应用型本科规划教材

数学分析习题课指导书

主　编　郝　彦
副主编　李同军　沈最意

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学分析习题课指导书

主　编　郝　彦
副主编　李同军　沈最意
编　委　陈丽燕　徐海娜　童爱华
　　　　周　杰　王朝平　姜　静

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容提要

本书吸取了国内外多种教材的研究成果，同时又结合编者们使用多年的数学分析习题课讲义的基础上编写的。本书按章编写，每章包括：本章重点，内容提要，典型习题分析，补充练习题，自测题（包括A、B两卷），补充练习题和自测题都附有答案或提示，本书所编写的内容注意提高学生对数学分析基本概念、基本定理及基本计算技巧的理解和应用。

本书可作为高等院校数学专业的教师和学生使用，也可作为准备报考高等院校理工科各专业研究生的学生的复习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析习题课指导书／郝彦主编．—杭州：浙江大学出版社，2009.10

应用型本科规划教材．数学

ISBN 978-7-308-07109-3

Ⅰ．数… Ⅱ．郝… Ⅲ．数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第180324号

数学分析习题课指导书

主　编　郝　彦

责任编辑　王　波
封面设计　姚燕鸣
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路148号　邮政编码310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州好友排版工作室
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　21.5
字　　数　557千
版 印 次　2009年10月第1版　2009年10月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07109-3
定　　价　40.00元

前 言

数学分析是近代数学的基础，是高等院校数学专业最重要的一门基础课程。它对于后续课程的学习乃至于对学生素质的训练与培养都起着重要的作用。目前国内外不同版本的数学分析教材已有很多，但习题课的教学参考书却很少。而数学分析习题课是数学分析课的重要组成部分，它在加深学生对数学分析新概念的理解，培养学生逻辑推理能力以及计算技巧的训练方面都起着一定的作用，多年来担任这门课的教师在上习题课前绞尽脑汁去选择每次课的内容，尤其对于一些没有教学经验的年轻教师准备习题课更是无所适从，鉴于目前的这种状况，我们组织编写了这本习题课指导书，本书在编写过程中吸取了国内外多种教材的研究成果，同时又参考了郝彦和李同军等几位老师的习题课讲稿，这些习题课讲稿对于本书的编写带来了很大的启示，同时也起了一定的作用。

本书按章编写，每章内容包括如下五部分：

一、本章重点：根据各章的内容要点、目的要求和教材所处的地位来确定，主要目的是使读者在教与学的过程中能较好地把握教材的重点。

二、内容提要：陈述每章中的基本概念、重要定理、公式及要点与难点的分析。

三、典型习题分析：每章中都选择了10～20个典型习题，所选习题难易适度，题目由浅入深，逐步介绍各种方法与技巧，较客观地反映了数学分析应掌握的知识，有助于读者对于各章重点解题方法的掌握。

四、补充练习题：考虑到一般教材中所配习题数量不多，特别补充了部分难易适中的习题供读者练习之用，同时对补充练习题给出了答案或提示。

五、自测题：本书在各章后编写了自测题(包括A、B两卷)作为学完各章内容检测读者掌握知识的程度之用，本书末附有自测题的答案或提示。

本书共分22章，分别与华东师范大学数学系编的《数学分析》第三版教材相对应。本书由郝彦、李同军、沈最意、陈丽燕、徐海娜、童爱华、周杰、王朝平、姜静分章节分别编写，每个人平均都编写两章以上内容。由于本书是数学分析习

题课指导书，书中涉及的题量非常大，因此在初稿完成之后，修改的任务量非常大，整个课题组成员除了个别人有特殊原因之外全部都参加了多次修改的任务中，在编写和修改的工作过程中，由郝彦和李同军分别负责11章左右的修改排版工作，郝彦担任对全书文字加工与格式统一及联系出版等全面工作，最后吴伟志教授对全书进行了审核，提出了许多宝贵的修改建议，在此表示真诚的感谢。

本书在出版的过程中，得到了浙江海洋学院教务处及数理与信息学院的大力支持，在此表示感谢。

尽管我们的想法很多，大家也都竭尽全力，但限于我们的学识与经验，难免有不足与错误之处，肯请同行和读者批评指正。

编　者

2009年6月

于浙江海洋学院

目　　录

第一章　实数集与函数

本章重点

1. 掌握实数及实数绝对值的有关性质与运算.

2. 掌握邻域的概念.

3. 掌握确界的定义与确界原理,并能运用于有关命题的运算与证明.

4. 深刻理解函数的定义以及复合函数、反函数和初等函数的定义,熟悉函数的各种表示方法.

5. 牢记基本初等函数的定义、性质及其图象.会求初等函数的定义域,会分析初等函数的复合关系.

6. 深刻理解有界函数与单调函数的定义;理解奇偶函数与周期函数的定义;会求一些简单周期函数的周期.

内容提要

1. 实数及其性质

实数包括有理数与无理数两部分.有理数可用分数$\dfrac{p}{q}$(p、q为整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;无限十进不循环小数则称为无理数.

有理数与无理数的表示不统一,这对统一讨论实数是不利的.为讨论问题的需要,我们把“有限小数”(包括整数)也表示为“无限小数”.

实数的性质:

实数集对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是封闭的;

实数集是有序的;

实数的大小关系具有传递性;

实数具有阿基米德性;

实数集具有稠密性;

实数集与数轴上的点具有一一对应关系.

2. 重要不等式

伯努利(Bernoulli)不等式: $(1+h)^n\geqslant 1+nh\quad(h>-1),n\in\mathbf{N}_+$.

平均值不等式: 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为n个正实数,则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

三角不等式： 对于任何实数 a 和 b，有 $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

柯西不等式： 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为两组实数，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

3. 邻域的概念

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a;\delta)$，或简记为 $U(a)$，即

$$U(a;\delta)=\{x\mid|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

4. 有界集与确界原理

定义 1 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant M$ $(x\geqslant L)$，则称 S 为有上(下)界的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的上界(下界)，若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集. 若数集 S 不是有界集，则称 S 为无界集.

定义 2 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足：(1)对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$，即 η 是 S 的上界；(2)对任何 $\alpha<\eta$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$，即 η 是 S 的上界中最小的一个，则称数 η 为数集 S 的上确界，记作 $\eta=\sup S$.

注 1 上确界定义中的条件(2)可以用 ε 语言叙述如下：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\eta-\varepsilon$.

定义 3 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若数 ξ 满足：(1)对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；(2)对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$，即 ξ 是 S 的下界中最大的一个，则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\xi=\inf S$.

注 2 下确界定义中的条件(2)可以用 ε 语言叙述如下：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\xi+\varepsilon$.

上确界与下确界统称为确界.

定理 1.1(确界原理) 设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

5. 具有某些特性的函数

(1)有界函数 设 f 为定义在 D 上的函数，若存在数 $M(L)$，使得对每一个 $x\in D$ 有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant L)$，则称 f 为 D 上的有上(下)界函数，$M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上(下)界.

设 f 为定义在 D 上的函数，若存在正数 M，使得对每一个 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 f 为 D 上的有界函数.

f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow f(D)$ 是一个有界集 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上既有上界又有下界.

(2)单调函数 设 f 为定义在 D 上的函数，对任意 $x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$，

(i)若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 f 为 D 上的增函数，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f 为 D 上的严格增函数；

(ii)若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 f 为 D 上的减函数，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f 为 D 上的严格减函数.

增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数.

定理 1.2 设 $y=f(x), x\in D$ 为严格增(减)函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增(减)函数.

(3)奇偶函数 设 D 为对称于原点的数集，f 为定义在 D 上的函数. 若对每一个 $x\in D$，有

(i) $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为 D 上的奇函数；

(ii) $f(-x)=f(x)$，则称 f 为 D 上的偶函数.

(4)周期函数 设 f 为定义在数集 D 上的函数，若存在 $\sigma>0$，使得对一切 $x\in D$ 有 $f(x\pm\sigma)=f(x)$，则称 f 为周期函数，σ 称为 f 的一个周期.

若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期，则称此最小的周期为 f 的基本周期或简称为周期.

典型习题分析

例 1 设 S 为非空数集，试对下列概念给出定义：

(1) S 无上界.

解 若对任意数 M，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>M$，则称 S 无上界.(请与 S 有上界的定义相比较：若存在数 M，使得对任意 $x\in S$，有 $x\leqslant M$，则称 S 有上界).

(2) S 无界.

解 若对任意 $M>0$，存在 $x_0\in S$，使得 $|x_0|>M$，则称 S 无界.(请与 S 有界的定义相比较：若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in S$，有 $|x|\leqslant M$，则称 S 有界).

例 2 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证.

(1) $S=\{x\,|\,x^2<2, x\in\mathbf{R}\}$.

解 $\sup S=\sqrt{2}$, $\inf S=-\sqrt{2}$. 下面依定义加以验证 $\sup S=\sqrt{2}$ ($\inf S=-\sqrt{2}$ 可类似进行).

对任意 $x\in S$，有 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，即 $\sqrt{2}$ 是 S 的一个上界，对任意 $\alpha<\sqrt{2}$，若 $\alpha\leqslant-\sqrt{2}$，则对任意 $x_0\in S$，都有 $x_0>\alpha$；若 $-\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$，则由实数的稠密性，必有实数 r，使得 $-\sqrt{2}<\alpha<r<\sqrt{2}$，即 $r\in S$，因此 α 不是 S 的上界，故 $\sup S=\sqrt{2}$.

(2) $S=\{x\,|\,x=1-\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}_+\}$.

解 $\sup S=1$, $\inf S=\frac{1}{2}$.

首先验证 $\sup S=1$. 对任意 $x\in S$，有 $x=1-\frac{1}{2^n}\leqslant 1$，即 1 是 S 的一个上界；对任意 $\varepsilon>0$，取正整数 n_0，使得 $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$，于是取 $x_0=1-\frac{1}{2^{n_0}}$，从而 $x_0\in S$，且 $x_0=1-\frac{1}{2^{n_0}}>1-\varepsilon$. 所以 $\sup S=1$.

同理可证 $\inf S=\frac{1}{2}$.

例 3 设 S 为非空有下界数集，证明 $\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$.

证明 由于 S 是非空有下界数集，根据确界原理，$\inf S$ 存在.

[必要性] 设 $\inf S=\xi\in S$，则对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，而 $\xi\in S$，故 ξ 是数集 S 中的最小的数，即 $\xi=\min S$.

[充分性] 设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$. 下面验证 $\xi=\inf S$. 对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是数集 S 的下界；对任何 $\beta>\xi$，只须取 $x_0=\xi$，则 $x_0<\beta$. 所以 $\xi=\inf S$.

例 4 设 S 是非空有界数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$. 证明

(1) $\inf S^-=-\sup S$.　(2) $\sup S^-=-\inf S$.

证一 由于 S 是非空有界数集，利用确界原理，$\sup S^-$，$\inf S^-$，$\sup S$，$\inf S$ 皆存在. 下面证明(1)式成立.

设 $\xi=\inf S^-$，下面证明 $-\xi=\sup S$.

对一切 $x\in S$，有 $-x\in S^-$. 因为 $\xi=\inf S^-$，所以有 $-x\geqslant\xi$，于是 $x\leqslant-\xi$，即 $-\xi$ 是数集 S 的上界；

对任何 $\alpha<-\xi$，有 $-\alpha>\xi$. 因为 $\xi=\inf S^-$，所以存在 $x_0\in S^-$，使得 $x_0<-\alpha$. 于是有 $-x_0\in S$，使得 $-x_0>\alpha$.

由上可知 $-\xi=\sup S$，即 $\inf S^-=-\sup S$.

同理可证 $\sup S^-=-\inf S$.

证二 对一切 $x\in S^-$，有 $x\geqslant\inf S^-$，则 $-x\leqslant-\inf S^-$，此时 $-x\in S$ 是任意的，利用上确界是所有上界中最小的，有 $\sup S\leqslant-\inf S^-$，即 $-\sup S\geqslant\inf S^-$；另一方面，对一切 $-x\in S$，有 $-x\leqslant\sup S$，则 $x\geqslant-\sup S$，此时 $x\in S^-$ 是任意的，利用下确界是所有下界中最大的，有 $\inf S^-\geqslant-\sup S$，综上，$\inf S^-=-\sup S$.

例 5 设 a 为对任意实数，A 为 $\mathbf{R}$ 中非空有界数集，证明

$$\sup(a+A)=a+\sup A,\ \inf(a+A)=a+\inf A.$$

其中 $a+A=\{a+x\mid x\in A\}$.

证明 先证 $\sup(a+A)=a+\sup A$.

由上确界的定义，对任意 $x\in A$，有 $x\leqslant\sup A$，于是对任意 $x\in A$，有 $a+x\leqslant a+\sup A$.

又对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>\sup A-\varepsilon$，于是 $a+x_0>a+\sup A-\varepsilon$，所以 $\sup(a+A)=a+\sup A$.

同理可证 $\inf(a+A)=a+\inf A$.

例 6 设 A 与 B 皆为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$，证明

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.　(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证一 因为 A 与 B 皆为非空有界数集，所以 $\sup A$ 和 $\sup B$ 都存在.

对任意 $z\in A+B$，由定义分别存在 $x\in A$，$y\in B$，使得 $z=x+y$. 由于 $x\leqslant\sup A$，$y\leqslant\sup B$，故 $z=x+y\leqslant\sup A+\sup B$，即 $\sup A+\sup B$ 是数集 $A+B$ 的一个上界.

对任意 $\alpha<\sup A+\sup B$，(须证 α 不是数集 $A+B$ 的上界)，$\alpha-\sup B<\sup A$，由上确界 $\sup A$ 的定义，存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>\alpha-\sup B$. 于是 $\alpha-x_0<\sup B$，再由上确界 $\sup B$ 的定义，存在 $y_0\in B$，使得 $y_0>\alpha-x_0$，从而 $z_0=x_0+y_0>\alpha$，且 $z_0\in A+B$. 因此 $\sup A+\sup B$ 是数集 $A+B$ 的上确界，即 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

证二 对任意 $z\in A+B$，由定义分别存在 $x\in A$，$y\in B$，使得 $z=x+y$. 由于 $x\leqslant\sup A$，

$y \leqslant \sup B$，故 $z=x+y \leqslant \sup A+\sup B$，于是

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A+\sup B. \tag{1.1}$$

由上确界的定义，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x_0 \in A$，使得 $x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$，存在 $y_0 \in B$，使得 $y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $\sup(A+B) \geqslant x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$，于是

$$\sup(A+B) \geqslant \sup A+\sup B \tag{1.2}$$

由(1.1)与(1.2)可得 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

同理可证 $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

例 7 设 A 与 B 是数轴上位于原点右方的非空有界数集，记 $AB=\{xy \mid x \in A, y \in B\}$，证明 $\sup AB=\sup A \cdot \sup B$.

证明 因为 A 与 B 皆为非空有界数集，所以 $\sup A$ 和 $\sup B$ 都存在.

先证 $\sup AB \leqslant \sup A \cdot \sup B$.

由上确界的定义，对任意 $x \in A$，有 $x \leqslant \sup A$；对任意 $y \in B$，有 $y \leqslant \sup B$.

因为 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$，所以 $xy \leqslant \sup A \cdot \sup B$，
则 $\sup A \cdot \sup B$ 是 AB 的一个上界，于是 $\sup AB \leqslant \sup A \cdot \sup B$.

再证 $\sup A \cdot \sup B \leqslant \sup AB$.

由上确界的定义，对任意 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），存在 $x_0 \in A$，使得 $x_0>\sup A-\varepsilon$，存在 $y_0 \in B$，使得 $y_0>\sup B-\varepsilon$，于是存在 $x_0 y_0 \in AB$，使 $x_0 y_0>(\sup A-\varepsilon)(\sup B-\varepsilon)$，则有

$$\begin{aligned}\sup AB & \geqslant x_0 y_0>(\sup A-\varepsilon)(\sup B-\varepsilon)=\sup A \cdot \sup B-(\sup A+\sup B)\varepsilon+\varepsilon^2 \\ & >\sup A \cdot \sup B-(\sup A+\sup B+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon'=(\sup A+\sup B+1)\varepsilon$，则上式化为 $\sup AB>\sup A \cdot \sup B-\varepsilon'$，

由于 A 与 B 中元素皆非负，因此 $\sup A \geqslant 0, \sup B \geqslant 0, \sup A+\sup B+1>0$，于是 $\varepsilon'=(\sup A+\sup B+1)\varepsilon$ 仍是一个任意小的正数，证得 $\sup A \cdot \sup B \leqslant \sup AB$.

故 $\sup AB=\sup A \cdot \sup B$.

例 8 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，问 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域是什么？

解 因为$\begin{cases}0 \leqslant x+a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x-a \leqslant 1,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}-a \leqslant x \leqslant 1-a, \\ a \leqslant x \leqslant 1+a.\end{cases}$ 注意到 $a>0$，只可能有两种情况：

当 $1-a<a$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，上面不等式组无解，此时定义域不存在；

当 $a \leqslant 1-a$，即 $a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，上面不等式组解为 $a \leqslant x \leqslant 1-a$，因此定义域是$[a, 1-a]$.

例 9 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x, \varphi(x)=\sin \frac{x}{2}$，求 $f(x)$.

解 设 $\varphi(x)=t$，由于 $\cos x=1-2\sin^2 \frac{x}{2}=1-2\varphi^2(x)=1-2t^2$，所以

$$f(t)=1+\cos x=1+1-2t^2=2-2t^2,$$

即 $f(x)=2-2x^2, x \in \mathbf{R}$.

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1,\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1,\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1,\end{cases}$ 即 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^1=\mathrm{e}, & |x|<1,\\ \mathrm{e}^0=1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 11 对于函数 $f(x)=x^2$，如何选择邻域 $U(0;\delta)$ 的半径 δ，就能使与任一 $x\in U(0;\delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0;2)$ 内.

解 欲使 $f(x)\in U(0;2)$，即 $-2<f(x)<2$. 因为 $f(x)=x^2\geqslant 0$，故 $0\leqslant x^2<2$，$0\leqslant|x|<\sqrt{2}$，所以 $\delta=\sqrt{2}$ 就是使 $f(x)$ 落在邻域 $U(0;2)$ 内的半径，显然取任何小于 $\sqrt{2}$ 的正数作半径 δ 亦可.

例 12 若 $y=f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两条竖直线 $x=a$ 和 $x=b\ (b>a)$ 都是对称的，则函数 $f(x)$ 必为周期函数.

证明 因为函数 $y=f(x)$ 的图形关于竖直线 $x=a$ 对称，于是对任意 $x\in\mathbf{R}$，必有 $f(a-x)=f(a+x)$. 同理又有 $f(b-x)=f(b+x)$. 于是对任意 $x\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}f(x+2(b-a))&=f(b+x+b-2a)=f(b-x-b+2a)\\&=f(2a-x)=f(a+a-x)=f(a-a+x)=f(x).\end{aligned}$$

这表明 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

例 13 证明 $f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数.

证明 对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，由于

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\sin x_2-x_1-\sin x_1=x_2-x_1+2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

又对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $|\sin x|\leqslant|x|$，所以

$$\left|2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|<x_2-x_1,$$

从而 $x_1-x_2<2\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}<x_2-x_1$. 于是

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1+2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>x_2-x_1+x_1-x_2=0,$$

即 $f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数.

例 14 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上以 h 为周期的函数，a 为实数. 证明：若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证明 因为 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，则存在 $M>0$，使得对任意 $x\in[a,a+h]$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，必存在整数 m 和实数 $x_0\in[a,a+h]$，使得 $x=mh+x_0$，于是

$$|f(x)|=|f(x_0+mh)|=|f(x_0)|\leqslant M,$$

所以 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

例 15 设 f 与 g 为定义在 D 上的有界函数，且满足 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in D$. 证明

(1) $\sup\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}g(x)$； (2) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

证明 (1)对任意 $x\in D$,由于 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant \sup\limits_{x\in D} g(x)$,所以 $\sup\limits_{x\in D} g(x)$ 是 f 在 D 上的一个上界,故 $\sup\limits_{x\in D} f(x)\leqslant \sup\limits_{x\in D} g(x)$.

(2)对任意 $x\in D$,由于 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,所以 $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ 是 g 在 D 上的一个下界,故 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\leqslant \inf\limits_{x\in D} g(x)$.

例 16 设 f 为定义在 D 上的有界函数,证明

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D} f(x)$; (2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D} f(x)$.

证明 直接利用定义的证明方法同例 4,这里略去. 下面用确界的 ε 语言方法加以证明.

设 $\inf\limits_{x\in D} f(x)=\xi$,下证 $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\xi$.

由下确界的定义,对任意 $x\in D$,有 $f(x)\geqslant\xi$,则 $-f(x)\leqslant-\xi$,又对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in D$,使得 $f(x_0)<\xi+\varepsilon$,则 $-f(x_0)>-\xi-\varepsilon$,于是 $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D} f(x)$.

同理可证 $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D} f(x)$.

例 17 设 f 与 g 为 D 上的非负有界函数,证明

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}.$$

证明 因为 $f(x)\geqslant0$, $g(x)\geqslant0$,利用下确界是所有下界中最大的,得

$$\inf_{x\in D} f(x)\geqslant0,\ \inf_{x\in D} g(x)\geqslant0.$$

对任意 $x\in D$,由于 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\leqslant f(x)$, $\inf\limits_{x\in D} g(x)\leqslant g(x)$,于是

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)\leqslant f(x)\cdot g(x).$$

即 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)\cdot g(x)$ 在 D 上的一个下界,所以

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}.$$

例 18 设 f 在区间 I 上有界. 记 $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$,证明

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m.$$

证明 对任意 $x\in I$,由于 $f(x)\leqslant M$, $f(x)\geqslant m$. 则对任意 $x',x''\in I$,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M-m,$$

于是 $M-m$ 是数集 $\{|f(x')-f(x'')|\,|\,x',x''\in I\}$ 的一个上界. 下面证明 $M-m$ 是数集 $\{|f(x')-f(x'')|\,|\,x',x''\in I\}$ 的最小上界.

由上、下确界的定义知,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0{}',x_0{}''\in I$,使得 $f(x_0{}')>M-\dfrac{\varepsilon}{2}$, $f(x_0{}'')<m+\dfrac{\varepsilon}{2}$,于是 $f(x_0{}')-f(x_0{}'')>M-\dfrac{\varepsilon}{2}-\left(m+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=M-m-\varepsilon$,所以 $M-m$ 是数集 $\{|f(x')-f(x'')|\,|\,x',x''\in I\}$ 的最小上界,因此

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m.$$

补充练习题

1. 已知当 $x\neq0$ 时, $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$, ($a\neq b$, a,b,c 为非零常数),证明