\vec{a}_k$与半径OM的夹角

$$\gamma = 90° - \beta = 90° - 41°50' = 48°10'$$

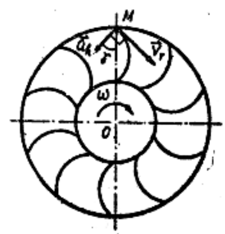


图 1—14

例1—7　空气压缩机的工作轮以匀角速度ω绕垂直于图面的O轴转动，空气以匀相对速度 v_r 沿弯曲的叶片流

注：一般情况下，哥氏加速度　$\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$，

式中$\vec{\omega}$表示动参考系的角速度矢量，即用右手四指按ω方向转动，拇指的指向就表示角速度矢$\vec{\omega}$的指向（右手定则）。

根据矢量代数关于矢性积的定义，可知$\vec{a}_k$的大小是

$$a_k = 2\omega v_r sin\alpha \ ,$$

式中α是$\vec{\omega}$与$\vec{v}_r$之间的夹角。$\vec{a}_k$的方向垂直于$\vec{\omega}$与$\vec{v}_r$所决定的平面，并符合右手定则。

轮(图1—15)，如在C点的曲率半径为ρ，又曲线AB在C点的法线与半径所成的夹角为φ，半径CO等于r，求C点处气体分子的绝对加速度。

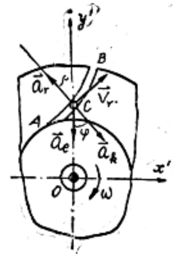


图 1—15

解：以C点处的气体分子为动点，取与工作轮一起转动的$ox'y'$为动参考系，地面为定参考系。动点的三种加速度如下：

牵连加速度$\vec{a}_e$：由于动参考系作匀速转动，故只有向心加速度，其大小为

$$a_e = r\omega^2，方向如图示。$$

相对加速度$\vec{a}_r$：由于气体分子相对于叶片作匀速曲线运动，故只有法向加速度，其大小为

$$a_r = a_r^{(n)} = \frac{v_r^2}{\rho}，方向如图示。$$

哥氏加速度$\vec{a}_k$：由于相对速度$\vec{v}_r$在与转轴相垂直的平面内，所以其大小为

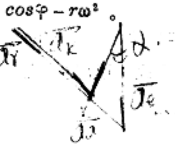
$$a_k = 2\omega v_r，方向如图示。$$

因为 $$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k,$$

所以动点的绝对加速度$\vec{a}$在任一轴上的投影应等于其牵连加速度$\vec{a}_e$、相对加速度$\vec{a}_r$以及哥氏加速度$\vec{a}_k$在同一轴上投影的代数和。取x'和y'为投影轴，于是

$$a_{x'} = \left(2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\sin\varphi,$$

$$a_{y'} = \left(\frac{v_r^2}{\rho} - 2\omega v_r\right)\cos\varphi - r\omega^2 。$$



动点绝对加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2},$$

方向由 $arctg\frac{a_{x'}}{a_{y'}}$ 确定。

例1—8 求例1—2中摇杆O_1B的角加速度。

解：动点与动参考系选择同例1—2，因为动参考系作转动。根据(1—3)式，滑块A的绝对加速度$\vec{a}_a$应为

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k 。$$

由于 $$a_e^{(t)} = \varepsilon \cdot O_1A,$$

所以只要求出$a_e^{(t)}$，便可以求得摇杆在该瞬时的角加速度ε。现分别求动点的三种加速度。

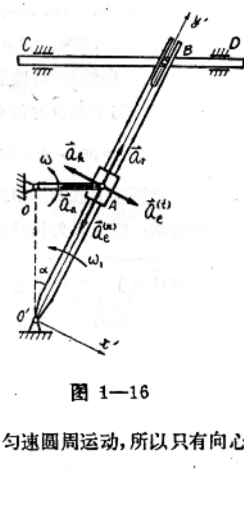


图 1—16

绝对加速度$\vec{a}_a$：因动点的绝对运动是以O点为圆心的匀速圆周运动，所以只有向心加速度，其大小为

$a_a = r\omega^2 = 15\times4 = 60cm/s^2$，方向如图示。

哥氏加速度$\vec{a}_k$：因为相对速度$\vec{v}_r$在与转轴相垂直的平面内，所以其大小为

$a_k = 2\omega_1 v_r$，方向如图示。

由例1—2已求出$\omega_1 = 0.5{}^1/_s$，而

$v_r = v_A cos\alpha = r\omega cos\alpha = 15\times2\times cos30° = 26cm/s$。

$a_k = 2\omega_1 v_r = 2\times0.5\times26 = 26cm/s^2$。

牵连加速度$\vec{a}_e$：即摇杆上与动点重合的那一点的加速度。将牵连加速度分解成法向牵连加速度$\vec{a}_e^{(n)}$及切向牵连加速度$\vec{a}_e^{(t)}$两部分。切向牵连加速度$\vec{a}_e^{(t)}$的方向垂直于O_1A，为求出$\vec{a}_e^{(t)}$的大小，取O_1x'为投影轴，（1—3）式在O_1x'轴的投影为

$$-a_a cos\alpha = a_e^{(t)} - a_k,$$

解得

$$a_e^{(t)} = a_k - a_a cos\alpha = 26 - 60\times0.866 = -25.96\ cm/s^2。$$

于是摇杆在该瞬时的角加速度为

$$\varepsilon = \frac{a_e^{(t)}}{O_1A} = -25.96/30 = -0.865\ {}^1/_{s^2}。$$

负号表示角加速度ε与角速度ω_1的转向相反。

请学员分析并计算该瞬时滑枕的加速度。

§1—4　物体的平面运动分解为平动与转动

在《工程力学》第十章里，讨论了物体的平动与定轴转动，它们是物体的基本运动。在实际的机构中，有些构件并不是作简单的基本运动，例如曲柄连杆机构中的连杆AB（图1—17），它既不是作平行移动，又不是绕某一固定轴转动；又如行星轮系中的行星轮B（图1—18），在绕O_1轴旋转的同时，轮心O_1又绕O轴转动。上述的连杆与行星轮，虽然不是作简单的平行移动或定轴转动，但它们的运动有一个共同的特点，就是运动过程中，物体内每一点的运动都平行于某一个固定平面，这样的运动叫做平面运动。

前面说过，一个动点的比较复杂的运动可以看成由两个简单的运动组合而成。下面应用这个概念来分析物体平面运动的问题。

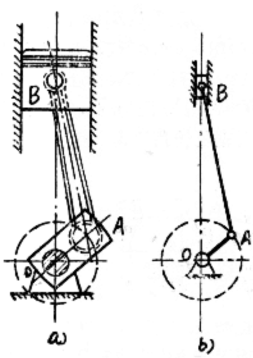


图 1—17

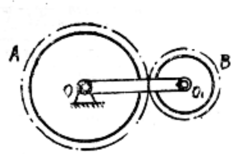


图 1—18