数 列 与 极 限

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社
一九六〇年·上海

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高、初中数学各科包括代数、几何、三角，算術教材的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时也可供中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻地理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本"数列与極限"的小册子，系根据中学数学教学大綱修訂草案"数列"并参考吉西略夫高中代数編寫的。主要是帮助教师結合教材由講述集合概念而導出数列概念。它先对数列中通常的等差級数与等比級数加以研究，再由此導出無窮大量与無窮小量，然后詳述極限概念及其应用。本册在講法上結合圖象，力求直观，并注意数学与其他学科的联系，同时能从極限概念產生后的影响賭及数学發展的情况。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，邀請上海市十余个学校的高中代数教师参加意見，又經編輯組多次討論确定編寫提綱。然后由代数組同志分别担任提供材料、寫稿、校訂、修正等工作。但由于我們水平有限，时間忽促，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会　1956年2月

目 錄

一、 數列 …… 1
I. 數列概念 …… 1
II. 等差級數 …… 10
III. 等比級數 …… 24
二、 極限 …… 45
I. 絕对値性質 …… 45
II. 無窮大量 …… 46
III. 無窮小量 …… 49
IV. 極限 …… 51

一、數　列

1. 數列概念

近代數学中集合概念是具有重大意义的，在中学數学中的各部門内我們也經常要引用这个概念。但集合概念是屬於原始概念，我們不可能用其它更簡單的概念來給它下定义，只有用例子來闡明"集合"的意义。例如一个学校内所有的學生与書架上面所放置的書，都是集合，而組成集合的个体称为該集合的元素。如前者集合的元素是学生，而后者集合的元素是書。又这兩个集合内的元素都可以點數，並且可以說出該集合含有多少个元素。像这样的集合称为有限集合；否則称为無限集合。例如我們已經講过的有理數集合和实數集合都是無限集合。

所謂數列或序列就是數的集合，它的元素是用自然數編号一个一个地排列起來的。回憶过去我們已經碰見的集合有：

1. 自然數集合：　$1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\cdots$；
2. 偶數集合：　$2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\cdots$；
3. 奇數集合：　$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\cdots$；
4. 質數集合：　$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots\cdots$。

这些集合如果按照上面的順序依次排列，就形成了數列。例如按上面順序所寫出的偶數集合，其各元素和自然數之間有下面的对應關係：

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{自然數} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\cdots\cdots & n\cdots\cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{偶　數} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12\cdots\cdots & 2n\cdots\cdots
\end{array}$$

又例如按上面顺序所寫出的奇數集合各元素和自然數之間的对应關係：

自然數	1	2	3	4	5	6……	n	…………
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
奇　數	1	3	5	7	9	11…	$(2n-1)$	……

所以依次称为偶數數列和奇數數列。

數列中的元素通常称为數列的項。如果構成數列的集合是有限集合就称为有限數列。換一句話說，如果數列的項數是有限的，就称为有限數列，例如數列 2, 4, 6, 8, 10 即是。它一共有五項，最后一項等於10，否則就称为無限數列。一般情况我們總是研究無限數列，即研究沒有最后一項的數列。

前面所講的有理數集合和实數集合，因为我們不能把內中所有的元素編上号碼，一个一个地排列起來。例如在閉區間[0,1]中的所有有理數，它虽然有第一个數 0，而沒有第二个數、第三个數等等。所以一切有理數和一切实數，只能說是集合而不能說是數列。因而我們体会數列概念是以一个元素跟隨着另一个元素的概念为基礎的，即直接地跟隨着每一个元素的有一个而且僅有一个元素。它一定有第一个元素，而且內中每一个元素的前面有有限个元素（第一个元素前面不会有更前面的元素），后面有有限个元素或有無限个元素。

通曉了函數的意义后，很明顯地，我們可以給數列下定义为：函數 $y=f(x)$，当其自变量 x 只取自然數，其所对应的函數值的全体，組成一集合，而这个集合叫做數列。因而我們体会到數列是以自然數为自变數的函數，而前面所談的數列的諸項都是函數值。

为了用一般的形式來表示數列的各項，可採用下面的記法：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots$$

这里用下标數表出各項的編号，也就是这項所对应的自然數，例如 a_3 表示數列中的第三項。表示任意自然數 n 所对应的項为 a_n 叫做數列的通項。我們通常是寫出數列的前几項和通項來記述这个數列。例如

自然數列：　$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\cdots\cdots$；

偶數數列：　$2, 4, 6, 8, \cdots\cdots, 2n, \cdots\cdots\cdots$；

奇數數列：　$1, 3, 5, 7, \cdots\cdots, 2n-1, \cdots\cdots$。

倘若我們知道了數列的通項公式，那末只要知道它的号碼，便可以算出數列的任意已給項。如我們已經得出偶數數列的通項公式是 $a_n=2n$，則第 98 項为 $a_{98}=2\times98=196$。

已知某數列的通項公式要求学生寫出該數列前几項是个很好的練習。例如：已知一數列通項公式是 $a_n=n^2$，則此數列前四項是 1, 4, 9, 16，这是自然數的平方數列。按上面所述方法記为

$$1, 4, 9, 16, \cdots\cdots, n^2, \cdots\cdots$$

但由於已知某數列的通項公式 a_n，便可以按照通項的运算次序及指定的号碼而算出某數列任意已給項，所以上面所講的自然數的平方數列可以簡記为 $\{n^2\}$。前面所講的自然數數列可以簡記为 $\{n\}$，偶數數列可以簡記为 $\{2n\}$，奇數數列可以簡記为 $\{2n-1\}$。卽一般數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 可以簡記为 $\{a_n\}$。

又如數列 $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$，如給自变量 n 以諸值 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$，便得此數列前六項为

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}.$$

但我們要注意數列和函數一样，它的通項公式有時不是單一的式子。例如

設 $$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{当 } n \text{ 为奇數時，}\\ 1+\dfrac{1}{3^n} & \text{当 } n \text{ 为偶數時。}\end{cases}$$

則此數列为

$$1,\ 1\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1\frac{1}{81},\ \frac{1}{5},\ 1\frac{1}{729},\ \cdots\cdots.$$

我們曉得數列的通項公式就是函數的解析式子，而这函數的自变量只可取自然數。但函數的表達並不是都能用解析法做到，所以很清楚地並不是所有的數列通項都可以用公式來表出。像質數數列

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \cdots\cdots.$$

的通項公式就是不知道的。但这个數列的所有各項都可借助於其他的运算而算出(例如用檢驗質數法)。又如我們求 $\sqrt{2}$ 的不足近似值和过剩近似值分別得出兩个數列

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots\cdots;$$

$$1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143,\ \cdots\cdots.$$

也是沒有給出这些數列的通項公式，但对任何一項都可借開平方的法則而得出。因而我們可以說：不問某數列的通項公式是否可以求得，只要我們能把这數列的任意一項寫出，这个數列就是已知的或已給的。

前面講到已知數列的通項或它的構成規律，必定可以寫出这數列的前几項並且可以寫出这數列的任意一項來。但有了數列的前几項未必能唯一确定这數列的通項。例如：已知一數列的前四項为 1, 3, 5, 7, 下面几个式子都能算做它的通項公式：

$$a_n = 2n-1, \tag{1}$$

$$a_n = n^4-10n^3+35n^2-48n+23, \tag{2}$$

$$a_n = 2n^4-20n^3+70n^2-98n+47. \tag{3}$$

並且我們还可能求出很多的通項公式。

由通項公式(1)得數列是 1, 3, 5, 7, 9, 11, ……,

由通項公式(2)得數列是 1, 3, 5, 7, 33, 131, ……,

由通項公式(3)得數列是 1, 3, 5, 7, 57, 251, ……,

但通常總是延續成一个比較自然或是比較簡單的數列。因为由前四項1, 3, 5, 7很自然看出存在着一个簡單規律——每一个數是前一个數加上2, 那末根据这个規律很容易得出通項公式$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$, 而其餘的都不是很自然的或很簡單的可以看出來。因而这例通常總是延續成一个奇數數列的。

又我們知道一數列前四項为1, 3, 5, 7在理論上是可以隨便用什么方法把它延續下去, 例如: 可以令其他各項都等於1,便得出數列1, 3, 5, 7, 1, 1, 1, 1, ……, 不也是很簡單嗎? 但这样一來, 这个數列便喪失了前四項所擬定的簡單規律了。所以以后我們提到由已知一數列前几項而求其通項公式, 總是假定組成數列前几項的規律是始終不变, 而且是指求这几項很自然的或很簡單的通項公式。

我們仔細考察奇數數列

$$1, 3, 5, 7, \cdots\cdots, 2n-1, \cdots\cdots \tag{1}$$

及分母較分子大1的分數數列

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots \tag{2}$$

可見当号碼n增加時, 与它对应的數列諸項的値也隨之逐漸增大。卽數列中每一項都大於它前面的一項, 也就是說对於任何自然數n具有$a_n<a_{n+1}$的關係; 这样的數列称为遞增數列。

讓我們再考察負偶數數列

$$-2, -4, -6, -8, \cdots\cdots, -2n, \cdots\cdots \tag{3}$$

及分子較分母大1的分數數列

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\cdots \tag{4}$$

可見当号碼n增加時, 与它对应的數列諸項反而逐漸減小。卽數列中每一項都小於它前面的一項; 也就是說对於任何自然數n具有$a_n>a_{n+1}$的關係, 这样的數列称为遞減數列。

但如果某數列当号碼 n 增加時，与它对应的數列諸項時而增大時而減小，即对於任何自然數 n 具有 $a_{n-1}>a_n$ 及 $a_n<a_{n+1}$ 的關係或具有 $a_{n-1}<a_n$ 及 $a_n>a_{n+1}$ 的關係，这样的數列称为振動數列。例如

數列 $\quad -2, 2, -2, 2, \cdots\cdots, (-1)^n 2, \cdots\cdots \quad (5)$

數列 $\quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots\cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots\cdots \quad (6)$

數列 $\quad 1, -2, 4, -8, \cdots\cdots (-2)^{n-1} \cdots\cdots \quad (7)$

都是。

除上面所講的諸數列外，还有數列的所有項具有同一个値，这种称为常數列。例如

數列 $\quad -1, -1, -1, -1, \cdots\cdots \quad (8)$

數列 $\quad 5, \ 5, \ 5, \ 5, \cdots\cdots \quad (9)$

都是。

由於數列是以自然數为自变量的函數，自然可用圖象法表出。我們用坐标平面上的點來表示數列的諸項，點的橫坐标等於項的号碼，縱坐标等於对应的項的値。現在將上面所提到的几种類型的數列选擇几个作圖如下：

在圖象中我們可以綜合看出：表示數碼与項的对应値的點向右移動。(1)凡是遞增數列必同時向上移動(如圖 1)；(2)凡是遞減數列必同時向下移動(如圖 2)；(3)凡是振動數列必向上向下交替移動(如圖 3、4、5)；(4)凡是常數列必定旣不向上也不向下而与橫坐标軸平行移動(如圖 6)；又在圖象中有意义的只是橫坐标等於自然數時的點，連接點的折線只是为了淸楚地顯出點的变動情况，在折線上除了橫坐标为自然數的各點外，其他點对數列來講是沒有意义的。

現在讓我們再來考察：

數列(1)的圖象

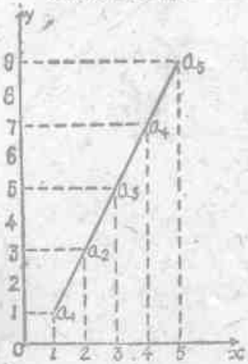

圖 1

數列(4)的圖象

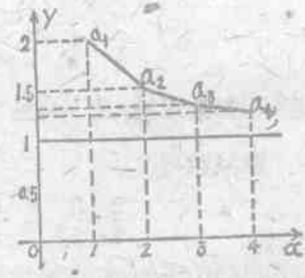

圖 2

數列(5)的圖象

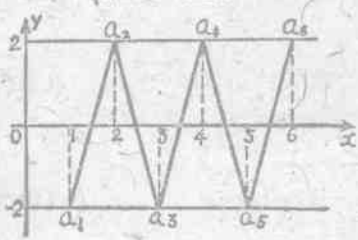

圖 3

數列(6)的圖象

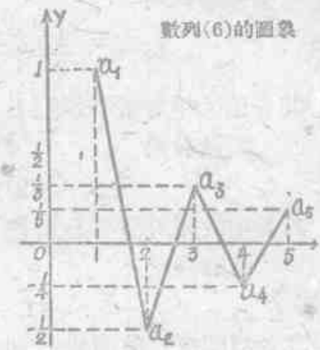

圖 4

數列(7)的圖象

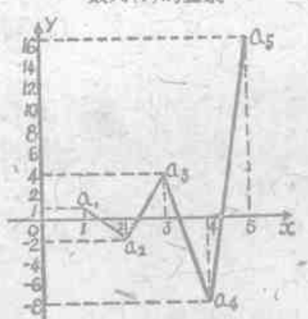

圖 5

數列(8)的圖象

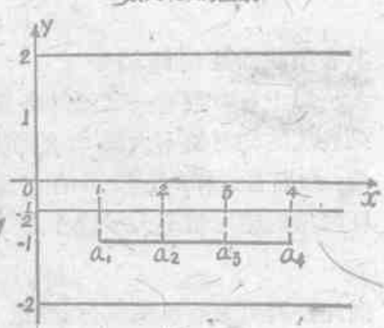

圖 6

遞增數列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\cdots \qquad (\text{數列 }2)$$

其各項都是正的，且不超过 1，即 $\frac{1}{2}\leqslant a_n<1$。

遞減數列

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots\cdots \qquad (\text{數列 }4)$$

其各項都是正的，且不超过 2，即 $1<a_n\leq 2$。

振動數列

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots\cdots \qquad (\text{數列 }6)$$

其各項的絕对值不超过 1，即 $|a_n|\leq 1$。

振動數列

$$-2,2,-2,2,\cdots\cdots,(-1)^n 2,\cdots\cdots \qquad (\text{數列 }5)$$

其各項的絕对值都是 2，即 $|a_n|=2$。

常數列

$$-1,-1,-1,-1,\cdots\cdots \qquad (\text{數列 }8)$$

其各項的絕对值都是 1，即 $|a_n|=1$。

常數列

$$5,5,5,5,\cdots\cdots \qquad (\text{數列 }9)$$

其各項值都是 5，即 $a_n=5$。

以上各數列有一共同的特性，即我們可給出一正數 A，使數列各項的絕对值不大於 A；这样的數列叫做有界數列。一般說起來，如果有这样的正數 A 存在，使數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n$，的任何項的絕对值不大於这个數 A，即对於所有 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$

$$|a_n|\leq A.$$

則此數列叫做有界數列；而变量 a_n 叫做有界量。

从上面諸例可見遞增數列、遞減數列、振動數列都可为有界數列，且常數列必为有界數列。

一个有界數列应有上下界，卽各項値最大不超过某一値，最小不小於另一値。其圖象在兩橫線之間，最高點或最低點是達到此兩橫線而不会在这兩橫線的外面。例如數列(5)的圖象，各項都在直線 $y=2$ 或直線 $y=-2$ 的上面，那末很明顯地 2 是上界，-2 是下界。但我們也可以認为它的圖象在 $y=3$ 及 $y=-3$ 兩直線之間，那末 3 是上界，-3 是下界。又數列(8)的圖象各項都在直線 $y=-1$ 的上面乃表示它的上下界重合的意思。我們也可以認为它的圖象在 $y=-\frac{1}{2}$ 及 $y=-2$ 兩直線之間，那末 $-\frac{1}{2}$ 是上界，-2 是下界。又可以認为它的圖象在 $y=2$ 及 $y=-2$ 兩直線之間。那末 2 是上界，-2 是下界。

又在遞增數列中首項卽为下界，所以只要注意它的上界；而遞減數列中首項卽为上界，所以只要注意它的下界。例如數列(4)的圖象，很明顯地各項在 $y=2$(a_1 在其上)及 $y=1$ 兩直線之間，那末 2 是上界，1 是下界。也可以認为在 $y=2$(a_1 在其上)及 $y=-2$ 兩直線之間，那末 2 是上界，-2 是下界。

但如考察遞增數列 $1, 3, 5, 7, \cdots\cdots, 2n-1, \cdots\cdots,$ (數列 1)

遞減數列 $-2, -4, -6, -8, \cdots\cdots, -2n, \cdots\cdots,$ (數列 3)

振動數列 $1, -2, 4, -8, \cdots\cdots, (-2)^{n-1}\cdots\cdots,$ (數列 7)

也有一共同的特性卽如我們任意給定一个任意大的正數 A，各數列中都存在着其絕对値大於 A 的項。例如

$$A=1000.$$

易見數列(1)从第 501 項起其以后各項都大於 1000，數列(3)从第 501 項起其以后各項的絕对値都大於 1000，數列(7)从第 11 項起其以后各項的絕对値都大於 1000，这样的數列叫做無界數列；而变量 a_n 叫做無界量。在圖象上我們决不能作出任何橫線

使數列的各點不高於此橫線(遞增數列)或低於此橫線。(遞減數列)或在兩橫線之間(振動數列)。

II. 等差級數

一个數列从第二項起每一項等於它的前一項加上同一常數,也就是說數列中任一項減去前一項的差都相等(等於所加的同一常數),这个數列就叫做等差級數或算術級數,而所加上的同一常數叫做公差。

例如 數列3, 7, 11, 15,……是从第二項起每一項等於前一項加上同一常數 4,所以是等差級數,而公差是 4。

又如 數列 8, 2, -4, -10, ……是从第二項起每一項等於前一項加上同一常數 -6,所以也是等差級數,而公差是 -6。

按用加号連數列的各項才叫做級數,卽

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots$ 叫做數列,

$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$ 叫做級數。

但在吉西略夫代數中所謂等差級數和等比級數就是等差數列和等比數列,那就是把級數看做數列的一种了。

設等差級數 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 的公差是 d,讓我們來求它的通項公式:

按等差級數定义,

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d.$$

我們可以看出一个很自然而很簡單的規律,卽第三項和第二項一样,都是等於首項与項數減 1 乘公差的和。我們可以在这个基礎上假定这个規律对於等差級數第 m 項成立,卽

$$a_m=a_1+(m-1)d.$$

那末我們可以推証,这个規律对於第 $m+1$ 項仍然成立。

事实上

$$a_{m+1}=a_m+d=a_1+(m-1)d+d=a_1+md.$$

因此对於任意自然數 m，从級數的第 m 項过渡到第 $m+1$ 項時这个規律仍然保持着。上面我們已經論証过这个規律对於級數的第三項是適用的，那末对於級數的第四項，規律自然仍是適用。旣然对於級數的第四項这个規律適用，那末它对於級數的第五項將仍然適用。所以我們可以断言对於任意自然數 n，这个規律始終保持着。那就是說通項公式是

$$a_n=a_1+(n-1)d. \qquad \text{(公式一)}$$

这种証明方法称为數学歸納法，在高三代數中將詳細講述。

我們很清楚地看到，如等差級數的公差为正數時，它是一个遞增數列。又由於所增加的是同一正數，自然是均匀的增大，所以若在坐标平面上描出它的圖象，則所有各點都在一直線上，(見前面所講的奇數數列的圖象)。又当 n 足够大時，a_n 的值可以大於給定的任意大的正數 A，所以它是無界數列。那就是說它是个無界的遞增數列。

同样如等差級數的公差为負數時，它是一个遞減數列。無論首項如何大，但距首項一定远的某一項開始为負數。又由於所增加的是同一負數，自然是均匀的減小，所以若在坐标平面上描出它的圖象，則所有各點也都在一直線上。又当 n 足够大時，a_n 的絕对值可以大於給定的任意大的正數 A，所以它是無界數列。那就是說它是个無界的遞減數列。

以后我們对於級數只研究由 n 項組成的有限級數。下面我們將要討論等差級數各項和公式是僅在这种情形下才有意义。这點教師在講授時要特別強調。

設一等差級數首項为 a_1，公差为 d，項數为 n，則此級數可以表示如下：

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \cdots\cdots, a_1+(n-3)d,$$
$$a_1+(n-2)d, a_1+(n-1)d.$$

讓我們來研究与首末兩項等距离的兩項之和。

$$a_1+a_1+(n-1)d=2a_1+(n-1)d,$$
$$a_1+d+a_1+(n-2)d=2a_1+(n-1)d,$$
$$a_1+2d+a_1+(n-3)d=2a_1+(n-1)d,$$

…………………………………………………

可見它們的和都相等，但如 n 为奇數時設为 $2m+1$，却多了一个單独的中間項設其值为 k 由於 $2k=2(a_1+md)=2a_1+2md=2a_1+[(2m+1)-1]d=2a_1+(n-1)d$。所以中間項的兩倍，即 $k+k$，仍然具有上面所歸納出的性質。因而我們獲得求等差級數各項和 s_n 的方法。我們先寫出下列兩等式。

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$
$$s_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_3+a_2+a_1,$$

相加得

$$2s_n=n(a_1+a_n)$$

或

$$2s_n=n[2a_1+(n-1)d].$$

故得

$$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}, \qquad \text{(公式二)}$$

或

$$s_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}. \qquad \text{(公式三)}$$

前面所講过的常數列 5, 5, 5, 5, ……，我們易見 $a_n=5$, $s_n=5n$。但由於从第二項起每一項可以看做是等於前一項加上同一常數 0，所以也可以看做是等差級數，而公差是 0。

按公式一，

$$a_n=5+(n-1)\times 0=5,$$

按公式二，

$$s_n=\frac{n}{2}(5+5)=5n.$$

表明等差級數公式对於常數列是適用的，不过這很明顯是走弯路，我們平常不用它們計算。因而我們知道公差是零的等差級數是个常數列，它們的通項和各項和很容易獲得，不必看做等差級數而应用等差級數公式去求。正如前面所講过的，等差級數可分为兩類：1. $d>0$，是个無界的遞增數列；2. $d<0$，是个無界的遞減數列。

我們知道 a_1, d, n, a_n, s_n 是等差級數的五要件，如已知其中三要件，我們可將上述各項和公式（公式二或公式三）与通項公式（公式一）联合起來而求出其余兩要件。分析起來一共有十類題目：

	1	2	3	4	5
已知	a_1, d, n	a_1, d, a_n	a_1, d, s_n	a_1, n, a_n	a_1, n, s_n
求	a_n, s_n	n, s_n	n, a_n	d, s_n	d, a_n
	6	7	8	9	10
已知	a_1, a_n, s_n	d, n, s_n	d, n, a_n	d, a_n, s_n	n, a_n, s_n
求	d, n	a_1, a_n	a_1, s_n	a_1, n	a_1, d

到高三講过組合時，我們可以核驗。因为 $C_5^3=C_5^2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$，所以剛好是十种題目。

例一. 試求 100 与 500 間能被 9 所整除諸數的和。

【解】 按題意我們知道大於 100 且能被 9 整除的數中的最小的一个是 108，小於 500 且能被 9 整除的數中的最大的一个

是 495。而且很明顯地这是一个公差为 9 的等差級數。我們必須先求出內中一共有多少个能被 9 所整除的數，才能算出它們的和來。即已知一等差級數 $a_1=108, a_n=495, d=9$，求 n 及 s_n。

將已知件代入公式一及公式二中得

$$\begin{cases} 495=108+9(n-1), & (1) \\ s_n=\dfrac{n}{2}(108+495). & (2) \end{cases}$$

由(1)解得 $n=44$，代入(2)得 $s_n=\dfrac{44}{2}\times 603=13266$.

例二　一等差級數，已知 $a_1=-10, d=7, s_n=20$，求 n 及 a_n.

【解】　將已知件代入公式一及公式二中得

$$\begin{cases} a_n=-10+7(n-1), & (1) \\ 20=\dfrac{n}{2}(-10+a_n). & (2) \end{cases}$$

由(1)，$a_n=7n-17$ 代入(2)化簡得 $7n^2-27n-40=0$.

解得

$$n=5, \qquad n=-\frac{8}{7}.$$

因 n 限为正整數，$n=-\dfrac{8}{7}$ 不合理，故 $n=5$，而 $a_n=18$.

例三　一等差級數，已知 $d=-4, n=9, s_n=135$，求 a_1 及 a_n.

【解】　將已知件代入公式三得

$$135=\frac{9}{2}[2a_1+(9-1)(-4)],$$

$$135=9(a_1-16), \qquad 15=a_1-16, \qquad a_1=31.$$

更代入公式一得，

$$a_n=31+8(-4)=31-32=-1.$$