随机数学基础

东南大学数学系　曹振华　编

高等教育出版社
Higher Education Press

随机数学基础

随机数学基础

东南大学数学系　曹振华　编

高等教育出版社

内容提要

本书为高等学校工学类、经济类、管理类本科专业概率论与数理统计教材，全书共分十章，第一章到第五章为概率论部分，包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。第六章到第八章是数理统计基础，包括抽样分布、参数估计、假设检验。第九章和第十章是随机过程简介，包括随机过程的概念和随机过程的数字特征、两个重要的过程(泊松过程和维纳过程)、马尔可夫链。本书也可作为报考工学类、经济类、管理类研究生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机数学基础/曹振华编. —北京:高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027752-4

Ⅰ.随… Ⅱ.曹… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 120370 号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 赵 阳 **责任绘图** 吴文信
版式设计 张 岚 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	人民教育出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2009年8月第1版
印　　张	23	**印　　次**	2009年8月第1次印刷
字　　数	430 000	**定　　价**	24.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　27752-00

前　言

概率论产生于17世纪中叶，它是研究随机现象的数学模型。在概率论的基础上发展出了数理统计学，它的主要任务是将使用的随机模型与实际情况相比较。随后又将时间因素引入到随机模型中，建立了随机过程理论。随机数学就是由概率论、数理统计、随机过程这三部分组成。

随机数学是一门应用极其广泛的数学分支。可以毫不夸张地讲，随机数学的理论和方法已经渗透到自然科学、社会科学、工程技术、军事科学等科学技术的各个领域，工农业生产和国民经济的各个部门。卫星上天、导弹巡航、飞机制造、宇宙飞船遨游太空都有随机数学的一份功劳；及时准确的天气预报、海洋探险、考古研究也离不开随机数学；在通信与信息技术的发展、影视文化的进步、抽样调查中，随机数学更起着不可或缺的作用。

随着科学技术的迅速发展，随机数学将发挥愈来愈大的作用。当今，高等学校几乎所有专业都在开设随机数学这门课，教育部于1997年把概率论与数理统计正式列入工学类、经济类、管理类研究生入学考试的必考科目。所以随机数学已成为高等学校开设的一门重要的基础课。本书编者长期在东南大学从事工学类、经济类、管理类本科专业"概率论与数理统计"的教学工作。编写这本《随机数学基础》也是作者多年的愿望，目的是把作者多年教学经验的积累融入教材中，为工学类、经济类、管理类本科专业学生提供一本可读性强，具有一定特色的概率统计基础教材。全书共分十章，第一章到第五章为概率论部分，包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。第六章到第八章是数理统计基础，包括抽样分布、参数估计、假设检验。第九章和第十章是随机过程简介，包括随机过程的概念和随机过程的数字特征、两个重要的过程(泊松过程和维纳过程)、马尔可夫链。

本书除了比较系统地介绍了概率论、数理统计、随机过程的基本概念、基本理论和基本方法外，主要有如下特色：

1. 全书自始至终注意在介绍一些基本结论时，引导读者进行深入思考，启发读者对一些基本结论加以推广、扩充，举一反三，从而发掘一些新的结论，使读者学得更加深入扎实，同时也培养读者的创新意识。

2. 注意培养读者利用基本性质解决问题的意识。

初学概率统计的读者往往缺乏利用基本性质解决问题的意识，本书在这一

方面有所加强，对一些重要性质的利用作了深入的介绍；通过一些例题，从简单到复杂，从特殊到一般，逐步扩散，循序渐进，不断深入来增强读者对基本性质应用的意识。

3. 对一些重要的基本方法作了专题性的介绍。

概率统计中有一些问题是困扰读者的难题，如已知随机变量 X 的分布，如何求 $Y=g(X)$ 的分布；已知随机向量 (X,Y) 的分布，如何求 $Z=g(X,Y)$ 的分布；如何利用中心极限近似地求概率；如何求总体分布中未知参数的最大似然估计等。本书对解决这些问题所遵循的基本套路，基本要领都作了详细的阐述，使得读者能够熟练掌握这些基本方法。

4. 与计算机软件相结合，利用 MATLAB 软件提高概率统计的教学效果。

随机数学是一门应用极其广泛并且实验性很强的学科，为了提高教学质量，培养读者利用该课程的理论和方法解决实际问题的能力，全书 20 多处整合了利用 MATLAB 进行统计分析和随机模拟的案例。如利用 MATLAB 进行参数估计，利用 MATLAB 进行假设检验，利用 MATLAB 模拟产生泊松过程、维纳过程、齐次马尔可夫链的样本轨道等。

5. 数理统计部分每章配备了选择题和填充题。

为了促进读者对基本概念，重点知识的复习，加深、巩固、强化对基本概念的正确理解，消除错误的理解，本书除了与常规教材一样配备了一定数量的习题，还增加了选择题和填充题。有些选择题、填充题完全是作者在教学中针对读者对有关基本概念或结论容易出错或混淆不清而自主构思的，有一定的原创性。其中打星号的习题较难，读者可选做。

本书是非数学类专业本科概率统计课程的教材，同时也可作为报考工学类、经济类、管理类研究生的复习参考书。

在本书的写作过程中，自始至终得到东南大学数学系领导的关心和支持，在此表示衷心的感谢！由于作者水平有限，书中难免有不当和错误之处，恳请专家和读者批评指正。

曹振华

2009 年 1 月于东南大学

目　录

第一章 随机事件及其概率

§1.1 随机事件

一、随机现象

在自然界中,在生产实践和科学实验中,人们观察到的现象基本上可分为两类,一类现象称为确定性现象,即在一定的条件下必然会发生某种结果或必然不会发生某种结果的现象。例如:“纯水沸腾”这一现象在“一个标准大气压下,温度达到 100 ℃”这个特定条件下必然会出现.“重物垂直下落”这一现象在“自由下落”这一条件下肯定会发生.“计算机正常运行”这一结果在“计算机损坏”的条件下肯定不会出现.早期科学就是研究确定性现象的,所用的数学工具为高等数学、线性代数等.另一类现象是事前不可预言的,即在相同条件下重复进行试验,每次结果未必相同;或是知道它过去的状况,在相同条件下,未来的发展事先却不能完全肯定,这一类现象称为随机现象.例如:抛一枚均匀硬币,可能正面朝上,也可能反面朝上,“正面朝上”这一现象,在“抛均匀硬币”的条件下,可能出现,也可能不出现,所以是随机现象,同样“反面朝上”也是随机现象.向一个目标进行射击,可能击中目标,也可能不击中目标,“击中目标”、“不击中目标”这些结果在射击之前是无法预言的,都是随机现象.

随机现象虽然在一次试验或观察中可能发生也可能不发生,具有偶然性,但在大量重复试验中也具有某种规律性,称为随机现象的统计规律性.随机数学(概率论、数理统计)就是研究随机现象统计规律性的数学分支.

二、随机试验和随机事件

前面我们已经指出:概率论是研究随机现象统计规律的数学分支,那么,随机现象是怎样表现出来的呢?为此我们首先引进随机试验的概念.

在概率论中,我们把观察一定综合条件的实现称为试验(条件实现就完成一次试验).如果这个试验“在相同的条件下可以重复进行”,而且每次试验的结果事先不可预言,但却呈现某种规律性,我们就称它为一个随机试验.一般用字母 E 表示随机试验.

以后我们所说的试验都是指随机试验,下面看几个随机试验的例子:

E_1:抛一枚均匀硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:抛一枚均匀硬币两次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3:从含有 2 个黑球 a_1,a_2 和 3 个白球 b_1,b_2,b_3 的盒中任意地取出 3 个球,观察取出的 3 个球的组合.

E_4:把 2 个球 a,b 任意地放到分别编有号码 1、2、3 的 3 个盒子中,观察球在盒子中的放法.

E_5:记录(观察)在一段时间内点击某网站的次数.

E_6:观察某一设备的使用寿命.

从随机试验的定义及上述的随机试验的例子可以看到,随机现象是通过随机试验表现出来的. 我们把随机试验 E 中可能发生也可能不发生的现象称为该随机试验 E 的随机事件. 试验可能出现的每一个结果称为基本事件,由若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件.

例 1.1.1 在试验 E_5"记录一段时间内点击某网站的次数"中,"点击次数为 i"($i=0,1,2,\cdots$)为该试验的基本事件,"点击次数不超过 10"是一个复合事件,它是由"点击次数为 i ($i=0,1,2,\cdots,10$)"这十一个基本事件组合而成.

一个事件是否称为基本事件是相对于试验的观察目的来说的,如上例中,若不是观察点击的次数,而是观察点击次数是否超过 10 次,则只有"点击次数超过 10 次"和"点击次数不超过 10 次"这 2 个基本事件.

三、样本空间

试验 E 可能出现的全部结果组成的集合称为该试验的样本空间,一般用字母 Ω 表示. 组成样本空间的元素称为样本点(即基本事件),一般用字母 ω 表示.

在概率论中,十分重要的是要弄清楚随机试验的样本空间,对于一个具体的随机试验来说,样本空间可以根据试验的内容(即试验条件实现一次和观察目的)来决定.

下面写出(二)中的随机试验 E_i 的样本空间 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,6)$.

$$\Omega_1=\{H,T\};$$

$$\Omega_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\};$$

$$\begin{aligned}\Omega_3=\{&(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_1,b_2),(a_1,b_1,b_3),\\&(a_1,b_2,b_3),(a_2,b_1,b_2),(a_2,b_1,b_3),(a_2,b_2,b_3),(b_1,b_2,b_3)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_4=\{&\begin{array}{|c|c|c|}ab & \quad & \quad \\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}a & b & \quad \\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}b & a & \quad \\ \hline\end{array},\\&\begin{array}{|c|c|c|}\quad & ab & \quad \\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}a & \quad & b \\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}b & \quad & a \\ \hline\end{array},\\&\begin{array}{|c|c|c|}\quad & \quad & ab \\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}\quad & a & b \\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}\quad & b & a \\ \hline\end{array}\};\end{aligned}$$

$$\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\};$$

$$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

从上面的例子我们看到:为了给出样本空间,必须确切理解随机试验条件的内容和观察目的,比较试验 E_1 和 E_2 的样本空间 Ω_1 和 Ω_2,可以使我们更看清这

个问题. 试验 E_1 和 E_2 都是抛硬币,但试验 E_1 的条件是抛一枚硬币,而试验 E_2 的条件是抛两枚硬币,故 Ω_1,Ω_2 的构成也就不相同.

样本空间是基本事件的全体组成的集合,而随机事件是由若干个基本事件组合而成,引进样本空间的概念以后,我们将随机事件定义为样本空间 Ω 的某个子集. 随机事件一般用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 事件 A 发生当且仅当 A 中某一样本点 ω 发生.

样本空间 Ω 作为一个随机事件,因为在每次试验中必有 Ω 中的样本点出现,所以 Ω 在一次试验中必然发生,即 Ω 是必然事件.

空集 $\varnothing$ 作为一个事件,它在每一次试验中都不会发生,所以 $\varnothing$ 是不可能事件.

四、事件之间的关系和运算

现在,对应集合的关系和运算,定义事件之间的关系和运算.

1. $A\subset B$,称为事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,它表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

例如试验 E_3 中,A 表示"取出的 3 个球中含有 2 个黑球",B 表示"取出的 3 个球中含有 1 个白球",则 $A\subset B$. 又如对任一事件 A,有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. $A=B$,称为 A 与 B 相等(或等价),它表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生且事件 B 发生必然导致事件 A 发生,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

例如试验 E_3 中,A 表示"取出的 3 个球中含有 2 个黑球",B 表示"取出的 3 个球中含有 1 个白球",则 $A=B$.

3. $A\cup B$,称为事件 A 与事件 B 的和,它表示在一次试验中事件 A 和事件 B 至少有一个发生,或等价地叙述为"或 A 发生,或 B 发生".

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,它表示在一次试验中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个事件发生;同样,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和,它表示在一次试验中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个事件发生.

4. $A\cap B$,称为事件 A 与事件 B 的交(事件 A 与事件 B 的交也记作 AB),它表示在一次试验中事件 A 和事件 B 同时发生.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,它表示在一次试验中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生;同样称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交,它表示在一次试验中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

例如考虑随机试验 E 把 n 个不同的球随机地放到 $N(n>N)$ 个盒子中,令 A_i

表示第 i $(i=1,2,\cdots,N)$ 个盒子无球，A 表示至少有一个盒子无球，则 $A=\bigcup_{i=1}^{N}A_i$.

若令 B_i 表示第 i $(i=1,2,\cdots,N)$ 个盒子至少有一个球，B 表示每个盒子至少有一个球，则 $B=\bigcap_{i=1}^{N}B_i$.

5. 如果 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，它表示在一次试验中事件 A 与 B 不能同时发生.

例如在试验 E_5 中，A 表示事件"在一段时间内点击某网站的次数为偶数次"，B 表示事件"在一段时间内点击某网站的次数为奇数次"，则 A 与 B 是互不相容的事件.

不可能事件 $\varnothing$ 与必然事件 Ω 是互不相容的事件，基本事件是互不相容的事件.

6. 如果 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 相互对立，它表示在一次试验中事件 A 与 B 至少有一个发生，但也最多只有一个发生，它们不能同时发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$，即 $A\cup\bar{A}=\Omega$ 且 $A\bar{A}=\varnothing$.

例如在试验 E_5 中，A 表示"在一段时间内点击某网站的次数不超过 10 次"，则 $\bar{A}$ 表示"在一段时间内点击某网站的次数超过 10 次".

另外从上述定义看到，相互对立的事件一定是互不相容的事件，但反之不一定，请读者自己举出例子来说明.

其次，如果两个事件 A 与 B 相互对立，则有 $AB=\bar{A}\bar{B}$ （或 $A\cup B=\bar{A}\cup\bar{B}$）；反之若两个事件 A 与 B 满足

$$AB=\bar{A}\bar{B}\quad(\text{或 } A\cup B=\bar{A}\cup\bar{B})$$

则 A 与 B 是否相互对立呢？请读者思考.

7. $A-B$，称为事件 A 与 B 的差，它表示在一次试验中事件 A 发生，但事件 B 不发生.

由于 B 与 B 的对立事件 $\bar{B}$ 至少有一个发生，故 $A-B=A\bar{B}$.

可以验证一般事件的运算满足如下运算规律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) 德摩根(De Morgan)公式(对偶公式)

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},\quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

分配律和德摩根公式可以推广到可列无穷的情形，即

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)B = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_iB)$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i \cup B)$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i,\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i$$

事件之间的关系和运算也常用图形来直观示意,见图 1-1.

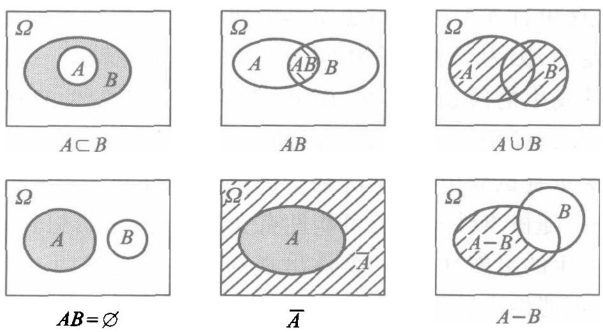

图 1-1

在以后的应用中,常常需要用一些事件通过事件的运算产生另外一些随机事件.

例 1.1.2 设 A_1,A_2,A_3 是三个事件,试用它们来表示事件 B"A_1,A_2,A_3 中至多有一个发生".

解 事件 B"A_1,A_2,A_3 中至多有一个发生"当且仅当"A_1,A_2,A_3 这三个事件都不发生或三个事件 A_1,A_2,A_3 中恰好有一个发生".故

$$B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

另外,若令 C 表示"A_1,A_2,A_3 中至少有两个不发生".因为"A_1,A_2,A_3 中至多有一个发生",那么"A_1,A_2,A_3 中至少有两个不发生",故有 $B\subset C$;同样,若"A_1,A_2,A_3 中至少有两个不发生",则必有"A_1,A_2,A_3 中至多只有一个发生",即 $C\subset B$,根据两个随机事件相等的定义,有 $B=C$,故 B 的另一种等价的表示为

$$B=\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3$$

事实上

$$\begin{aligned}&\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_2\bar{A}_3\\=&\bar{A}_1\bar{A}_2\Omega\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\Omega\cup\bar{A}_2\bar{A}_3\Omega\\=&\bar{A}_1\bar{A}_2(A_3\cup\bar{A}_3)\cup\bar{A}_1\bar{A}_3(A_2\cup\bar{A}_2)\cup\bar{A}_2\bar{A}_3(A_1\cup\bar{A}_1)\\=&\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\end{aligned}$$

§1.2 随机事件的概率

从§1.1的讨论中看到,一个随机试验可能出现各种各样的随机事件,但仅仅知道它可能发生哪些事件并没有多少意义,重要的是要掌握随机事件出现的可能性有多大.这里首先有一个问题就是随机事件发生的可能性有没有大小之分?回答是肯定的,因为当我们在相同条件下多次重复做某一随机试验时,常常会发现某些事件发生的次数要多些,而另外的一些事件发生的次数要少些.也就是说,在多次重复试验中,发生次数多的随机事件在一次试验中发生的可能性要大,反之,在多次重复试验中,发生次数少的随机事件在一次试验中发生的可能性要小.既然各个随机事件发生的可能性有大小之分,自然想到该用一个数字来刻画随机事件发生的可能性大小,事件出现的可能性大就用一个较大的数来刻画,事件出现的可能性小就用一个较小的数来表示.那么,对于给定的随机事件,刻画它发生的可能性大小的数字应具备哪些特征呢?为此引入描述事件发生频繁程度的概念——频率.

一、事件的频率

定义 1.1 设 E 是一个随机试验,A 是该试验 E 的一个随机事件,在相同条件下,重复做 n 次随机试验 E,以 n_A 表示在这 n 次试验中事件 A 发生的次数,比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率,n_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数.

从频率的定义可以看到,如果事件 A 在 n 次试验中发生的频率大,即事件 A 在 n 次试验中发生的次数多,可以想象,事件 A 在一次试验中发生的可能性也就大.反之,如果事件 A 在一次试验中发生的可能性大,事件 A 在 n 次试验中发生的次数多,从而频率也就大.

此外,频率还具有一个重要的特性——频率的稳定性,即当试验次数 n 很大时,事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一个固定数值 $P(A)$ 附近摆动,而且随着试验次数 n 增大,其摆动的幅度越来越小,这一点可以从历史上一些实验者抛硬币的试验中

看到.表 1.1 中的数据(n 为抛硬币的次数,n_H 是正面出现的次数)表明,当抛硬币的次 n 比较大时,"正面朝上"这一随机事件的频率 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动,而且随着抛硬币次数 n 的增大,$f_n(H)$ 就逐渐稳定在 0.5.

表 1-1

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K.皮尔逊	12 000	6 019	0.501 0
K.皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

例 1.2.1　工厂产品质量检验,我们考虑的随机试验是"从某工厂生产的产品中,任取一个产品,检测其是否是次品",重复做这个试验,其结果如下表:

表 1-2

取出的产品数 n	100	500	1 000	1 500	2 000
其中的次品数 k	13	39	123	132	211
次品率 $\frac{k}{n}$	0.130 0	0.078 0	0.123 0	0.088 0	0.105 5

从表 1-2 中的数字看出,抽到的次品数所占比例,具有随机性,但随着抽样的大量进行,抽出的产品数逐渐增多,则可发现抽到次品的频率(次品率)在 0.1 附近摆动.

更一般地,在第五章我们还要从理论上严格地证明:当 $n \to \infty$ 时,在某种意义下,随机事件的频率 $f_n(A)$ 趋于一个固定的数值 $P(A)$.这样,对每一个随机事件 A,都有一个客观存在的数值 $P(A)$ 与之对应.这一事实说明了刻画随机事件 A 发生可能性大小的数——概率具有一定的客观存在性.

在处理实际问题时,通常我们用试验次数足够大时的频率来度量概率,这样计算概率称为统计概率.然而在进行理论研究时,不可能对每一个随机事件 A,都做大量的重复试验得到频率的稳定值 $P(A)$,所以,概率论也应像几何,代数一样,通过建立公理化结构,给予概率以数学定义.当然这一数学定义也应具有与频率类似的特性.为此,下面给出频率的性质:

定理 1.1　设 $f_n(A)$ 是随机试验 E 中随机事件 A 的频率,则有

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$　(1.2.1)

(2) $f_n(\Omega) = 1$　(1.2.2)

(3) 对任意有限多个互不相容的随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i) \tag{1.2.3}$$

二、概率的公理化定义

定义 1.2 设 E 是随机试验,Ω 是 E 的样本空间,对于 E 的每一个随机事件 A 赋予唯一的实数 $P(A)$,如果满足下列条件:

(1)(非负性)$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ (1.2.4)

(2)(规范性)$P(\Omega)=1$ (1.2.5)

(3)(可列可加性)对任意可列无穷多个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.2.6}$$

就称实值集合函数 $P(\cdot)$是一个概率测度,$P(A)$称为事件 A 的概率.

由概率公理化定义中的基本性质(1),(2),(3)可以推出概率的另外一些重要性质.

性质 1 不可能事件$\varnothing$的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$. 由概率的可列可加性(1.2.6)得到

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

而实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$,故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

请读者注意:不可能事件$\varnothing$的概率为 0,但是概率为 0 的事件不一定是不可能事件$\varnothing$. 同样,必然事件 Ω 的概率为 1,但是概率为 1 的事件不一定是必然事件 Ω.

性质 2 对任意有限多个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.2.7}$$

式(1.2.7)称为有限可加性.

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1},A_{n+2},\cdots$是互不相容的事件,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,由可列可加性有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)&=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\\&=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)\\&=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{n} P(\varnothing)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\end{aligned}$$

性质 3 对任一事件 A,有