新农村书屋丛书

怎样学丛书

数与式

阎雅玲　杨　丽　主编

河北人民出版社

怎样学丛书

数与式

阎雅玲　杨　丽　主编

河北人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

数与式/阎雅玲，杨丽主编．—石家庄：河北人民出版社，2009.2
（怎样学丛书）
ISBN 978-7-202-05107-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①阎…②杨…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第201954号

丛 书 名　怎样学丛书
书　　名　数与式
编　　著　阎雅玲　杨　丽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　　刷　河北新华印刷一厂
开　　本　787×1092毫米　1/32
印　　张　5.25
字　　数　110 000
版　　次　2009年2月第1版　　2009年2月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-202-05107-8/G·1701
定　　价　8.50元

目　　录

第一章　有　理　数

第一节　正负数的概念

数学小常识：

阿拉伯数字是怎么来的？

1、2、3、4、5、6、7、8、9、0这些数字，大家叫它阿拉伯数字．可是，阿拉伯数字并不是阿拉伯人创造的，而是印度人创造的．

大约在1500年以前，印度人就采用了一种特殊的字来表示数，这些字总共有九个，而且非常简单，只要一画或两画便可写成．你看，那时的印度数字：

不都是一笔连下来就可以写出来了么！

后来，由于东方与西方来往做生意的人多了，印度数字由商人传入了西班牙．

公元八世纪时，西班牙和阿拉伯打起仗来，侵入西班牙的阿拉伯人感到这种数字很简单，就把它学了回去，后来又把它传到欧洲．在十世纪时，欧洲出现的阿拉伯数字是这样的：

这时已经使用“0”的符号了.

在使用中人们不断改进,到了十四世纪时,欧洲通用的数字已经变得和现在的数字差不多了:

现在通用的数字是:1　2　3　4　5　6　7　8　9　0

由于阿拉伯数字比中国数字、罗马数字都简单易学,因此它很快地被传播开来,到今天已通行全世界了.

知识点1. 负数的引入

正数和负数是根据实际需要而产生的,随着社会的发展,小学学过的自然数、分数和小数已经不能满足实际的需要,比如一些有相反意义的量:收入200元和支出100元、零上6℃和零下4℃等等,它们不但意义相反,而且表示一定的数量,怎样表示它们呢?我们把一种意义的量规定为正的,把另一种和它意义相反的量规定为负的,这样就产生了正数和负数.

用正数和负数表示具有相反意义的量时,哪种意义为正,是可以任意选择的,但习惯把“前进、上升、收入、零上温度”等规定为正,而把“后退、下降、支出、零下温度”等规定为负.

知识点2. 正数和负数的概念

像3、1.4、0.03、$\frac{3}{5}$大于零的数叫做正数.

像-3、-1.4、-0.03、$-\frac{3}{5}$小于零的数叫做负数.

零即不是正数也不是负数,零是正数和负数的分界.

知识点 3. 对概念的理解注意以下几点

(1)对于正数和负数的概念，不能简单的理解为：带"+"号的数是正数，带"-"号的数是负数．例如：$-a$ 一定是负数吗？答案是不一定．因为字母 a 可以表示任意的数，若 a 表示正数时，$-a$ 是负数；当 a 表示 0 时，在 0 的前面加一个负号，仍是 0，0 不分正负；当 a 表示负数时，$-a$ 就不是负数了，它是一个正数．

(2)引入负数后，数的范围扩大为有理数，奇数和偶数的外延也由自然数扩大为整数，整数也可以分为奇数和偶数两类，能被 2 整除的数是偶数，如…$-6,-4,-2,0,2,4,6$…，不能被 2 整除的数是奇数，如…$-5,-3,-1,1,3,5$…

(3)数细分有五类：正整数、正分数、0、负整数、负分数，但研究问题时，通常把数分为三类：正数、0、负数，进行讨论．

(4)通常把正数和 0 统称为非负数，负数和 0 统称为非正数，正整数和 0 称为非负整数；负整数和 0 统称为非正整数．

知识点 4. 负数的应用

负数是正数的相反数．在实际生活中，我们经常用正数和负数来表示意义相反的两个量．夏天武汉气温高达 42℃，你会想到武汉的确像火炉，冬天哈尔滨气温 -32℃，一个负号让你感到北方冬天的寒冷．

温度：零下 3 摄氏度表示为 -3℃．

楼层：地下 1 层表示为 -1 层．

海拔：吐鲁番盆地最低点低于海平面 155 米，海拔表示为 -155 米．

用正负数填空：

小商店平均每天可赢利 250 元，一个月（按 30 天计算）的

利润是______元;

小商店每天亏损 20 元,一周的利润是______元;

小商店一周的利润是 1400 元,平均每天利润______元;

小商店一周的亏损是 840 元,平均每天利润______元.

例 1 如图 1-1,两温度计读数分别为我国某地今年 2 月份某天的最低气温与最高气温,那么这天的最高气温比最低气温高(　　).

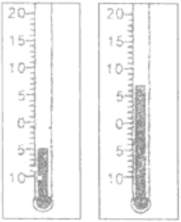


图 1-1

A. 5℃　　B. 7℃

C. 12℃　　D. -12℃

解:因为冰箱冷藏室温度是 5℃,冷冻室的温度是 -2℃,所以冰箱冷藏室温度比冷冻室温度高 $5-(-2)=5+2=7$,即高出 7℃,故选 C.

方法点睛:本题考查有理数的减法法则:减去一个数,等于加上这个数的相反数,即 $a-b=a+(-b)$,在计算中将减法转化为加法,避免错误的发生.

例 2 在 $0,-2,1,\frac{1}{2}$ 这四个数中,最小的数是(　　).

A. 0　　B. -2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

解:选 B.

方法点津:引入负数后,零就不是最小的数了,负数比零小.

例 3 $3a$ 与 $2a$ 比较(　　).

A. $3a>2a$　B. $3a<2a$　C. $3a=2a$　D. 不能确定

解:要进行具体分析

当 $a>0$ 时,$3a>2a$

当 $a=0$ 时，$3a=2a$

当 $a<0$ 时，$3a<2a$

故应当填 D.

特别应注意，今后凡遇到字母表示数时，就要从正数、0、负数这三个方面进行分析、思考、解答，否则将会出现错误. 对于一般的两个数，还可以利用求差的办法去比较，比如，比较 a 与 b 的大小.

如果 $a-b>0$ 则 $a>b$

$a-b=0$ 则 $a=b$

$a-b<0$ 则 $a<b$

知识点 5. 巧用正负数，难题迎刃解

问题 1：一次团体操排练活动中，某班 45 名学生面向老师站成一列横队. 老师每次让其中任意 6 名学生向后转(不论原来方向如何). 能否经过若干次后全体学生都背向老师站立? 如果能够的话，请你设计一种方案；如果不能够，请说明理由.

分析：问题似乎与数学无关，却又难以入手，注意到学生站立有两个方向，与具有相反意义的量有关，向后转又可想像成进行一次运算，或者改变一次符号. 能否联系有理数的知识进行讨论?

让我们再发挥一下想像力：假设每个学生胸前有一块号码布，上面写“+1”，背后有一块号码布，上面写“-1”，那么一开始全体学生面向老师，胸前 45 个“+1”的“乘积”是“+1”. 如果最后全部背向老师，则 45 个“-1”的“乘积”是“-1”.

再来观察每次 6 名学生向后转进行的是什么“运算”. 设想老师叫“向后转”，而称这 6 名学生对着老师的数字都“乘以

(-1)".

这样问题就解决了，每次"运算"乘以 6 个(-1)，即乘以了$(+1)$，故 45 个数的乘积不变，始终是$(+1)$，所以要乘积变为(-1)是不可能的.

问题 2：将七只杯子放在桌上，使三只口朝上，四只口朝下.现要求每次翻转其中任意四只，使它们杯口朝向相反，问能否经有限次翻转后，让所有杯子杯口朝下？

分析：因为杯口只有朝上、朝下两个方向，每次翻转相当于改变杯口朝向，所以可引入正负数来解答.

解：设杯口朝上用 $+1$ 表示，杯口朝下用 -1 表示.则开始时七个数的乘积为 $+1$.

因为每次翻转均改变四个数的符号，相当于四个数各乘以 -1.

所以其结果是七个数之积再乘以$(-1)^4$，其积仍为 $+1$，经有限次翻转后，这个结果保持不变.

这与七只杯子都朝下时七个数之积为 -1 矛盾.

由此得知：不能经有限次翻转，使七只杯子的杯口全部朝下.

问题 3：画一圆，沿圆周均匀地放上 4 枚围棋子，黑白都行.然后按下列规则变换.要是原来相邻的两个棋子颜色相同，在它们之间放上一个黑子；要是相邻的两个棋子的颜色不同，在它们之间放上一个白子，然后把原来的那四个棋子拿走，求证：不管原来那四个棋子颜色如何，最多只须经过四次变换，圆周上的四个棋子都会变成黑子.

分析：乍看起来，这道题与数学关系不大，难点在于黑白子的分布没有规律，而且题目中也没有可供作数学运算的对

象；看来，把问题转化成明确的数学问题是最关键的一步.

仔细研究变换规则，作一些联想和对比，简单地说，变换规则是：相邻同色，中间放上黑子；相邻异色，中间放白子. 这就使我们联想起乘法规则：同号相乘为正，异号相乘为负. 因为只有白子、黑子之分，所以可用 $+1$ 代表黑子，-1 代表白子，黑子与白子之间放一个白子. 正好用 $1\times(-1)=(-1)\times 1=-1$ 来表示；

两黑子之间及两白子之间放一黑子，正好用 $(+1)\times(+1)=(-1)\times(-1)=1$ 来表示，于是经过一次变换，即是用相邻的两个数相乘之后所得出的四个积来代替原来的四个数.

设 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示开始时圆周上均匀放置的四枚棋子. 由于每一个棋子可能为白子，也可能为黑子，因此 x_1,x_2,x_3,x_4 中的每个数，既可能是 $+1$，也可能是 -1，连续进行三次变换，可产生以下情况（如下表所示）：

原始状态	第一次变换	第二次变换	第三次变换
x_1	x_1x_2	$x_1x_2^2x_3$	$x_1x_2^3x_3^3x_4$
x_2	x_2x_3	$x_2x_3^2x_4$	$x_2x_3^3x_4^3x_1$
x_3	x_3x_4	$x_3x_4^2x_1$	$x_3x_4^3x_1^3x_2$
x_4	x_4x_1	$x_4x_1^2x_2$	$x_4x_1^3x_2^3x_3$

因为 $x_1^2=x_2^2=x_3^2=x_4^2=1$

因此，经过三次变换后，四个数实际上都等于 $x_1x_2x_3x_4$.

如果这个数是1，那么已知全出现黑子．如果是－1，那么再进行一次变换，就会全部出现黑子，至此结论得证．

为了更好地理解这一结论，不妨看一个具体例子．假设四个棋子中，三黑一白，如下图所示，果然不出四次变换，圆周上的棋子全是黑色的了．

图1－2

第二节　有理数的概念

数学小故事：

一个故事引发的数学家

陈景润是一个家喻户晓的数学家，在攻克歌德巴赫猜想方面做出了重大贡献，创立了著名的"陈氏定理"，所以有许多人亲切地称他为"数学王子"．但有谁会想到，他的成就源于一个故事．1937年，勤奋的陈景润考上了福州英华书院，此时正值抗日战争时期，清华大学航空工程系主任留英博士沈元教授回福建奔丧，不想因战事被滞留家乡．几所大学得知消息，都想邀请沈教授前去讲学，他谢绝了邀请．由于他是英华的校友，为了报达母校，他来到了这所中学为同学们讲授数学课．一天，沈元老师在数学课上给大家讲了一故事："200年前有

个法国人发现了一个有趣的现象：$6=3+3, 8=5+3, 10=5+5, 12=5+7, 28=5+23, 100=11+89$. 每个大于4的偶数都可以表示为两个奇数之和. 因为这个结论没有得到证明，所以还是一个猜想. 大数学家欧拉说过：虽然我不能证明它，但是我确信这个结论是正确的. 它像一个美丽的光环，在我们不远的前方闪耀着眩目的光辉. ……"陈景润瞪着眼睛听得入神.

从此，陈景润对这个奇妙问题产生了浓厚的兴趣. 课余时间他最爱到图书馆，不仅读了中学辅导书，这些大学的数理化课程教材他也如饥似渴地阅读. 因此获得了"书呆子"的雅号. 兴趣是第一老师. 正是这样的数学故事，引发了陈景润的兴趣，引发了他的勤奋，从而引发了一位伟大的数学家.

知识点1. 关于有理数的定义

(1)整数和分数统称为有理数.

(2)无限不循环小数和开方开不尽的数叫无理数.

(3)有理数与小学所学的数，主要区别在于负数.

(4)数学上，有理数是两个整数的比，通常写作 $\frac{a}{b}$，这里 b 不为零. 分数是有理数的通常表达方法，而整数是分母为1的分数，当然亦是有理数.

(5)有理数概念的由来：因为在数学上，有理数是一个整数 a 和一个非零整数 b 的比(ratio)，通常写作 $\frac{a}{b}$，故又称作分数. 希腊文称为 $\lambda o\gamma o\zeta$，原意为"成比例的数"(rational number)，但中文翻译不恰当，逐渐变成"有道理的数". 不是有理数的实数遂称为无理数.

(6)所有有理数的集合表示为 Q，有理数的小数部分有限或为循环.

注意:(1)有时为了研究的需要,整数也可以看作是分母为1的数,这时的分数包括整数.但是本文中的分数不包括分母是1的分数.

(2)因为分数与有限小数和无限循环小数可以互化,上述小数都可以用分数来表示,所以我们把有限小数和无限循环小数都看作分数.

(3)“0”既不是正数,也不是负数,但“0”是整数.

知识点2.有理数的分类

(1)按整数、分数的关系分类:

$$\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

(2)按正数、负数与0的关系分类:

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\0\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

注意:(1)通常把正数和0统称为非负数,负数和0统称为非正数,正整数和0称为非负整数(也叫做自然数),负整数和0统称为非正整数.

(2)如果用字母表示数,则 $a>0$ 表明 a 是正数;$a<0$ 表明 a 是负数;$a\geqslant 0$ 表明 a 是非负数;$a\leqslant 0$ 表明 a 是非正数.

典型例题

例 1　把下列各数填在相应的大括号内.

$+8,-3\frac{1}{3},+\frac{15}{4},0.275,2,0,5\%,-1.04,-\frac{22}{7},-100,-(-59)$,

(1)正整数集合 $\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$

(2)整数集合 $\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$

(3)负分数集合 $\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$

(4)有理数集合 $\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$

解:(1) $+8,+\frac{15}{4},0.275,2,5\%,-(-59)$,

(2) $+8,2,0,-100,-(-59)$,

(3) $-3\frac{1}{3},-1.04,-\frac{22}{7}$,

(4) $+8,-3\frac{1}{3},+\frac{15}{4},0.275,2,0,5\%,-1.04,-\frac{22}{7},-100,-(-59)$.

例 2　判断 $-\frac{\pi}{2}$ 是不是分数?

解:因为 π 是无限不循环小数,所以 $-\frac{\pi}{2}$ 也是无限不循环小数,它是无理数,所以不是分数.

例 3　下列叙述正确的是(　　).

A. 存在最小的有理数　　B. 存在最小的正整数

C. 存在最小的整数　　D. 存在最小的分数

解:选 B.

例 4　探索规律:根据图 1－3 中箭头指向的规律,从 2004 到 2005 再到 2006,箭头的方向是(　　).

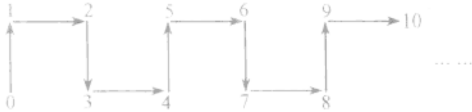


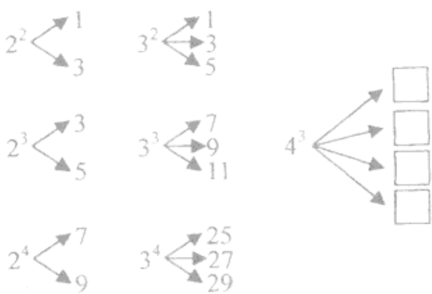
图 1－3




A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

解：因为 $2004 \div 8 = 88$，8 个数是一个循环，故选 A.

例 5　已知 $m \geqslant 2$，$n \geqslant 2$，且 m，n 均为正整数，如果将 m^n 进行如下方式的"分解"，那么下列三个叙述：



(1)在 2^5 的"分解"中最大的数是 11.

(2)在 4^3 的"分解"中最小的数是 13.

(3)若 m^3 的"分解"中最小的数是 23，则 m 等于 5.

其中正确的是______.

解：正确的是(2)；

因为在 2^5 的"分解"中最大的数是 9 不是 11，所以(1)的结论是错误的.