[illegible]賢芳

陳賢芳

范氏高等代數學

陳□生譯

A Translation
from Henry B. Fine's
"College Algebra"

開明書店

范氏高等代數學

九年九月初版　　一九五〇年十月四版

紙本　每冊人民幣一四三五元

著　者　　Henry B. Fine

譯　者　　陳　嶽　生

北京八面槽

行　者　　開　明　書　店

代表人范洗人

刷　者　　開　明　書　店

苑(5373)

原　　序

在本書裏面，著者把代數學上各種手續所根據的理論，加以啓發，雖努力求其儘量近於淺易和簡略，但亦不使其失卻聯繫和嚴正。就各種手續本身而論，則力圖其最可適合實際計算之目的．

凡是與中等及高等學校學生求學時所需要的代數學有關的，都包含在本書之內．這些不同的項目，其排列的次序，著者力使其合於邏輯上的聯繫．

在著者看來，本書似應分成兩編，第一編是預篇，專論代數學的數系，第二編是正篇，專論代數學的本身．

著者論數時所根據的，乃是純數 (cardinal number) 的概念，以及自然數紀 (natural scale) 中最先呈現的次序概念．採用這個講法的主張，是有理論方面的研討的，這種研討，這裏不必予以援引．但是著者憑着經驗深信，從教育的觀點看來，這也是最好的講法．舉個例來說，一個無理數的序次定義，即使給一個年輕的學生看了，他也會了解它的意義，然而無理數的其他任何實在的定義，必將過分抽象，以致程度很高的學生，也常常不能對於它有正確的了解．(前者指 Dedekind 的無理數理論而說，後者殆指 Cantor 的無理數理論而說——譯者．)

著者對於數的討論，也許要被認爲不必如此細到．但是數的討論，乃是代數學上的基本問題，一個頭腦清醒的寫作人，在論述這樣的基本問題時，決不可以把他的討論中應有的各點，略去不管，也決不可以對於需要證明的陳述，不予證明．著者希望，討論之中的各項細節，會引起思想豐富的學生們的興趣；但就一般學生而論，卻祇要他們從這討論，懂得實數的序次特徵，以及實數與實數之間相等與不等關係的序次特徵，此外又懂得，就實數與複數而論，其基本運算所

許設立的定義，都遵守對易，締結，以及分配三定律．

本書正篇開始時，著者察見，在以文字代數的代數學中，對易，締結以及分配各律，無異於基本運算的定義．這些代數的定義，都經詳細陳述，然後用演繹的方法，從這些定義．把代數學上各種手續的全部理論，以及實用方面的各條計算定則，都推導出來．

這一篇的內容，著者不打算詳細敍述．同一般通用教科書相比，就會覺得它有幾個特點．著者頗知留意，不要單單爲了標新立異的緣故，把業經公認爲適用的方法，摒除不用．但在爲了獲得邏輯上的相容起見，著者認爲通用的方法不適用之時，或在著者發見一個機會，可將一個問題予以簡化之時，著者立即捨棄這些方法，毫不猶豫．特殊方法，正文與習題中都不收．但從另外一方面說來，凡是代數學上的一般方法，著者常常設法使學生對於它們可到眞正精通的地步．

求定係數法乃是解析學上的一個主要探索法，這個方法，著者不將它擱在正篇的後半部，卻將它提得很前，而且此後遇有可以利用它的機會，就加以採用．這樣一來，各項目的排列，當然受到了影響．特別要提出來說的，就是著者在論述分式的一章中；順便研討了部分分式．在這地方講述部分分式，乃是很合邏輯的，且若處理適宜，還可以使學者對於代數學上的基本計算，得到最好的實習．

著者對於除法變換及其各推論，也予以非常的重視，而且緊接着除法變換，引入了效用宏大的綜合除法．

在論述方程式的最初幾章裏面，將見著者對於解方程式所根據的推理方法，有頗詳盡的討論；對於可以利用二次方程式得解的方程組，予以較通常更趨系統化的處理；而且對於二元一次及二次方程式的位跡，有頗細到的研討．

指數是正整數時適用的二項定理，著者把它看成連乘法的特例．著者憑經驗深信，沒有別的更好的方法，可使學生懂得這個重要定理的意義．在論述分指數的一章裏面，引入了廣義二項定理的實用，但

是該定理本身的證明，以及凡與無窮級數有關的各項目，卻延擱到本書將近終了時再講.

在講述方程式論以及行列式的各章裏面，有與方程式諸根對稱函數有關的基本定理的證明，且有結式較重要各性質的討論.這兩個項目，本不屬於初等代數學(本書與初步代數學相較，固然好算是高等的，但若與代數學的高深理論相較，仍只好算是初等的，所以原著者這樣說——譯者)，但就大學中繼續攻讀數學的學生們而論，卻是不可缺少的.論無窮級數的各章，以及論綿續函數各性質的本書最後一章，也都是爲了這些學生們的需要而寫作的.

本書第一編所根據的，乃是韓彌登 (Rowan Hamilton)，格拉斯芒 (Grassmann)，赫莫茲 (Helmholtz)，得迪耿 (Dedekind)，以及康鐸 (Georg Cantor) 諸家的意見. 但著者迄今未知，以前有什麽人也從著者所取的觀點，啓發序次數的學說，而且也講得這樣的詳細.

搜集代數本身方面的材料時，著者得益於許多代數書籍的啓示，尤以克斯律忒(Chrystal)氏代數學爲最，著者特在這裏深致謝意.

本書的準備，歷時數年之久.從 1893 年起，每年承出版公司的好意，印行一本小册子，給普林斯登 (Princeton) 大學的一年級生參考，其中所載，乃是著者對於代數學上比較重要的各部分，在當時認爲最合意的處理方法. 著者得到同事愛生哈 (Eisenhart) 和吉勒庇 (Gillespie) 的幫助，每作一次新的試驗後，就努力把確被認爲好的選入，而將確被認爲不合意的剔去.因爲這個緣故，本書有許多地方，曾經重寫過好幾次.此後的經驗，無疑地將使許多地方有更被改良的可能；不過著者抱有希望，就本書現在的內容而論，已足使人知道，若對於代數學上各項手續所據的推理方法，予以應有的研討，則代數學不但更可讓學生容易了解，而且更有動人的意味.

Henry B. Fine

普林斯登大學一九〇五年六月

譯　序

范氏高等代數學，其特點是立論力求謹嚴，立法力求有據，頗帶些幾何學的風味．著者在原序第一節中說："雖努力求其儘量近於淺易和簡略，但亦不使其失卻聯繫和嚴正．"又在原序第四節中說："一個頭腦清醒的寫作人，决不可以把他的討論中應有的各點，略去不管，也决不可以對於需要證明的陳述，不予證明．"這些話，的確能夠代表全書的作風，同時也可以對於教者和讀者，予以有力的啓示．而譯者也因為這個緣故，在譯述本書時，不但力求行文的信達，而且力求用字的恰當．例如 given 與 known，一般都譯作已知，其實它們是有區別的．Given 的不一定是 known 的，known 的也不一定是 given 的．倘若遇見 a given known thing 或 a known given thing，而將它們都譯成"一個已知的已知的東西"和"一個已知的已知的東西"，豈不是一件笑話麽．所以譯者把 given 譯作已設的或所設的，而將 known 譯或已知的，這樣便沒有混淆了．(按 given 一字，編譯館本數學名詞不載，而科學名詞審查會本算學名詞作所設或所與．)

又如 Process 一字，編譯館本數學名詞作方法或步驟，科學名詞審查會本作過程，三個譯名都不妥．Process 的進行，可以有幾種方法，也可以分成幾個步驟．假如把"this process can be performed by three methods"，譯成"這個方法可以用三個方法來實行"，或把"this process can be completed in five steps，"譯成"這個步驟可以分五個步驟來完成，"似乎都有語病罷！過程二字，用在物理學上或化學上很相合，但是用在數學上則嫌未合．所以譯者就把 process 譯作手續，於是 reversible process 譯作可倒的手續，也就講得過去了．

再如 a polynomial in x 或 an equation in x，决不能譯成 x 的多項式或 x 的方程式，因為原文用 in 字，是有把 x 看成主要變數或

主要未知數的意思，亦卽有 in powers of x 或 in terms of x 的意思．須知 function of x 纔的確是 x"的"函數，而 equation of motion 纔的確是運動"的"方程式． 譯者起初擬將 a polynomial in x 譯成"以 x 爲變數的多項式，"而把 an equation in x 譯成"以 x 爲未知數的方程式"，後來又想到這樣譯法，仍嫌未妥，因爲除 x 外是可以還有其他變數或未知數的．所以最後決定將前者譯做"由 x 構成的多項式"，而將後者譯做"由 x 構成的方程式"，因爲 a book in Chinese 是可以譯做"用中文寫成的書"的．

Degree 一字譯作次，於是 the degree of this equation is three 一語，當然譯作這個方程式的次是三．這樣的譯法，也許有人要認爲生硬，因爲這句話的普通譯法，是"這個方程式的次數是三"．但"次數"兩字要同 number of times 相混淆，譯者卽爲免除這混淆起見，纔採用了上面的譯法．同時，number of times 也不譯作次數，而譯作回數．Product 一字有人譯作乘積，譯者從前好像也這樣譯過，現在覺得這個譯名實嫌不妥．單用積字，何嘗不可，卽使有時爲行文方便起見，也應該用相乘之積來代替．一般人似乎都有一個習慣，覺得名詞非用兩個字來表示不可，其實未必盡然．就數學名詞而論，商豈能作"除商"，和豈能作"加和"？他如方程式的"根"，行列式的"元"，我們也沒有方法用兩個字來表示啊！所以像 the product x^2yz，譯者就把它譯成積 x^2yz，看慣了讀慣了，也就覺得它順口了．又如 value 一字，祇能譯作"值"，萬萬不能在它的前面隨便加個"數"，因爲"數值"是 numerical value，它的意義是同於 absolute value 的．

全書的譯文，像上述那樣的斟酌之處很多，恕譯者不能一一盡舉．至於名詞方面，大都依照編譯館本數學名詞及審查會本科學名詞．其有兩書都不見的，則參照綜合大辭典酌定．不過有些名詞，各本的譯法都嫌不妥，譯者祇得另定，現在挑幾個比較重要而普通的，在這裏解釋一下．

Equivalent groups 編譯館本數學名詞作等濃羣，濃字的意義當然是濃度．按蕭君絳譯圓正造著羣論 23 頁有云：“玆有甲乙兩集合，若對甲之各元素，可每使乙元素之一與之對應，反之，對乙之各元素，可每使甲元素之一與之對應時，則此兩集合，名曰具有同一之濃度，或曰同等．”譯者以爲濃度的意義甚晦，且容易引起誤解，不如同等二字的意義明顯，且與 equivalent 一字的意義切近，所以把 equivalent groups 譯作同等羣．Equivalent 一字譯作同等後，equivalent equations 譯作同等方程式，也講得通．這個名詞，編譯館本作同值方程式，不知所同者何值，因爲方程式是沒有值的．據審查會本，equivalent equations 作同根方程式，而同值方程式乃是日文的譯名．根字亦不妥，因爲就聯立方程式而論，適合各方程式的諸未知數之值，通常叫做解 (solution)．

Associative law，編譯館本作結合律，審查會本作綿合律，都不妥．結合乃是一般的 combination，兩個數相加也是結合，兩個數相乘也是結合，而所謂 associative law，其實只是結合手續進行時的步驟而已．與其用結合二字，毋寧用綿合二字，但在用文字代數時，祇能綿而不能合．所以譯者把 associative law 譯作綿結律．

Graph 一字，自來就沒有適當的譯名．記得三十年前譯者初入商務書館編譯所時，曾向段育華先生建議，將此字音譯爲‘格欄幅”，也曾流行過一時．後來究因生硬無義，漸漸被人摒棄．但審查會本作標格，是否從“格欄幅”蛻化而來，不可查考．審查會本此字又作脈，而編譯館本也作脈，脈字的取義，據譯者猜度，大約是山脈的蜿蜒，或者是葉脈的分布，或者是脈絡的延伸．用脈字來譯 graph，在創始者以爲象形會意，兼而有之，可惜他是苦心空費了．因爲 graph 不必一定是一條連續的線，也可以是一個孤零零的點，也可以是幾個點，也可以是點與圈圈，也可以像一朵花，也可以像街道．這還是數學上各種函數的 graph．若在統計學上畫幾個圓或幾條線，或畫幾條柱子，幾

個扇形，也叫做脈，那眞是相去未免太遠了．況且在現代生理研究方面，有所謂 graph of pulse，乃是表示脈搏的 graph，若照上述的譯法，豈不成了"脈的脈"麼？物理學名詞改訂本(現正在審查中，譯者亦列席發表意見)作標繪圖，甚好，因爲畫 graph 是要先定坐標的．但在數學上，此名似嫌過於具體，所以譯者將 graph 譯作位跡，位是指 graph 在坐標系中的地位，而跡則可線可點，似乎差強人意罷！

Measure 一字作名詞解，一向也沒有恰當的譯名．本書 26 面 § 80，有 measure 的定義是："If the magnitude contains the unit a certain number of times exactly, we call this number its measure"．接下去又有一句："In particular, we call the measure of a line segment the length of the segment"．又據韋氏大學字典，measure 的解釋與這裏所舉定義相合的有，"An extent, degree, or quantity of something."因此，譯者就把 measure 譯成含度．

Continuous function，本來譯作綿續函數，審查會本作綿續函數，但編譯館本作連續函數．譯者以爲函數的綿續，有嚴密的定義，與普通的連續不同，似應加以區別，所以採用綿續二字．

關於名詞譯文的話，就在此處打住．關於全書的內容，固然也有可以評議的地方，但是大概說來，本書確好算是一本標準的教科書．有些地方，譯者原擬加一些註解，但爲時間所限，祇能待諸來日．全書譯文，倘有不到之處，尙希教者讀者，隨時賜教，俾可改進．

陳嶽生謹識

一九四九年於上海震旦女子文理學院

目　次

第一編　論數

第二編　代數

第一編 論數

I. 自然數——計數法,加法,及乘法

物羣及羣之純數

物羣. 日常所見之物,不但是一個一個的,而且是合成一羣一羣 (groups) 或一集一集 (assemblages) 的. 1

一隻手的指頭,一隊牛,一個多角形的頂點,就是物羣的例子.

有某某數物,不將它們看成一個一個,而將它們當作整體,以別於他物 此時心目中卽認爲此數物組成一個羣因而全部成爲單個對象(a single object).

爲便利起見,組成一個羣的各物,叫做該羣的元(element).

同等羣. 一一對應. 由文字 ABC 與 DEF 組成的兩個羣,有如下的關係,卽這一個羣的各元同那一個羣的各元,可以一個配一個的配成一對一對. 例如 A 與 D, B 與 E, C 與 F, 都可以配成對. 2

兩個羣的所有各元,都能這樣的配對時,就說這兩個羣同等 (equivalent);將各元配對的手續,叫做使兩個羣發生一對一或一一對應 (one-to-one correspondence) 的關係.

3 **定理.** 兩個羣各與同一第三個羣同等,這兩個羣也同等。

因從假設,可使這兩個羣與第三個羣成一一對應. 但在每從這兩羣各取一元與第三羣的同一元配對時,也認這兩個元是一對,則此兩羣也成一一對應.

4 **純數.** 一切可以組成的物羣,都可歸入同等羣的各類. 已知的兩個羣是否屬於同類,視其是否可成一一對應而定.

例如由文字 $ABCD$ 與 $EFGH$ 所成的羣,屬於同一類.而 $ABCD$ 與 EFG 這兩個羣,就屬於異類.

一類中一切諸羣的公性,可以區別一類之羣與他類之羣的,卽是羣中物的個數(number of things),或稱該羣的純數(cardinal number). 換句話說,

一羣中物的個數,或其純數,卽是該羣本身,以及凡可與該羣成一一對應的各羣所有的公性.

我們還可以這樣說:"物羣的純數是羣的一種性質.若將羣內各物重行排列,或逐一換成他物,該性質不變";或說:"該性質與物之特徵及其在羣內的排列均無關係".

因將各物重行排列或逐一換成他物,不過是將該羣換成同等羣而已(§2). 而在此等變更發生於羣內時依舊不變的性質,非與物之特徵及其排列無關不可.

部分． 第一羣的元都是第二羣的，第二羣的元不都是第一羣的，則稱第一羣是第二羣的部分 (part)． 5

例如羣 ABC 是羣 $ABCD$ 的部分．

從這定義，立可推知：

若三個羣之中的第一羣是第二羣的部分，而第二羣是第三羣的部分，則第一羣又是第三羣的部分． 6

有窮羣與無窮羣． 一羣或一集，與其各部分均不同等者，我們說它是有窮的 (finite)；確可與其某部分同等者，說它是無窮的 (infinite)．* 7

例如羣 ABC 就是有窮的；因爲不能使它與 BC 或其他任何部分成一一對應．

但是寫不完的任何一列記號，例如寫不完的一列數字 1, 2, 3, 4, ⋯⋯，就是一個無窮集．

在全集 1, 2, 3, 4,⋯⋯與其從 2 起的部分之間，即

在　1, 2, 3, 4, 5,⋯⋯　(a)

與　2, 3, 4, 5, 6,⋯⋯　(b)

之間，可以建立一一對應的關係，祇要將 (a) 中的 1 與 (b) 中的 2，(a) 中的 2 與 (b) 中的 3，等等，都配成對——在 (a) 中每選一數字，在 (b) 中必有一個對應的數字．

純數的大與小． 命 M 與 N 表示兩個有窮羣．下列各款必有一款成立： 8

1. M 與 N 同等，
2. M 與 N 的某一部分同等，
3. N 與 M 的某一部分同等．

* 一個無窮羣——稱無窮集 (infinite assemblage) 的時候較多，它的各元當然不能夠一一數完．但若已有一條定律，藉此可以判斷一切所設物是否屬於這樣的集，則我們認爲它就有了定義．

就第一款而論，M 與 N 的純數（§ 4）相同，或相等；就第二款而論，M 的純數小於 N 的純數；就第三款而論，M 的純數大於 N 的純數．

例若 M 是文字羣 abc，而 N 是羣 $defg$，則 M 即與 N 的一部分如 def 同等．

因此，M 的純數小於 N 的純數，而 N 的純數則大於 M 的．

9 注意． 從§7有窮羣的定義，可知此處所立"相等"，"大於"，以及"小於"各關係的定義，並無模稜兩可之處．

故據此定義，決不能謂 M 的純數同時等於且小於 N 的純數，因為這就是說，M 與 N 又與 N 的一部分同等，於是從 §3，N 與其一部分同等，最後從 §7，N 是無窮羣，將與假設互相矛盾．

10 系． 若三個純數中的第一個小於第二個，第二個小於第三個，則第一個小於第三個．

因若命 M, N, P 表示任何三個物羣，其純數合於上開條件，則 M 與 N 的一部分同等，而 N 與 P 的一部分同等；故從 §§3，6，M 與 P 的一部分同等．

11 純數系． 從祇含一個單元的羣開始，累次"加"上一件新物，即可得下面的純數系 (system of cardinal numbers)：

1. 祇有一個單元的羣，例如 | 的純數．
2. 在第一種羣內加一個單元而得的羣，例如 || 的純數．
3. 在第二種羣內加一個單元而得的羣，例如 ||| 的純數．
4. 照此遞加無盡．

這些依次相繼的純數，稱為"一"，"二"，"三"，……，而用符號 1, 2, 3, … 來代表．

關於這個數系的幾句話． 任何有窮羣的純數，稱之為有窮純數(finite cardinal)，則關於上節所述的純數系，有下面幾句話可說． 12

第一． 凡純數在這系中的都是有窮的．

羣 | 是有窮的，因為它沒有部分可與它同等（§ 7）；以後的各羣都是有窮的，因為加一個單元於有窮羣而得的羣，必定也是有窮的．* 例如 || 便是有窮羣，因為 | 是有窮的；||| 也是有窮羣，因為 || 是有窮的；其他依此類推．

第二． 凡有窮純數都在此系之中．

因由定義，凡有窮純數，都是有窮羣例如 M 的純數． 但我們可用短線 |||…| 作成一個羣，與任何已知有窮羣 M 同等，祇要使每一條短線 | 對應於 M 中的每一元就行． 而這一個由短線組成的羣，非有一條最後的短線不可，所以必在 § 11 的系內；因若不然，就要成為永無盡止，於是它本身以及 M，就都要成為無窮的了（§ 7）．

第三． 這些純數之中沒有兩個相等．

這是從 § 8 的定義可以推知的． 因為如上所示，|，||，|||，…各羣都是有窮的；而且每兩個羣之中，必有一個與其他一個的一部分同等．

---

*此可證明如下〔康鐸(G. Cantor)的證法〕：

若 M 表示一個有窮羣，而 e 表示一個單元，則加 e 於 M 而得的羣 Me，也是有窮的．

命 $G\equiv H$ 表示 G 與 H 兩個羣同等．

若 Me 不是有窮的，則據 § 7，它非與它的某一部分同等不可

命 P 表示這一部分，則有 $Me\equiv P$．

(1) 假定 P 不含 e．

命 f 表示 P 的元，該元與 Me 中的 e 配成一對，並用 P_1 代表 P 除去 f 後所餘的．

於是因 $Me\equiv P_1f$ 而 $e\equiv f$，故有 $M\equiv P_1$．

但這是不可能的，因為 M 是有窮羣，而 P_1 是 M 的一部分（§ 7）．

(2) 假定 P 含有 e．

P 中的 e 決不可與 Me 中的 e 配對，因若如是，則 P 除 e 後所餘的，亦即 M 的一部分，便將與 M 同等了

但尚可以假定，P 中的 e 與 Me 中 e 以外的某元，例如 g 配對，而 Me 中的 e 則與 P 中的 f 配對．

在此假定之下，若 $Me\equiv P$ 仍得成立，則將 e，f，g 諸元重行組合，使 P 中的 e 與 Me 中的 e 配對，P 中的 f 與 Me 中的 g 配對時，這個關係仍能成立．但是又要同剛纔所說的一樣，P 的一部分將與 M 同等． 因此，這個假設也是不可能的