

高等学校规划教材
GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

塑性力学基础

李立新 胡盛德 编著



冶金工业出版社

<http://www.cnmp.com.cn>

0344/17

2009

高等学校规划教材

塑性力学基础

李立新 胡盛德 编著

冶金工业出版社

2009

内 容 提 要

本书主要介绍塑性力学的基础理论及其工程应用,全书共7章,内容包括:应力状态理论、应变状态理论、屈服准则、应力应变关系、上下界定理、确定表面压力的工程法、滑移线场理论及其应用等。附录给出“求和约定和张量概念”。每章后均附有思考和练习题,以供读者练习和深入钻研。

本书为高等学校本科教材,亦可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学基础/李立新,胡盛德编著. —北京:冶金工业出版社, 2009.6

高等学校规划教材

ISBN 978-7-5024-4916-2

I. 塑… II. ①李… ②胡… III. 塑性力学—高等学校—教材 IV. 0344

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第072538号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号,邮编100009

电 话 (010) 64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn

责任编辑 朱华英 美术编辑 李 新 版式设计 张 青

责任校对 栾雅谦 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-4916-2

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2009年6月第1版,2009年6月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16;8.25印张;215千字;121页;1-3000册

20.00元

冶金工业出版社发行部 电话:(010) 64044283 传真:(010) 64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100711) 电话:(010) 65289081

(本书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

塑性力学是材料成形专业重要的专业基础课。本书从应力和应变的分析入手,通过建立求解材料成形问题的基本方程,进而介绍确定成形时材料流动和力能参数的主要解析方法,旨在为合理设计或选择成形工具、制订或优化成形工艺提供理论依据。

本书内容简洁,层次分明,理论严谨。在注重基础的同时,还兼顾了工程应用。本书可作为高等学校材料成形专业的教学用书,亦可供生产、设计和科研部门工程技术人员参考。

本书的第1、2、3、4章由李立新执笔,第5、6、7章、附录及各章思考与练习由胡盛德执笔。

在编写过程中,重庆大学汪凌云教授提出了许多宝贵意见。作者参考和引用了国内外相关文献,在此,向汪凌云教授和文献作者表示诚挚的感谢!本书的出版还得到了武汉科技大学的资助,在此深表谢意。

由于编者知识水平所限,书中不妥之处,恳请广大读者指正。

编 者

2009年2月

目 录

1 应力状态理论	1
1.1 应力状态的基本概念	1
1.1.1 外力和内力	1
1.1.2 应力的概念	2
1.1.3 应力的分解	2
1.2 斜面上的应力及应力边界条件	4
1.2.1 斜面上的应力	4
1.2.2 应力的张量表示	5
1.2.3 应力边界条件	6
1.3 主应力及应力张量不变量	7
1.3.1 主应力及应力不变量	7
1.3.2 主应力图示	8
1.3.3 应力椭球	9
1.4 应力摩尔圆和主切应力	10
1.4.1 应力摩尔圆	10
1.4.2 主切应力	11
1.4.3 八面体应力	12
1.5 应力球张量和应力偏张量	13
1.5.1 应力张量的分解	13
1.5.2 偏差应力张量常量	14
1.6 应力平衡微分方程	14
1.6.1 直角坐标系的力平衡方程	14
1.6.2 圆柱坐标系的力平衡方程	16
1.6.3 球坐标系下的力平衡方程	17
1.7 平面应力状态	17
思考与练习	18
2 应变状态理论	20
2.1 应变和应变状态	20
2.1.1 典型变形实例	20
2.1.2 位移分量和刚性转动分量	20
2.1.3 速度分量和速度边界条件	22
2.1.4 一点的应变分量	22

2.2 应变分量和转动分量与位移分量的关系	24
2.3 应变连续方程	27
2.4 应变张量及其分解	28
2.4.1 单位相对位移张量	28
2.4.2 应变张量	29
2.4.3 主应变及应变张量不变量	29
2.4.4 应变张量的分解	30
2.5 体积应变和不可压缩条件	31
2.5.1 体积应变	31
2.5.2 不可压缩条件	32
2.5.3 主应变图示	32
2.6 应变增量分量及应变速率张量	33
2.6.1 应变增量分量	33
2.6.2 应变速率张量	33
2.6.3 应变速率张量的分解及不变量	34
2.7 平面应变状态	35
思考与练习	36
3 屈服准则	38
3.1 屈服准则的一般概念	38
3.1.1 单向拉伸曲线	38
3.1.2 屈服准则的通用形式	39
3.2 Tresca 屈服准则	39
3.3 Mises 屈服准则	40
3.4 屈服准则的几何表达	41
3.4.1 应力空间中的屈服轨迹	41
3.4.2 各向同性硬化材料的屈服轨迹	43
3.5 屈服准则的实验验证	43
3.6 等效应力和等效应变	45
3.6.1 等效应力	45
3.6.2 塑性功增量	46
3.6.3 等效应变	46
3.6.4 等效应力和等效应变关系曲线及其简化模型	47
思考与练习	51
4 应力应变关系	53
4.1 弹性变形时应力和应变的关系	53
4.2 塑性变形时应力和应变的关系	54
4.2.1 增量理论	54

4.2.2 全量理论	57
4.2.3 全量理论和增量理论的关系	57
4.2.4 卸载时的应力应变关系	59
4.3 塑性应力应变关系的实验验证	59
思考与练习	60
5 上下界定理	61
5.1 基本概念及基本原理	61
5.1.1 静力许可应力场和运动许可速度场	61
5.1.2 虚功原理	61
5.1.3 最大塑性功原理	64
5.2 下界定理	65
5.3 上界定理	66
5.4 上界定理的应用	66
5.4.1 连续场模式	67
5.4.2 刚性块模式	68
5.4.3 矩形单元模式	71
思考与练习	73
6 确定表面压力的工程法	76
6.1 工程法简介	76
6.2 镦粗	76
6.2.1 平面应变镦粗	76
6.2.2 圆柱体镦粗	80
6.2.3 圆环镦粗	81
6.3 平辊轧制	84
6.3.1 Целиков (采利柯夫) 公式	84
6.3.2 M. D. Stone (斯通) 公式	87
6.3.3 Sims (西姆斯) 公式	89
6.4 挤压	91
6.5 拉拔	95
6.5.1 轴对称变形拉拔	95
6.5.2 平面应变拉拔	97
6.6 冲孔	99
6.6.1 受内压厚壁圆筒的塑性变形	99
6.6.2 开式冲孔的冲孔力	100
6.7 拉延	100
6.7.1 凸缘变形区的应力分布	100
6.7.2 凹模圆角区的应力分布	101

6.7.3 拉延力的计算	102
思考与练习	102
7 滑移线场理论及其应用	104
7.1 滑移线的基本概念	104
7.1.1 滑移线、滑移线网和滑移线场	104
7.1.2 平面应变问题的基本方程	104
7.2 Hencky 应力方程	105
7.3 滑移线的几何性质及其近似作法	106
7.3.1 滑移线的几何性质	106
7.3.2 滑移线场的近似作法	106
7.4 平冲头压缩矩形厚件	107
思考与练习	110
附录	112
附录1 静水压力和 Bauschinger 效应对材料屈服的影响	112
F1.1 静水压力对材料屈服的影响	112
F1.2 Bauschinger 效应对材料屈服的影响	112
附录2 求和约定和张量概念	113
F2.1 求和约定	113
F2.1.1 字母标记法	113
F2.1.2 求和标号	113
F2.1.3 自由标号	114
F2.1.4 δ_{ij} 符号	114
F2.2 张量概念	115
F2.2.1 标量	115
F2.2.2 矢量	116
F2.2.3 二阶张量的定义及其推论	116
F2.2.4 张量的矩阵、对称及反对称张量	117
F2.2.5 张量的加减和分解	117
F2.2.6 张量的不变量及其主方向	117
F2.2.7 应力张量	118
思考与练习	119
参考文献	121

1 应力状态理论

1.1 应力状态的基本概念

1.1.1 外力和内力

一般来说,要使物体变形,必须施加一定的外力,如图 1-1 所示。物体变形所承受的外力可以分为两类,一类是作用在物体表面上的力,称作表面力、面力或接触力。它可以是集中力,更一般的是分布力,它可能是施加在物体表面上的力,也可能是来自支承的约束力。另一类是作用在物体所有质点上的力,称作体积力、体力或质量力。如重力、磁力、惯性力等。上述两类外力皆可使物体产生弹性或塑性变形,但通常情况下,因为体力相对面力很小,物体的变形往往是由表面力完成的,所以一般不考虑体力的作用,但当成形速度很高,如金属的爆炸成形、高速锻造等则应考虑成形时的惯性力。

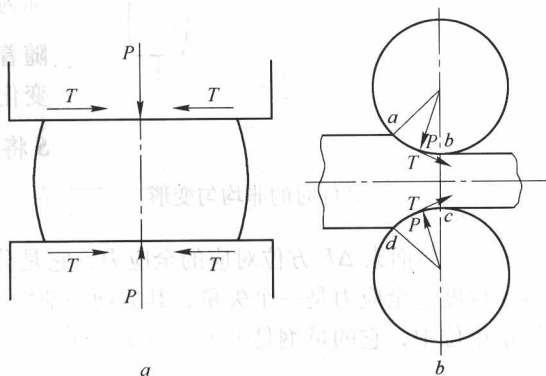


图 1-1 自由锻及轧制时工件受到的外力
a—自由锻; b—轧制

想象用某一平面将在外力作用下处于平衡状态的物体切截成两部分,如图 1-2 所示,显然,被截开的任一部分只有在其上作用外力与另一部分对其作用内力的共同作用下才能保持平衡。因此,当物体上作用有外力时,在物体内便要产生一部分和另一部分间的相互作用,这种相互作用就是与外力相应的内力。内力一般为连续分布力系,除具有与外力相平衡的性质外,特殊情形下内力本身亦形成自相平衡力系。如图 1-3 所示,当轧辊直径及压下量较小而轧件厚度较大时,轧件的塑性变形将主要产生在其与轧辊接触表面附近的表层区域,于是上下表层金属受到的压缩显著大于中间部分的金属,致使表层金属力图得到较大的延伸,而中间部分金属

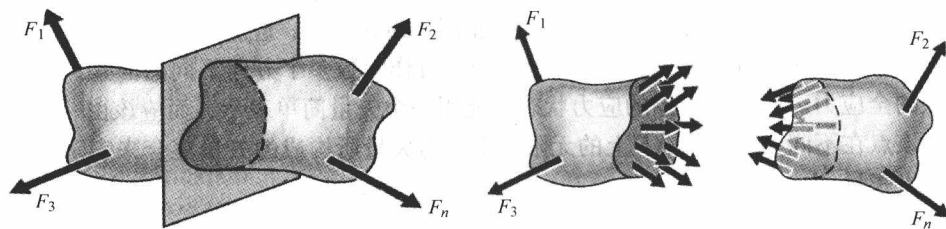


图 1-2 内力与外力的相互关系

的延伸较小。由于轧件是一个整体，因此在上下表层内将产生纵向压应力，而中间部分产生纵向拉应力，这些力在轧件内自相平衡。表层金属纵向伸长被限制的结果将导致其被迫产生横向流动，从而使轧件的横断面呈现中凹状。

1.1.2 应力的概念

如图 1-4 所示，若某给定截面上任一点 A 周围微小区域 ΔF 所受内力的合力为 ΔP ，则 ΔP 与 ΔF 的比值

$$\bar{S} = \frac{\Delta P}{\Delta F} \quad (1-1)$$

表示与面素 ΔF 方位对应的在 ΔF 范围内单位面积上内力的平均集度，显然， $\bar{S}$ 是一个矢量，称为 A 点的与面素 ΔF 方位对应的平均应力。

随着 ΔF 的逐渐缩小， $\bar{S}$ 的大小和方向都将逐渐变化。当 ΔF 趋近于零时，内力 ΔP 也趋于零， $\bar{S}$ 将趋于一极限 S ，即

$$S = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} \quad (1-2)$$

S 称为 A 点处与面素 ΔF 方位对应的全应力，它是分布内力系在 A 点的集度，反映内力系在 A 点的强弱程度。全应力是一个矢量，其方向一般既不与面素 ΔF 垂直，也不与其相切。在我国法定计量单位中，它的量纲是 Pa ($1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$)。

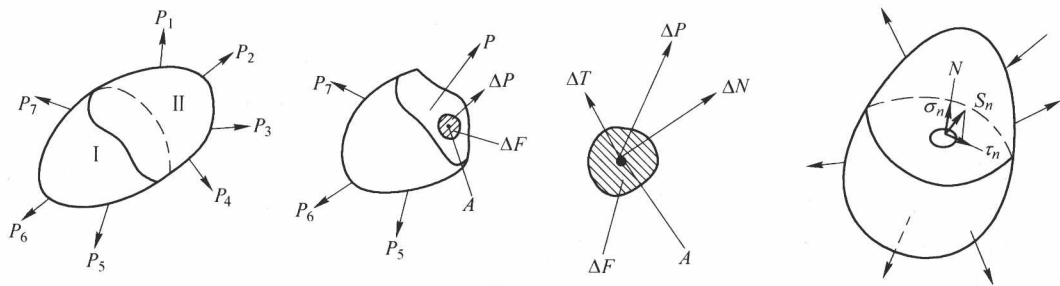


图 1-4 作用在微小面素上的力

物体内部存在应力，称物体处于应力状态之中。由于处于应力状态物体的各质点都处于和其周围所有质点发生作用的状态之中，因此面素 ΔF 在空间处于任何方位时 A 点都有应力存在，并且一般情况下，应力的大小和方向均不相同。由此可见，应力 S 不仅依赖于面素 ΔF 的空间位置，而且和面素 ΔF 的方位有关。过一点 A 可作无数多个方向不同的面素，于是可得无数个 A 点的全应力。因此，一点的应力状态不能用一个矢量简单表示，而应该由一个具有一定性质的由该点在不同方位面素 ΔF 上的无限多个应力矢量所构成的矢量集合来表示，该矢量集合称为应力张量。

1.1.3 应力的分解

若在 oxy 直角坐标系内受力物体某面素 ΔF 的外法线为 N ，面素 ΔF 上 A 点的全应力为

S_n , 如图 1-4 所示, 将全应力沿其作用面的法线和切线方向投影, 得作用方向垂直于面素的正应力 σ_n 及平行于面素的切应力 τ_n , 显然

$$S_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (1-3)$$

若全应力 S_n 在 3 个坐标轴上的投影分别为 S_{nx} 、 S_{ny} 、 S_{nz} , 如图 1-5 所示, 则得全应力沿坐标轴的分解式

$$S_n = e_x S_{nx} + e_y S_{ny} + e_z S_{nz} \quad (1-4)$$

式中, $e_i (i = x, y, z)$ 为沿坐标轴 i 的单位矢量。

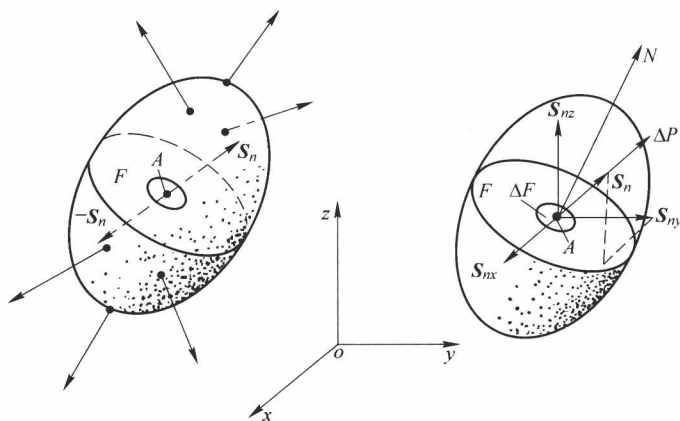


图 1-5 面素上的全应力沿坐标轴方向的分解

特别, 当面素 ΔF 的外法线 N 平行于某一坐标轴如 x 轴时, 如图 1-6 所示, 则全应力矢量沿坐标方向 x 的 3 个应力分量为: 一个垂直于作用面的法向分量 σ , 两个平行于作用面的切向分量 τ 。此时, 式 (1-4) 变为沿坐标平面的分解式

$$S_x = e_x \sigma_x + e_y \tau_{xy} + e_z \tau_{xz} \quad (1-5a)$$

式中, $\tau_{xi} (i = y, z)$ 为作用方向沿坐标轴 i 的切应力分量。

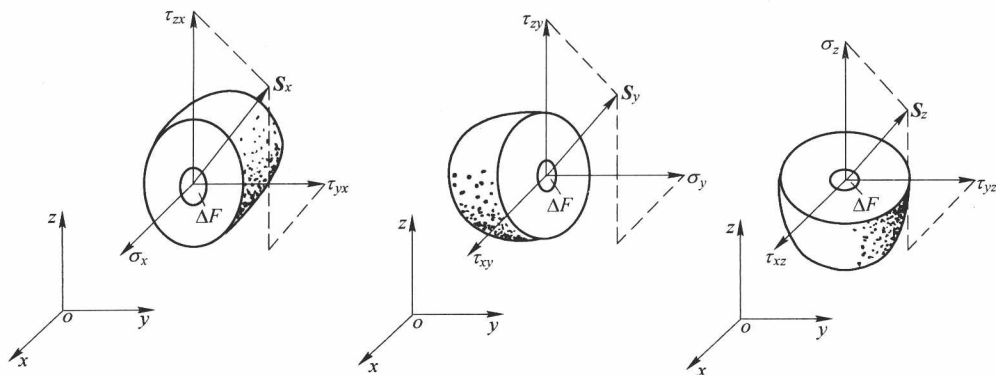


图 1-6 坐标平面上的全应力分解

同理, 当面素 ΔF 的外法线 N 分别平行于 y 轴时,

$$S_y = e_x \tau_{yx} + e_y \sigma_y + e_z \tau_{yz} \quad (1-5b)$$

平行于 z 轴时,

$$S_z = e_x \tau_{zx} + e_y \tau_{zy} + e_z \sigma_z \quad (1-5c)$$

上述应力分量的下角标记遵循如下规则: 第一个角标表示该应力分量的作用面, 即面素的外法线方向; 第二个角标表示应力分量的作用方向; 二角标相同时, 以一个角标简记表示。显然, 两个下角标相同的是正应力分量, 例如 σ_{xx} 表示 x 面上平行于 x 轴的正应力分量, 一般简记为 σ_x ; 两个下角标不同的是切应力分量, 例如 τ_{xy} 即表示外法线平行于 x 轴的平面上平行于 y 轴的切应力分量。

应力分量的正、负号常按如下方法确定: 在外法线指向坐标轴正向的微分面 (称为正面) 上, 指向坐标轴正向的应力分量为正, 在外法线指向坐标轴负向的微分面 (称为负面) 上, 指向坐标轴负向的应力分量为正。显然, 按此规定, 拉伸正应力为正, 压应力为负。

1.2 斜面上的应力及应力边界条件

1.2.1 斜面上的应力

如图 1-7 所示, 围绕某点 A 截取 3 个两两相互垂直的平面及任一倾斜面得四面体体素 $oabc$, 以四面体 3 个两两相互垂直平面的交线为坐标轴 x 、 y 和 z 。若斜面的外法线与 x 、 y 和 z 轴的夹角分别为 α_x 、 α_y 和 α_z , 则斜面外法线的方向余弦 l 、 m 和 n 可表示为

$$\begin{cases} l = \cos \alpha_x \\ m = \cos \alpha_y \\ n = \cos \alpha_z \end{cases} \quad (1-6)$$

设斜面面积为 F , 3 个两两相互垂直平面的面积分别为 F_x 、 F_y 和 F_z , 根据几何关系, 有

$$\begin{cases} F_x = Fl \\ F_y = Fm \\ F_z = Fn \end{cases} \quad (1-7)$$

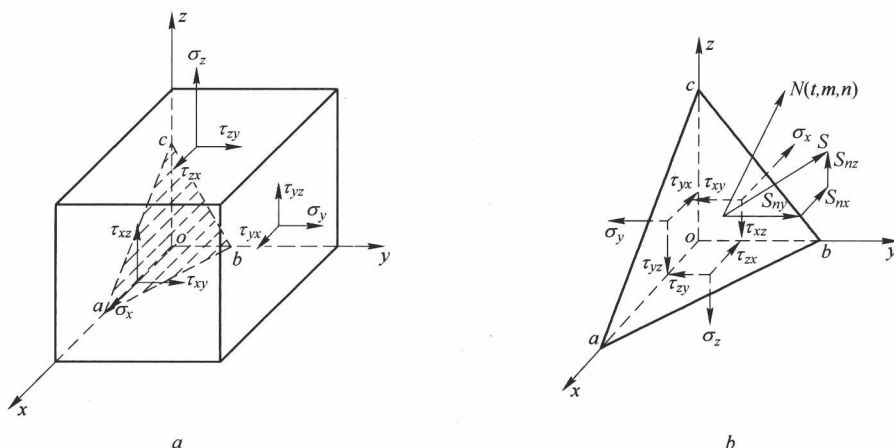


图 1-7 空间斜截面上的应力

若作用在斜面 abc 上的全应力为 S_n , 其在 3 个坐标轴方向的分量为 S_{nx} 、 S_{ny} 和 S_{nz} , 则

$$\begin{cases} S_{nx} = S_n l \\ S_{ny} = S_n m \\ S_{nz} = S_n n \end{cases} \quad (1-8)$$

若四面体处于平衡状态，其上所有应力的合力在各轴上投影之和必须等于零，于是，对于 x 轴

$$S_{nx}F = \sigma_x Fl + \tau_{yx}Fm + \tau_{zx}Fn$$

所以

$$S_{nx} = \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n$$

同理可得 y 和 z 轴的平衡关系，并写在一起为

$$\begin{cases} S_{nx} = \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \\ S_{ny} = \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n \\ S_{nz} = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1-9)$$

式 (1-9) 写作矢量的形式即为

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_x l + \mathbf{S}_y m + \mathbf{S}_z n \quad (1-10)$$

S_{nx} , S_{ny} , S_{nz} 分别往斜面法线和切线方向投影的代数和即是斜面上的正应力 σ_n 和切应力 τ_n ，于是正应力

$$\sigma_n = S_{nx}l + S_{ny}m + S_{nz}n$$

将式 (1-9) 代入上式得

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + lm(\tau_{xy} + \tau_{yx}) + mn(\tau_{yz} + \tau_{zy}) + nl(\tau_{zx} + \tau_{xz}) \quad (1-11)$$

而 $S_n^2 = S_{nx}^2 + S_{ny}^2 + S_{nz}^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$ ，于是切应力

$$\tau_n = \sqrt{S_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{S_{nx}^2 + S_{ny}^2 + S_{nz}^2 - \sigma_n^2} \quad (1-12)$$

若四面体体素如此之小，以致其 4 个面上的应力即表示 A 点处与上述 4 个面方位一致的应力，则由式 (1-11)、式 (1-12) 可知，如果已知一点在通过其本身的 3 个相互垂直平面上的 3 个全应力矢量或其在 3 个坐标轴上的 9 个投影，该点在通过其本身的任一斜面上的应力均可求得。为直观描述一点的应力状态，可将点在 3 个相互垂直平面上的应力表示在认为是无限小的直角六面体的表面上，如图 1-8 所示，由此得到的图形称为应力状态图示。

因此，一点的应力状态可用该点在 3 个相互垂直平面上的 9 个应力分量来表示。

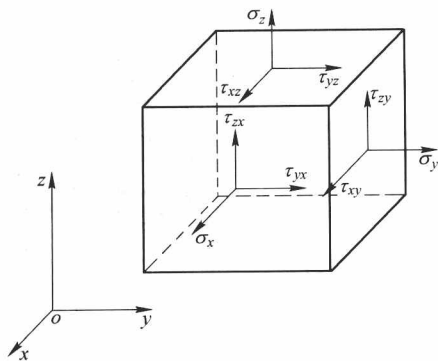


图 1-8 应力状态图示

1.2.2 应力的张量表示

张量常定义为由若干个当坐标系改变时满足转换关系的分量组成的集合。可以证明表示一点应力状态的 9 个应力分量会因坐标轴的转换而按一定规律变化，因此，可用一应力张量来表示一点的应力状态。应力张量常用如下的矩阵表示

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

实际上, 点的应力张量并非决定于 9 个应力分量, 而是决定于 6 个, 因为下角标互换的切应力是相等的, 即 $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$, 于是, 独立的应力分量为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, 与之相应, 应力张量是对称张量, 即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 并可简写为,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ & \sigma_y & \tau_{zy} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

分析讨论旋转体受力变形的轴对称问题时, 通常采用圆柱坐标系, 此时, 任意一点的位置由矢径 ρ 、极角 θ 和坐标 z 给定, 体素上的应力分量如图 1-9 所示, 与之相应, 一点的应力张量可写为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\theta\rho} & \tau_{z\rho} \\ & \sigma_\theta & \tau_{z\theta} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

在讨论球形物体的受力变形问题时, 通常采用球坐标系, 此时, 任意一点的位置由矢径 ρ 、旋转角 θ 和 φ 给定, 体素上的应力分量如图 1-10 所示, 与之相应, 一点的应力张量可写为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\theta\rho} & \tau_{\varphi\rho} \\ & \sigma_\theta & \tau_{\varphi\theta} \\ & & \sigma_\varphi \end{bmatrix}$$

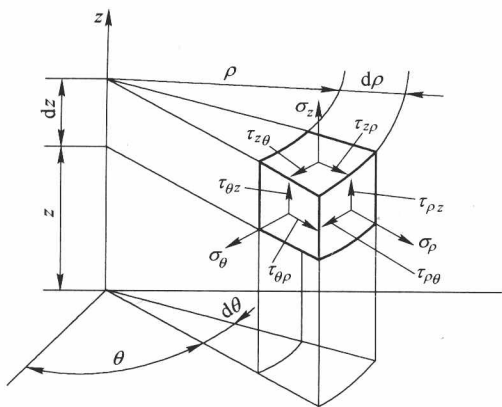


图 1-9 圆柱坐标系中体素上的应力分量

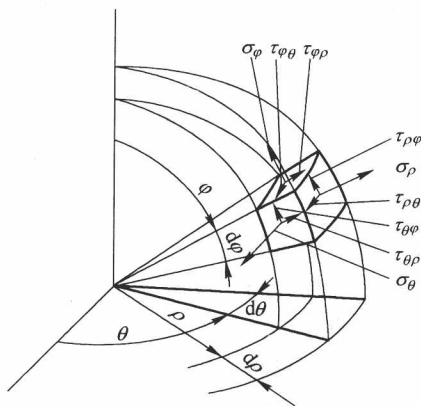


图 1-10 球坐标系中体素上的应力分量

1.2.3 应力边界条件

如果 A 点处于物体的边界上, 四面体的斜面 abc 就是物体的外表面, 其上作用的表面力为 $p_i (i = x, y, z)$, 则式 (1-9) 所表示的平衡关系仍然成立, 此时

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1-15a)$$

这就是应力边界条件的表达式，或简写为

$$p_i = \sigma_{ji} l_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (1-15b)$$

材料变形时常见的应力边界条件有自由边界条件和摩擦边界条件。裸露的、不与任何物体相接触的边界即为自由边界，若忽略大气压力，自由边界上的表面力都等于零，即 $p_x = p_y = p_z = 0$ 。单位面积上的摩擦力即是接触表面的切应力 τ_f ，对其计算常采用如下几种假设：

(1) 库仑摩擦定律：

$$\tau_f = \mu p$$

式中 μ ——接触面上的摩擦系数；

p ——单位压力。

(2) 经验式：

$$\tau_f = mk$$

式中 m ——摩擦影响因子，其取值范围为 $0 \sim 1$ ；

k ——材料的剪切屈服应力。

(3) 液体摩擦：

$$\tau_f = \eta \frac{\Delta v}{\delta}$$

式中 η ——润滑剂的黏度；

Δv ——相对运动的速度；

δ ——润滑层的厚度。

物体变形时，还有一些准边界条件，例如：变形体内部对称面上的切应力必须为零，塑性流动区与刚性区分界面上的切应力等于材料的剪切屈服应力。

1.3 主应力及应力张量不变量

1.3.1 主应力及应力不变量

根据张量理论，受力物体内的任一点均存在3个两两互相垂直的方向，在垂直于这3个方向的3个平面上只有法向应力，而切向应力等于零，且这些面上的正应力是过这一点所有截面上正应力的极值。我们称这些正应力为主应力，主应力所在的平面为主平面。

设图1-7中的斜面就是主平面，则该平面上的切应力 $\tau_n = 0$ ，其上的正应力就是主应力，也是全应力，于是，根据方程式(1-8)和式(1-9)可得

$$\begin{aligned} \sigma_n l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \sigma_n m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \sigma_n n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1-16a)$$

或

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma_n) m + \tau_{zy} n &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma_n) n &= 0 \end{aligned} \quad (1-16b)$$

式 (1-16b) 是以 l 、 m 、 n 为未知数的三元一次线性方程组, 显然 $l = m = n = 0$ 为该方程组的一般解, 但由解析几何可知

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-17)$$

因此上述方程组必有非零解, 而其存在非零解的充要条件是方程组 (1-16) 的系数行列式的值等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (1-18a)$$

将式 (1-18a) 展开, 可得 σ_n 为未知数的一元三次方程, 即应力状态的特征方程

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (1-18b)$$

式中

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{cases} \quad (1-18c)$$

解方程式 (1-18) 可得到 3 个实数根——3 个主应力 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 , 即

$$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0 \quad (1-19a)$$

或

$$\sigma_n^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma_n^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\sigma_n - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0 \quad (1-19b)$$

比较式 (1-18)、式 (1-19), 可得

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases} \quad (1-20)$$

由于对于给定的应力状态, 该点的主应力只有一组数值, 因此, 特征方程式 (1-18) 的系数应该是单值的, 即尽管应力张量的各分量会随坐标轴的不同而变化, 但系数 I_1 、 I_2 、 I_3 为不随坐标轴而变化的常量, 因 I_1 、 I_2 、 I_3 分别与应力量纲的一次、二次及三次方相对应, 所以分别称它们为应力张量的一、二和三次不变量。将解得的每一个主应力代入式 (1-16) 并与式 (1-17) 联解, 即可得到该主应力的方向余弦, 从而得到 3 个相互垂直的主方向。

1.3.2 主应力图示

如上所述, 一点的主应力为与坐标轴的选取无关的不变量, 因此, 可用其表示一点的应力状态。一般按主应力的代数值大小约定 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。将主应力用带箭头的矢量线画在主平面上, 箭头朝里表示压应力, 箭头朝外表示拉应力, 能形象地表示一点的应力状态, 这样得到的图示称为主应力图示。主应力图示能直观分析质点的受力状态, 还能衡量材料变形工艺的优劣。主应力图示共有 9 种: 单向应力状态的两种、二向应力状态的三种和三向应力状态的 4 种, 如图 1-11 所示。

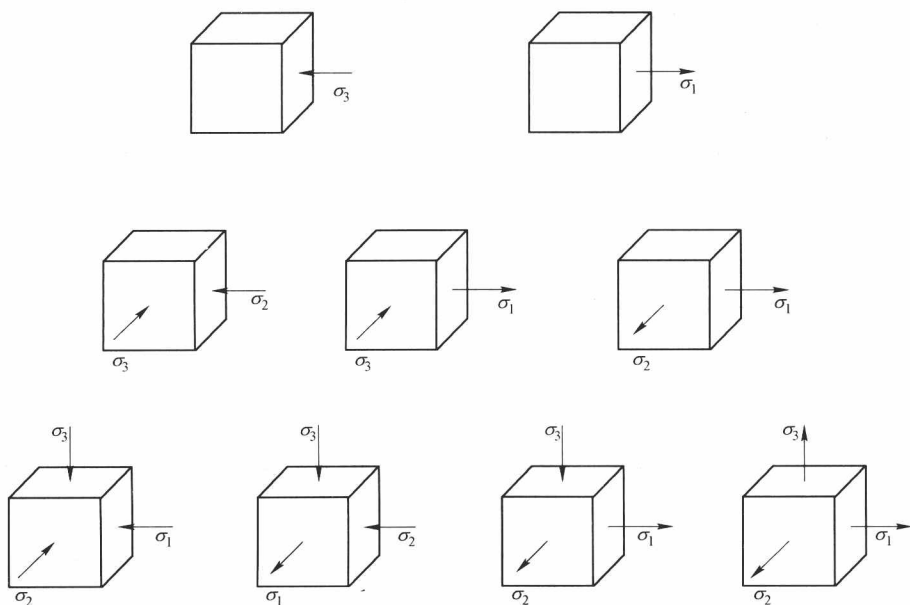


图 1-11 主应力图示

1.3.3 应力椭球

一点的应力状态除可用主应力图示表示外，还可用应力椭球来描述。如果以主应力的方向作为 3 个坐标轴的方向，这样得到的坐标系称为主轴坐标系。由式 (1-9) 可知，在主轴坐标系里，任意斜面上全应力沿 3 个主轴的分量为 $S_{n1} = \sigma_1 l$ ； $S_{n2} = \sigma_2 m$ ； $S_{n3} = \sigma_3 n$ ，注意到式 (1-17) 成立，于是

$$\frac{S_{n1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_{n2}^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_{n3}^2}{\sigma_3^2} = 1$$

上式描述的曲面为一椭球面，称为应力椭球面。它描述了过一点任意斜面全应力矢量 S 端点的轨迹，如图 1-12 所示，显然，该椭球面主半轴的长度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，且 3 个主应力中的最大和最小者也是一点所有方向应力中的最大和最小者。此外，当 3 个主应力相等时，应力椭球面变成了球面，与之对应的应力状态称为球应力状态。在这种状态下，所有方向都是主方向，所有方向的应力都相等，如图 1-13 所示。

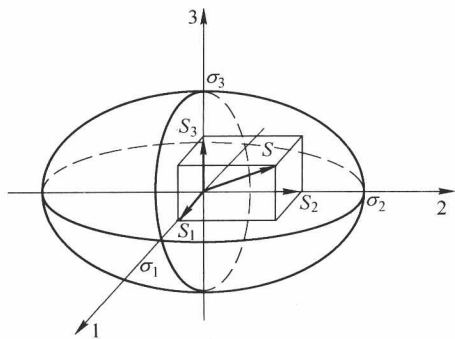


图 1-12 应力椭球面

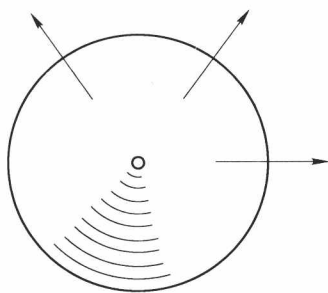


图 1-13 球应力状态