題解中心

算術辭典

日本 長澤龜之助原著

薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

題解中
算術辭典

日本　長澤龜之助原著
薛德炯　吳載耀　編譯

上海新亞書店印行

目　次

第一門　解法之部 ……………1—1123

部 I. 數 ……………………1—106

類 1. 整數 ……………………1— 53
類 2. 分數 ……………………53— 84
類 3. 小數 ……………………84—101
類 4. 雜題 ……………………101—106

部 II. 數之應用 ……107—247

類 1. 整數之應用 ……………107—172
類 2. 分數之應用 ……………172—242
類 3. 小數之應用 ……………242—247

部 III. 類聚一 ……………248—338

類 1. 還元 ……………………248—253
類 2. 和與差 …………………253—268
類 3. 和一定 …………………268—271
類 4. 差一定 …………………271—279
類 5. 年齡 ……………………279—286
類 6. 龜鶴算法 ………………286—298
類 7. 過不足 …………………298—308
類 8. 車輪 ……………………308—310
類 9. 正方形 …………………310—320
類 10. 矩形 …………………320—330
類 11. 正方形與矩形 ………330—332
類 12. 層 ……………………332—338

部 IV. 數性 ……………339—437

類 1. 整數之性質 ……………339—382
類 2. 整數性質之應用 ………382—387
類 3. 公約數 …………………387—392
類 4. 公約數之應用 …………392—395
類 5. 公倍數 …………………396—400
類 6. 公倍數之應用 …………400—412
類 7. 公約數公倍數雜題 ……………………………412—418
類 8. 數字 ……………………418—437

部 V. 類聚二 ……………438—579

類 1. 相遇及追及 ……………438—488
類 2. 時計 ……………………488—513
類 3. 競走,競漕 ……………513—521
類 4. 環行 ……………………521—533
類 5. 工作 ……………………533—551
類 6. 水管 ……………………551—558
類 7. 寒暑表 …………………558—560
類 8. 牛頓問題 ………………560—565
類 9. 諸等數 …………………565—575
類 10. 標準時 ………………576—579

部 VI. 比例 ……………580—746

類 1. 比 ………………………580—602
類 2. 單比例 …………………602—635
類 3. 複比例 …………………635—662
類 4. 連鎖法 …………………662—673
類 5. 配分法 …………………673—714
類 6. 混合法 …………………714—746

部 VII. 成數算法 ……747—893

類 1. 成數 ……………………747—760
類 2. 損益 ……………………760—798

類 3. 佣錢 ……………………798 — 802
類 4. 保險 ……………………802 — 808
類 5. 租稅 ……………………808 — 816
類 6. 利息 ……………………816 — 847
類 7. 分期償還 ……………847 — 857
類 8. 折扣 ……………………857 — 863
類 9. 公債,股票 ……………863 — 884
類 10. 匯兌 …………………884 — 888
類 11. 平均日期 ……………888 — 891
類 12. 年金 …………………891 — 893

部 VIII. 開方……………894 — 920

類 1. 開平方 ………………894 — 896
類 2. 開平方應用 …………896 — 902
類 3. 直角三角形 …………902 — 914
類 4. 和與積等 ……………914 — 916
類 5. 開立方 ………………916 — 920
類 6. 開方雜題 ……………………920

部 IX. 類聚三 ………921—1060

類 1. 級數 ……………………921 — 945
類 2. 求積 ……………………945 — 985
類 3. 記數法 …………………985 — 994
類 4. 式題 ……………………994—1004
類 5. 省略算 ………………1005—1051
類 6. 對數 …………………1051—1055
類 7. 計子術 ………………1055—1058
類 8. 思維問題 ……………1058—1060

部 X. 理化學應用 …1061—1123

類 1. 物理算術 ……………1061—1106
類 2. 化學算術 ……………1106—1123

第二門 名詞之部………1125—1232

附錄一 英漢名詞對照 ……………………………………………… 1233—1247

第三門 算術小史之部 ……………………………………………… 1249—1302

A. 總論…………………………1249—1251
B. 第一期 (由古代諸種族至阿剌伯時代之算術) ……1251—1260
C. 第二期 (由第八世紀至第十四世紀) ……………………1260—1268
D. 第三期 (由第十五世紀至第十九世紀)……………1268—1282
E. 算學家年表………1282—1302

附錄二 ……………………………1303—1360

某月至某月間之日數表 ……………1303
階乘・海面上之 G 值………………1304
平方立方表 ……………………1305—1322
對數表 …………………………1323—1340
複利表 …………………………1341—1342
複利現價表 ………………………………1343
複利年金終價表 …………………………1344
複利年金現價表 …………………………1345
複利年賦金表 ……………………………1346
日給月計表・圓周與圓面積 ………1347
日息年利比較表・正多角形 ………1348
正多面體・數字之讀法 I—II………1349
度量衡 ……………………………1350—1357
各國貨幣 …………………………………1357
英尺與米突尺(公尺)比較 …………1359
75至10000之非質數之因數…1359—1360
經度一度之哩數表 ……………………1360

題解中心

算術辭典

第一門　解法之部

部 I. 數

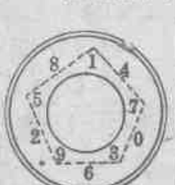
類 I. 整數

A. 加減

1. 由 1000 減 175, 加 172, 再減 175, 加 172, 如是連續行之, 則自始計之, 減至幾回, 不能再減?

解　減以 175, 加 172, 其結果即減以 175 −172＝3. 如是每行一回, 卽以 3 減一回. 據此, 省去最後之減數 175, 得 1000−175 ＝825, 除以 3, 得商 275, 無剩餘. 故減以 175, 加 172, 行至 275 回, 則得餘數 175. 因此減至 275+1, 卽 **276** 回, 則全盡.

2. 試藉所示圖之助, 由 100 迅速累減 7, 以求最後之結果. 又試由 1000 分別累減 9, 8, 6, 及 5 時, 如何? [此圖之效用, 乃在累加較 9 小之同數時, 可徑知所得數之末位數字. 例如累加 3 於 12 時, 得 **12, 15, 18, 21, 24,**



27,……, 其末位數字, 可依順時計向由此圖形取得之. 又如累加 4 於 12, 則得 **12, 16, 20, 24, 28, 32,**……, 其末位數字可依反時計向, 由此圖形一間一取得之. 總之, 在累加或累減同數之際, 其所得第三, 第四, 等數之末位數字, 可準照所得最初二數, 依順時計向或反時計向, 由此圖形, 間若干字而求得之].

解　由某數減 7 時所得之末位數字, 等於加 3 時所得之末位數字; 何則, 減以 7, 等於減以 10 而更加 3 故也. 據此, 因 100 之末位爲 0, 故可由 0 處始, 依順時計向計之. 即爲 93, 86, 79, 72, 65, 58, 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9, **2**. 但單求最後之結果時, 則因由 100 減 7×10 得 30, 故可由 30 始. 次, 由 100 累減 9 時, 則可由 100−9×10 ＝10 始, 而得 **1**; 累減 8 時, 則因等於加 2, 故可由 0 始, 依順時計向就外部一間一取之, 而得 100−8×10＝20, 12, **4**; 累減 6 時, 可由 0 始依反時計向就外部依次取之, 而得 100−6×10＝40, 34, 28, 22, 16, 10, 4; 累減 5 時, 極爲簡單, 不必用此圖. 但若特別須用此圖, 則因此圖依次各數, 係依次加 3 而得者, 故由 3×5＝15 可知

5 爲 0 下第 5 數字,即 0 下隔去四字取得者, 故所求末位數字爲 $100-5\times10=50$, 45, 40, 35,……, **0**.

3. 被減數或減數,加以任意數或減以任意數,則差之變動如何?

【解】 被減數增以任意數或減以任意數,則差亦以同數增減,又若減數增以任意數或減以任意數,則差亦以同數減增. 何則,因兩數之差者,乃被減數超過減數之數, 故被減數若有增減, 則其超過減數之數, 亦生同數之增減, 反之, 減數若有增減,則減數較被減數不足之數, 亦生同數之減增. 故如前述.

【註】 本題若以代數記號表之,則更簡明. 卽設 $a-b=d$, 則 $(a\pm x)-b=(a-b)\pm x$, 及 $a-(b\pm x)=(a-b)\mp x$.

B. 乘積

4. 設以 14 及 25 爲甲乙二因數作積,若甲因數加 3, 乙因數加 7, 則積生若何之變化?

【解】 二因數之積爲 14×25, 今 $(14+3)\times(25+7)=(14+3)\times25+(14+3)\times7$[分配律]$=(14\times25+3\times25)+(14\times7+3\times7)=14\times25+(14\times7+25\times3+3\times7)$, 卽甲乙二因數之積增加,所增加者爲甲因數之 7 倍,乙因數之 3 倍,與 3×7 之和.

5. 設以 12 及 27 爲甲乙二因數作積,若由甲因數減 3, 由乙因數減 7, 則積發生若何之變化?

【解】 甲乙二因數之積爲 12×27, 今 $(12-3)\times(27-7)=(12-3)\times27-(12-3)\times7$ [分配律] $=(12\times27-3\times27)-(12\times7-3\times7)=12\times27-3\times27-12\times7+3\times7$ [組合律] $=12\times27-(27\times3+12\times7-3\times7)$, 卽甲乙二因數之積減小,所減小者爲乙數之 3 倍,甲數之 7 倍之和與 3×7 之差.

6. 右圖示乘法之演算,△處之數字未明,然則△處之數字如何?

$$\begin{array}{r} 4\triangle\triangle \\ 3\triangle \\ \hline 36\triangle\triangle \\ \triangle\triangle7\triangle\triangle \\ \hline \triangle\triangle3\triangle\triangle \end{array}$$

【解】 乘數中之未明數字須爲 8 或 9. 何則, 若命之爲 7, 則縱令 $500\times7=3500$, 亦小於 3600 故也. 茲先命之爲 8. 因 $400\times8=3200$, $5\times8=400$, 故被乘數之十位數字當爲 5 以上. 命之爲 5, 則 $50\times30=1500$, $7\times30=210$, 故被乘數之末位,須爲 7 以上. 故如上得 (1) 式爲解答之一. 又設被乘數之末位數字爲 8, 則得 (2) 式. 次,設被乘數之十位數字爲 6, 而以 0 或 9 爲其末位數字,則 $460\times30=13800$, 或 $469\times30=14070$, 又 46×30 之各種百位數字,不能外於 8, 9 或 0. 故所求之解答爲 (1) 式.

$$\begin{array}{rr} (1) & (2) \\ 457 & 458 \\ 38 & 38 \\ \hline 3656 & 3664 \\ 13710 & 13740 \\ \hline 17366 & 17404 \end{array}$$

7. $123456789\times987654321\times192837465$ 爲幾位數?

【解】 第一因數小於 2×10^8,第二因數小於 99×10^7, 第三因數小於 2×10^8, 故三因數之積小於$2\times10^8\times99\times10^7\times2\times10^8=396\times10^{23}$, 卽不大於 26 位之數. 又第一因數大於 1×10^8, 第二因數大於 9×10^8, 第三因數大於 19×10^7. 故三因數之積大於 $1\times10^8\times9\times10^8\times19\times10^7=171\times10^{23}$, 卽不小於 26 位之數. 故所求之位數爲 **26**.

8. 785626 乘以 85672 時,得部分積五個,若欲令其成三個部分積,當用何法?

解 因 $56=8\times 7, 72=8\times 9$, 故欲求被乘數與 72 之積,可求被乘數與 8 之積之 9 倍. 又欲求被乘數與 56 之積可求被乘數與 8 之積之 7 倍. 故其運算,如上所示.

```
      785626
       85672
------------
     6285098
    43995056
    56565072
------------
 67306150672
```

C. 除商

9. 除法中若剩餘較商大,則其除數增 1,而商不變. 試證之.

解 今設'剩餘=商+甲',則'被除數=除數×商+剩餘=除數×商+商+甲=(除數+1)×商+甲',而剩餘較除數小,故較剩餘小之甲,小於較除數大之'除數+1'. 故加 1 於除數而除時,其商等於原商.

10. 除法中以同數乘除數及被除數時,其商不變,而剩餘等於原剩餘乘以同數所得之積. 試證之.

解 **1.** 例如設除法 (1) 及 (2) 中,除法 (2) 之除數及被除數爲以同數 4 乘除法 (1) 之除數及被除數所得者. 茲比較之,即可知各部分除法中之除數,被除數,及部分積,在 (2) 中者俱爲在 (1) 中者之 4 倍,從而剩餘亦增大 4 倍,而商無變化.

```
     (1)                (2)

3749 | 12          14996 | 48
36     312         144     312
 14                  59
 12                  48
  29                 116
  14                  96
   5                  20
```

解 **2.** 設某數 N, 以除數 a 除時,得商 Q, 剩餘 R, 則 $N=a\times Q+R$. 此式之兩邊,以他任意數,例如 m 乘之,得 $N\times m=a\times m\times Q+R\times m$. 然 R 爲除以 a 時之剩餘,故 $a>R$, 故 $a\times m>R\times m$. 因此 $N\times m$ 除以 $a\times m$ 時,得商 Q,剩餘 $R\times m$,即如題所言.

注意 **1.** 由本題之結果反考之,可知除法中以同數除被除數及除數,則商不變,而剩餘等於以同數除原剩餘時之商.

注意 **2.** 由注意 1, 可知施行除法時,被除數及除數之尾端 若有若干個 0, 則可就此二數,自末尾起,削去同數個 0, 而商不變. 然若不能整除,則所得之剩餘後,必須附加前所削去之 0, 始可得原剩餘.

注意 **3.** 小數之除法 [除數被除數皆爲小數者] 中,化除數爲整數時,亦以本題之理爲依據.

11. 設一數能整除各數,則此數除各數之和時所得之商,等於此數一一除各數時所得商之和. 試證之.

解 例如 $(27+18+15)\div 3=27\div 3+18\div 3+15\div 3$. 何則, $(27\div 3+18\div 3+15\div 3)\times 3=27\div 3\times 3+18\div 3\times 3+15\div 3\times 3=27+18+15$, 故 $(27+18+15)\div 3=27\div 3+18\div 3+15\div 3$ 也.

注意 除數若不能整除各數,而用分數時,則本定數恆眞.

12. 設一數能整除二數,則此數除二數之差時所得之商,等於其一一除此二數時所得商之差. 試證之.

解 例如 $(35-15)\div 5=35\div 5-15\div 5$

何則,$(35\div5-15\div5)\times5=35\div5\times5-15\div5\times5=35-15$ 故也.

注意 參照 11 題注意.

13. 若干因數之積,除以是等因數之一時所得之商,等於此因數外之其餘諸因數之連乘積.試證之.

解 例如 $2\times4\times7\times9\div7=2\times4\times9$. 何則,以 7 乘 $2\times4\times9$, 得 $2\times4\times9\times7=2\times4\times7\times9$ 故也.

14. 若干因數之連乘積除以他數時,若此諸因數中有為除數之倍數者,則可將此因數改之為除以除數時所得之商,即得所求之商.試證之.

解 例如 $3\times12\times8$ 除以 6 時,因 12 為 6 之倍數,故所求之商等於 $3\times(12\div6)\times8$, 即 $3\times2\times8$. 何則, $3\times12\times8\div6=3\times2\times6\times8\div6=3\times2\times8$ [13 題] 故也.

注意 由此可知,若干因數之連乘積除以某數時,可單除其中之一因數.

15. 以若干因數之連乘積除某數時所得之商,等於以此若干因數,逐一除此數時最後所得之商.試證之.

解 (I) 逐次除法中無剩餘時.例如因 $168=2\times3\times4\times7$……(1), 故 $168\div(2\times3\times4)=7$. 又 (1) 之兩邊除以 2, 則由 13 題, $168\div2=3\times4\times7$, 同理 $168\div2\div3=4\times7$, $168\div2\div3\div4=7$. 因此, $168\div(2\times3\times4)=168\div2\div3\div4$.

(II) 逐次除法中有剩餘時. 例如以 $3\times5\times9$, 即 135, 除 1199 時,因 $1199=3\times399+2$, $399=5\times79+4$, $79=9\times8+7$, 故 $5\times79=5\times(9\times8+7)=5\times9\times8+5\times7$,因此 $399=5\times79+4=5\times9\times8+5\times7+4$, 從而 $3\times399=3\times(5\times9\times8+5\times7+4)=3\times5\times9\times8+3\times5\times7+3\times4$, 故 $1199=3\times999+2=3\times5\times9\times8+3\times5\times7+3\times4+2=(3\times5\times9)\times8+[(3\times5)\times7+(3\times4+2)]$. 此式中最後之 2 為某數除以 3 時所得之剩餘,故 $3>2$, 又 4 為除以 5 時所得之剩餘, 故 $5>4$, 從而 $3\times5>3\times4+2$. 次, 7 為某數除以 9 時所得之剩餘故 $9>7$, 因此 $3\times5\times9>3\times5\times7+3\times4+2$. 是以 1199 為 $3\times5\times9$ 之 8 倍加小於 $3\times5\times9$ 之數所得之和.故 1199 除以 $3\times5\times9$ 時所得之整數商為 8; 而 1199 除以 3 時所得之整數商為 399, 399 除以 5 時所得之整數商為 79, 79 除以 9 時所得之整數商亦為 8. 故如題所言 [參照 34 題].

16. 以甲數除某數, 更以乙數除其商, 與以乙數除某數, 更以甲數除其商所得之結果相等.試證之.

解 某數無論先除以甲數, 或交換除數, 而先除以乙數, 其結果皆等於某除數以 '甲×乙' 時所得之商 [15 題] 故除數雖交換,而商不變.

注意 本題中之除數並不限於二數, 不論其為幾數,本題皆能成立.

17. 設某數 b 得為他數 c 所整除,則以其商除一數 a 時所得之商,等於以 b 除 $a\times c$ 時所得之商.試證之.

解 設 $a\div(b\div c)=x$, 則由除法之定義, $a=x\times(b\div c)=x\times b\div c$ [組合律],故 $a\times c=x\times b$, 從而 $a\times c\div b=x$, 故 $a\div(b\div c)$

$=a\times c\div b$.

注意 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立甚明．

18. 設某數 b 得爲 c 所整除，且他數 a 得爲 b 所整除，則 a 除以 $b\div c$ 時所得之商，等於 a 除以 b 時所得之商乘以 c 所得之積．試證之．

證 設 $a\div(b\div c)=x$，則由除法之定義，$a=x\times(b\div c)=x\times b\div c$ [組合律] $=x\div c\times b$ [交換律]．故 $a\div b=x\div c$，故 $a\div b\times c=x$，故 $a\div(b\div c)=a\div b\times c$．

注意 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立．

19. 設某數 a 得爲 b 所整除，又他數 c 得爲 d 所整除，則 $a\div b$ 與 $c\div d$ 之相乘積，等於 $a\times c$ 除以 $b\times d$ 時所得之商．試證之．

證 $(a\div b)\times(c\div d)=a\div b\times c\div d$ [組合律] $=a\times c\div b\div d$ [交換律] $=a\times c\div(b\times d)$ [組合律]．

注意 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立．

20. 設 a, b, c, d 爲四數，$a\div b$，$c\div d$ 之各除算皆爲整除算，則 $(a\div b)\div(c\div d)=a\times d\div(b\times c)$．試證之．

證 $(a\div b)\div(c\div d)=a\div b\times d\div c$ [組合律] $=a\times d\div b\div c$ [交換律] $=a\times d\div(b\times c)$ [組合律]．

注意 同 19 題之注意．

21. 右之除算中，在・處之數字爲何？

```
7··)51··1(·2
     ··1·
     1·1·
      ····
      1·9
```

解 將所設除算式，改書成右下形．此時 $l=1$，$q=11-9=\mathbf{2}$，因而 $b\times 2$ 之末位 $=q=2$，故知 $b=1$，或 6．又因 $7a1\times e<51cd$，故 $e<8$，及因 $800\times 6<51cd$，故 $e\geqq 6$，故 $e=6$，或 7．

```
7ab)51cd1(e2
     fg1h
     1k1l
      mnpq
      1r9
```

設 $e=7$，則 $7a1\times e=fg17=4900+(fg10-4900)+7$，故 $fg10-4900=a\times 70$，故知非 $a\times 70=210$，因而 $a=3$ 不可．然此時 $fg1h=5117$，因而生不合理之結果 $1k1=cd-17$．故 $e\neq 7$，因此 $e=6$．於是 $7a1\times 6=4200+a\times 60+6=fg1h$，故 $f=4$，$h=6$，然縱命 $a=9$，則 $791\times 6=4746$，而亦不能得 $51cd-4746=1k1$，故 $b=1$ 錯誤．因此 $b=\mathbf{6}$．將此式與 $e=6$ 組合，則 $7ab\times 6<4800$，故 $51cd-7a6\times 6>51cd-4800$，即 $1k1>300$，而不合理．故此假定不可能，是以最後所得推考者，惟 $e=\mathbf{7}$．此時 $7a6\times 7=4900+a\times 70+42=fg1h$，由此得 $h=\mathbf{2}$，$a=\mathbf{1}$，$f=\mathbf{5}$，$g=\mathbf{0}$．又由 $716\times 2=1432=mnpq$，得 $m=\mathbf{1}$，$n=\mathbf{4}$，$p=\mathbf{3}$．由 $r=11-(p+1)=7$，得 $r=\mathbf{7}$．故 $1k1l=mnpq+1r9=1611$，故 $k=\mathbf{6}$．又由 $fg1h0+1k11=51731=51cd1$，得 $c=\mathbf{7}$，$d=\mathbf{3}$．至此問題全皆解決．

答

```
716)51731(72
    5012
     1611
     1432
      179
```

22. 試不用省略算，而求 38927 與 67198 之積除以 74213 與 4738 之積所得之商，至小數第四位．

解
```
      38927
      67198        74213
     311416         4738
    350343        593704
    38927         222639
  272489         519401
 233562          296852
 2615816546 | 351621194
 2461348358 | 7.4393…
  1544681880
  1406484776
   1381971040
   1054863582
    3271074580      答 7.4393
    3164590746
     1064838340
     1054863582
        9974758
```

23. 以 93 除 4020, 得商爲 4, 剩餘爲 38, 此答數正否, 試憑還原法以驗. 若爲錯誤者, 試改正之.

解 4020 除以 93, 得商爲 4, 剩餘爲 38, 則等式 $4020=93\times4+38$ 應能成立, 然因 $93\times4+38=410$, 與被除數絕不相等, 故所設之答爲錯誤者. 正確之運算, 應如右方所示, 因知所得之商應爲 **43**, 剩餘應爲 **21**.

```
4020 | 93
372  | 43
 300
 279
  21
```

24. 一除法, 運算後得商爲 15, 今償使其除數改變, 再施除算, 而得商爲 20. 問對於除數應與以若何之變化?

解 **1.** 設被除數爲 a, 除數爲 b, 依題意, 可知 $a=b\times15=b\times3\times5$, 次設後一除數爲 b', 則知 $a=b'\times20=b'\times4\times5$. 故 $b\times3=b'\times4$. 卽始除數之 3 倍等於後除數之 4 倍, 因知後除數卽由始除數之 3 倍除以 4 而得也.

解 **2.** 設被除數爲 a, 除數爲 b, 則依題意, $a=b\times15$. 如可變化除數與商, 而欲被除數保持不變, 若設商已變化, 則非以其反對變化施之於除數不可. 然本題中, 商已乘上 $20\div15=\frac{4}{3}$, 因知除數應除以 $\frac{4}{3}$ 也. 卽 $a=(b\div\frac{4}{3})\times(15\times\frac{4}{3})=b\div\frac{4}{3}\times20$.

25. 某除法中, 商得 13, 剩餘爲 26, 其除數與被除數之和爲 404. 求除數及被除數.

解 404 旣爲除數與被除數之和, 則 404 除以除數所得之商應爲 $13+1=14$, 而剩餘仍爲 26. 故除數爲 $(404-26)\div14=$**27**, 因而被除數爲 $404-27=$**377**.

26. 以某數除 11011, 求得之商爲二位數, 並已知得商之第一數字時之剩餘爲 84, 得第二數字時之剩餘爲 50. 試求除數之值.

解 商旣爲二位數, 則商之第一數字與除數之乘積之末位相當於被除數之十位. 因其時之剩餘爲 84, 故除數定爲 $1101-84=1017$ 之約數, 同理, 因求得第二數字時之剩餘爲 50, 故知除數又爲 $841-50=791$ 之約數. 因而求 1017 與 791 之最大公約數, 得爲 113. 若以 113 作除數, 則得商爲二位數中之 **97**, 故知 **113** 爲所求之除數.

27. 一除法中, 其被除數. 除數, 商之和爲 73; 除數, 商, 剩餘之和爲 17; 若設商爲 8, 則被除數爲何?

解 被除數與除數之和, 卽除數與商之積加上剩餘與除數之和, 爲 $73-8=65$. 但除數與剩餘之和爲 $17-8=9$, 故除數與商之積爲 $65-9=56$. 是以除數等於 $56\div8=7$, 故所求之被除數爲 $73-7-8=$**58**.

28. 一除法中,商等於除數之 6 倍,除數又等於剩數之6倍,而此三數之和爲516. 求被除數.

解 除數爲剩餘之 6 倍,商爲除數之 6 倍,是以商卽爲剩餘之 $6\times6=36$ 倍. 故三數之和爲剩餘之 $36+6+1=43$ 倍,以是求得剩餘爲 $516\div43=12$, 從而除數爲 $12\times6=72$, 商爲 $72\times6=432$. 由此求得所需之被除數爲 $432\times72+12=$**31116**.

29. 某數爲 17 除時,所得之整數商等於剩餘之 5 倍,而被除數與整數商之和爲 182. 試求被除數.

解 被除數等於商之 17 倍加剩餘. 然商爲剩餘之 5 倍,商之 17 倍卽等於剩餘 5 倍之 17 倍,或85 倍,因而被除數卽爲剩餘之 85 倍與剩餘之和,卽等於剩餘之 86 倍. 依題意,被除數與商之和等於 182, 故剩餘之 86 倍與 5 倍之和,卽 91 倍,等於 182, 是以知剩餘爲 $182\div91=2$, 因而求得被除數爲 $2\times86=$**172**.

30. 某數除以 7 時, 得商 8 與剩餘若干, 次加 6 於其剩餘而復以 7 除. 照此法進行, 歷五回而剩餘始無. 求某數.

解 某數除以 7 時,所得之剩餘決不超乎 1, 2, 3, 4, 5, 6 六數之外, 故此類剩餘加 6 後,必等於 7,或大於 7 而小於 7 之 2 倍,其理甚明. 故剩餘加 6 後而爲 7 除, 歷 5 回而始整除,關於每回之除算得商始終爲 1. 以此,前之商 8 加上後之商 5 後乘之以 7, 卽等於某數與 5 回加入之 6 之和, 是故可知所求之數爲 $(8+5)\times7-(6\times5)$ **=61.**

D. 剩 餘

31. 於除法中, 剩餘必小於被除數之半分. 試證之.

解 於除法中, '除數×商+剩餘＝被除數', 故若'剩餘＝被除數÷2',或'剩餘>被除數÷2' 時, 則'除數×商＝被除數÷2', 或 '除數×商＜被除數÷2', 因而 '除數×商＝剩餘' 或 '除數×商＜剩餘'. 於是, 設商爲整數, 則此二式卽表示 '除數＝剩餘',或 '除數＜剩餘', 是乃不合理者. 若商爲小數時, 則被除數得以 10 之某次冪乘之,使商成整數. 於是因被除數及除數, 俱以同數倍之, 故其倍數之大小關係, 與原來之被除數, 除數之關係同. 是以無論在何款中,若 '剩餘＝被除數÷2', 或 '剩餘>被除數÷2', 則生不合理之結果, 故知題所言.

32. 某整數除以 2 時,得剩餘 1,次以 5 除其商, 則得剩餘 3, 再以 6 除此時所得之商, 則得剩餘 4. 然則某整數若以 $2\times5\times6=60$ 除時,其剩餘如何?

解 設某整數 N 除以 2 時所得之商爲 P, 則 $N=P\times2+1$; 設 P 爲 5 除時所得之商爲 Q, 則 $P=Q\times5+3$; 故 $N=(Q\times5+3)\times2+1=Q\times5\times2+3\times2+1$, 設 Q 除以 6 時之商爲 R, 則 $Q=R\times6+4$, 故 $N=(R\times6+4)\times5\times2+3\times2+1=R\times6\times5\times2+4\times5\times2+3\times2+1$. 因而以 60 除 N 時所得之剩餘爲 $4\times5\times2+3\times2+1=$**47**. (參照 15 題)

附記 普徧言之, 最後之剩餘 乘以其前

之諸除數，又其前一之剩餘，乘以此剩餘前之諸除數，如是以往，則加此種種積與最先之剩餘，卽得全剩餘.

33. 某整數除以 24，此除數乃可分爲 2，3，4 三因數者，並已知某整數最初以 2 除之，得剩餘 1，復以 3 除其商，則得剩餘 2，再以 4 除此時所得之商，則得剩餘 2，然則若最初除以 4，次以 3 除其商，再以 2 除其商時，於此次之各除法中所得之剩餘如何?

解 某整數爲(第三商) $\times 4\times 3\times 2+2\times 3\times 2+1\times 2+1$ [32 題]，卽等於 (第三商) $\times 24+15$，因此某整數除以 4 時，則得商爲(第三商) $\times 6+3$，並得剩餘 3，又以 3 除(第三商) $\times 6+3$ 時，則得商爲(第三商) $\times 2+1$ 而無剩餘，最後此商爲 2 除時，則得商仍爲第三商而得剩餘 1.

34. 以甲數之因數逐次除乙數，捨棄每次之剩餘，則最後之商與以甲數除乙數所得之商相等，試證之.

解 因以甲之因數逐次除乙數時，捨棄每次之剩餘，故以甲數除乙數所得之商決不小於逐次以甲數之因數除乙數最後所得之商，其理甚明，故祇須證明前商決不大於後商卽可. 在次之除法中，所捨之數小於逐次之除數. 例如設除數爲 60，分解之爲 $3\times 4\times 5$，則逐次之剩餘決不大於 2，3，4. 今卽設剩餘爲最大之 2，3，4，則依 32 題，全剩餘爲 $2+3\times 3+4\times 3\times 4=(3-1)+(4-1)\times 3+(5-1)\times 3\times 4=(3-1)+(3\times 4-3)+(3\times 4\times 5-3\times 4)=3\times 4\times 5-1=60-1$，故不行逐次除法，而以 $3\times 4\times 5$，卽 60 除之，商亦不增加，故以甲數除乙數所得之商，決不大於以甲數之因數逐次除乙數所得之商，卽如題所言.

注意 本題兩於 15 題，但題旨及證法相異，故另揭之.

35. 保持除數不變，而被除數乘以某數時，則商及剩餘亦將乘以同數，試證之.

解 設被除數爲 31，除數爲 7，則得商 4 與剩餘 3，然則 $31=7\times 4+3$，但相等之二數，各以同數乘之，其結果仍相等，故 $31\times 2=(7\times 4+3)\times 2=7\times 4\times 2+3\times 2=7\times(4\times 2)+3\times 2$，由是可知被除數乘 2 時而除數不變，則商及剩餘亦均 2 倍其值.

注意 在本題中，被除數所乘之數與剩餘之積必須小於除數. 何則，例如設 125 除以 30 時，得商 4 與剩餘 5，卽 $125=30\times 4+5$，而等式之兩邊設均乘 7，則 $125\times 7=30\times 4\times 7+5\times 7$，故被除數乘以 7 時，得商爲 4×7，剩餘爲 $5\times 7=35$. 然以剩餘 35 大於除數 30 故，則剩餘決非 35 也，於是與題旨不合.

36. 保持除數不變，被除數除以某數，商及剩餘亦均除以同數. 試證之.

解 設被除數爲 a，除數爲 b，商爲 q，剩餘爲 r，則 $a=b\times q+r$. 設以 n (n 爲得整除 a，q，r 之任何數) 除此等式之兩邊，則 $a\div n=(b\times q+r)\div n=(b\times q)\div n+(r\div n)$ [配分定則] $=b\times(q\div n)+(r\div n)$，故 $a\div n=b\times(q\div n)+(r\div n)$. 由是可知保持除數之不變，被除數設除以某數 n，則商及剩餘亦均除以同數.

37. 保持被除數不變，假設除數乘以某數時，則商須以同數除之，而剩餘仍不變，試證

之.

解 設被除數為 a, 除數為 b, 商為 q, 剩餘為 r, 則 $a=(b\times q)+r$, 今 $b\times q$ 積中之一因數 b 為某數 m 乘後, 則須破壞等式之成立. 欲仍保持等式之成立, 則非以同數除其積中之他一因數 q 不可. 故 $a=(b\times m)\times(q\div m)+r$, 而與題言吻合.

注意 在本題中, q 必得為 m 所整除, 否則剩餘顯然須發生變化.

38. 以甲數先後除乙數及丙數,所得二剩餘之和, 等於以甲數除乙丙二數之和時, 所得之剩餘, 或再加入甲數而得之和, 其證法如何?

解 設乙為甲除時所得之剩餘為R, 則'乙=甲之倍數+R', 又丙為甲除時所得之剩餘為 r, 則'丙=甲之倍數 $+r$'. 因此, 則'乙+丙=甲之倍數 + 甲之倍數+R+r', 但以兩甲數之倍數之和仍為甲之倍數, 故'乙+丙=甲之倍數+R+r'.若R+r<甲, 則 R+r 即為以甲除乙+丙時所得之剩餘. 若R+r>甲,則因 R<甲, r<甲,而 R+r<甲×2. 因此, R+r 即等於以甲除乙+丙時所得之剩餘加甲數.故如題所言.

39. 以甲數除乙數及丙數所得二剩餘之差等於以甲數除乙丙二數之差時之剩餘, 或等於此時所得之剩餘與甲數之差.試證之.

解 設以甲數除乙數及丙數時, 所得之二剩餘各為R, r, 則'乙=甲之倍數+R', '丙=甲之倍數+r', 因而若設乙大於丙, R>r, 並因甲之二個倍數之差仍為甲之倍數,故'乙−丙=甲之倍數+(R−r)', 因知R−r 即為以甲除乙−丙時所得之剩餘.若設乙>丙,且R<r, 則甲+R>r,且'乙−丙=甲之倍數+甲+R−r', 因而 '甲+R−r<甲',且'甲+R−r=甲−(r−R)'. 是乃乙−丙除以甲時,所得之剩餘也; 故 r−R 等於以甲除乙−丙時之剩餘與甲之差. 即如題所言.

40. 設以甲數除乙數及丙數所得之二剩餘之和等於甲數,則乙丙二數之和得為甲數所整除,試證之.

解 1. 設以甲除乙丙時所得之二剩餘各為 R, r, 則 '乙=甲之倍數+R', '丙=甲之倍數+r', 因而 '乙+丙=甲之倍數+R+r'. 然依題意, R+r 與甲相等,故'乙+丙=甲之倍數+甲=甲之倍數', 因知 '乙+丙' 得為甲所整除.

解 2. 由 38 題,可知以甲除乙及丙所得之二剩餘之和, 等於以甲除乙丙之和所得之剩餘, 或等於再加上甲之和, 然依題意, 前二剩餘之和既等於甲, 則以甲除乙丙之和所得之剩餘仍等於甲,是乃不可能者, 且剩餘加甲後仍等於甲, 是可知剩餘為 0 也;即 '乙+丙' 得為甲所整除.

注意 與本題同理,設以甲數除乙數及丙數所得之二剩餘相等時,則乙丙二數之差得為甲數所整除,亦得證之.

41. 以一數除諸他數之相乘積之剩餘,等於以該數各別除諸數所得之諸剩餘之相乘積, 或等於此乘積再除該數所得之剩餘, 試證之.

解 例如求 24, 26, 34 之相乘積除以 7 時所得之剩餘, 因 24=7 之倍數+3, 26=7 之倍數+5, 故 24×26=(7 之倍數

$+3)\times(7$ 之倍數$+5)$, 然此式之右邊, 卽等於 7 之倍數與他一 7 之倍數之積, 7 之倍數與 3 之積, 7 之倍數與 5 之積, 及 3×5 等四數相加之和, 此四數中, 始三者皆爲 7 之倍數, 故知 $24\times26=7$ 之倍數$+3\times5$; 次因 $34=7$ 之倍數 $+6$, 故 $24\times26\times34=(7$ 之倍數 $+3\times5)\times(7$ 之倍數 $+6)=7$ 之倍數 $+3\times5\times6$, 因知以 7 除 $24\times26\times34$ 時所得之剩餘 卽等於以 7 除 $3\times5\times6$ 時所得之剩餘. 故以一數除諸他數之相乘積所得之剩餘, 等於以該數各別除諸數時所得之剩餘之相乘積, 若此乘積小於除數. 設或此乘積不小於除數, 則所求之剩餘等於此相乘積爲除數所除時之剩餘.

42. 試求 825491 之四乘冪爲 7 及 9 所除時所得之兩剩餘.

解 825491^4, 卽四 825491 之連乘積, 爲 7 除時所得之剩餘, 等於 825491 爲 7 除時所得剩餘之四乘冪, 或等於此乘冪爲 7 除時所得之剩餘 (41 題), 825491 爲 7 之倍數$+2$, 故所求之剩餘爲 $2^4=16$ 被 7 所除而得之剩餘, 卽 **2**. 同理, 可求以 9 除時所得之剩餘, 因 825491 爲 9 之倍數 $+2$, 故所求之剩餘爲 $2^4=16$ 除以 9 時所得之剩餘, 卽 **7**.

43. 某數設以 391 除之, 則得剩餘 300, 然則以 17 除時, 其剩餘爲幾何?

解 因 391 爲 17 之倍數, 故 391 之倍數加 300 所得之數, 亦卽 17 之倍數加 300 所得之數, 其理甚明. 故某數爲 17 除時所得之剩餘, 卽等於 300 以 17 除時所得之剩餘, 卽 **11**.

44. 若於某數字之右, 添若干個 0, 其個數較某質數 [2 及 5 除外] 少 1, 則如是所得之數除以此質數時所得之剩餘, 必等於首位數字. 例如 5000000 除以 7 時, 得剩餘 5. 求證.

證 $5000000=5\times(999999+1)=5\times999999+5\times1$, 而 $999999=10^{7-1}-1$, 其中 10 與 7 互質, 故爲 7 之倍數, 因此, 由 Fermat 氏定理 [1749 題], 剩餘爲 5. 關於其他質數 11, 13, 等, 亦可如是證之.

注意 本題中所以將 2 及 5 除外者, 因 2 或 5 不與 10 互質, 故不能應用 Fermat 氏定理也.

E. 一數

45. 試求 13436928 之全部約數之和.

解 $13436928=2^{11}\times3^8$, 故本題之全部約數乃係 $(1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{11})\times(1+3+3^2+3^3\cdots\cdots+3^8)$ 積中之各項. 故欲求所求之和, 祇須求得此積中之各項之和卽積之值已可. 然前一括號中, 乃以 1 爲初項, 2 爲公比之 12 項之等比級數之和, 其和爲 $\dfrac{2^{12}-1}{2-1}=4095$, 同理, 後一括號中之數式之值爲 $\dfrac{3^9-1}{3-1}=9841$, 因而其乘積爲 4095×9841, 卽爲 **40298895**, 是乃所求之和也.

46. 求 12564 之全部約數之和.

解 因 $12564=2^2\cdot3^2\cdot349$, 由 45 題, 可知其全部約數之和爲 $(1+2+2^2)\times(1+3+3^2)\times(1+349)=7\times13\times350=$ **31850**.

47. 設 12345△◉ 得爲 234 所整除, 問

△◎應爲何二數字?

解 以 234 除 12345△◎ 所得之商，當不小於以 234 除 1234500 而得之商，亦當不大於以 234 除 1234599 所得之商，其理甚明，而以 1234500 爲 234 除時，得商 5275，剩餘 150，又以 1234599 爲 234 除時，得商 5276，剩餘 15，故若設 12345△◎ 能爲 234 所整除，其商應爲 5276，而被除數應爲 $1234599-15=1234584$，因知設 △◎ 爲 **84** 卽可.

48. 6＊＊9 一數，若得爲 257 所整除時，其商如何?

解 257 之 20 倍爲 5140，其 30 倍爲 7710，是以所求之商必在 20 與 30 之間，卽商之十位數字爲 2. 又因除數與商之積等於被除數，則除數之個位數字 7 與商之個位數字之相乘積中之個位數字非等於 9 不可. 然與 7 相乘而得之積之個位數爲 9 者，僅 7 一數，故知所求之商爲 **27**.

49. 15＊＊＊6 爲 36 整除時，其所得之商須爲最大之整數，問 ＊＊＊ 應書何三數字以代始可?

解 **1.** 得爲 36 所整除之數，亦能爲 9 及 4 所整除，因得爲 9 所整除之數，其列位數字之和亦必爲 9 所能整除，故始自最大數字 159996，順次書列得爲 9 所整除之數，有 159966，159876，等；而得爲 4 所整除之數，其末二位之數亦應得爲 4 所整除者，然因 66 不能爲 4 所整除，76 則能爲 4 所整除，是故適合條件之諸數中，最大者卽爲 **159876**，是以所求之數字爲 **987**.

解 **2.** 15＊＊＊6 當不大於 159996，今設以 36 除 159996，則得商 4444，剩餘 12. 而一數乘 36 後，所得之積之個位數字爲 6 者，其個位數字應爲 1 或 6，故以 36 除 15＊＊＊6 後所得之商，既應小於 4444，且其個位數字應爲 1 或 6，是知其商應在 4441，4436 等數之中，而最大者，乃爲 4441，故可知 15＊＊＊6 應爲 $4441\times36=159876$，卽 ＊＊＊ 爲 **987** 也.

50. 某學生以 467 乘某數，得積 1925817，然此積中之 9 與 7 二數字乃屬錯誤者，問正確之數字爲何?

解 由誤得之積 1925817 減第六位之若干倍，加或減第一位之若干倍，而令所得之數爲 467 之倍數卽可. 今 $1925817\div467$ 之剩餘 $=376$，$100000\div467$ 之剩餘 $=62$，而 $376=62\times6+4$. 故 $1925817-600000-4=1325813=467$ 之倍數，故 9 及 7 俱應變爲 **3**.

51. 自 87 減去某數之 5 倍，其餘數等於自 27 減去某數之 2 倍時所得餘數之 4 倍，求某數.

解 自 27 減去某數 2 倍所得之餘數之 4 倍，等於自 27 之 4 倍減去某數之 2 倍之 4 倍所得之餘數，卽等於自 108 減去某數 8 倍時所得之餘數. 故自 87 減去某數 5 倍所得之餘數與自 108 減去某數 8 倍所得之餘數相等. 由是依次反對計算之，87 等於自 108 減去某數之 8 倍所得之餘數，加某數之 5 倍所得之和，亦卽等於自 108 減去某數之 3 倍，故 $108-87=21$ 等於某數之 3 倍，故某數爲 $21\div3=\mathbf{7}$.

F. 一位數

52. 末位數爲 7 之數字在整數 2548 與 5873 間,共有幾何?

解 末位數字爲 7 之整數,在連續整數 10 個之中,祇占 1 個,故所求之數乃爲以 2548 與 5873 間整數之數目,5873−2548−1,即 3324,爲 10 所除時所得之整數商,即 **332**.

G. 二位數

53. 有二位數,其兩數字之乘積爲 63,問本數爲何?

解 使 63 分解爲一位數之兩因數,祇可得 7 與 9 一組,故所求之數爲 **97** 或 **79**.

54. 有二位數,其十位數字爲個位數字之三倍,今自本數減去 7,則兩數字可相等,本數爲何?

解 由題意,可知自個位數字減去7,必不足夠,是故自本數減去 7 時,十位數字必須減 1,而個位數字可得增 3,於是兩數字相等,是以十位數字與個位數字之差爲 1+3,即 4.故個位數字爲 $4\div(3-1)=2$,從而十位數字爲 $2\times3=6$,是以所求之數即爲 **62**.

55. 有二位數,其十位數字較個位數字多 5,若將此數於算盤上表示,則須用盤珠九粒,問此數爲何?

解 十位數字較個位數字多 5,故個位數字必小於 5,十位數字必大於 5,故將此數於算盤上表示,則用梁上之珠須 1 粒,梁下之珠須 9−1 粒,是以本數之數字之和爲 $(9-1)+5=13$,從而可求得十位數字爲 $\frac{13+5}{2}=9$,個位數字爲 $\frac{13-5}{2}=4$,故所求之數爲 **94**.

56. 有二位數,其平方根,立方根俱爲整數,求此數.

解 二位數中,爲完全立方數者,祇有 64 與 27.而 27 非屬完全平方數,64 則屬之,故所求之數爲 **64**.

57. 有二位之偶數,其兩位之數字均相等,設自本數減去 12 之倍數,其餘數之列位數字之和爲 6,求本數.

解 本數爲偶數,故爲 2 之倍數,其兩數字相等,故又爲 11 之倍數.而自本數減去 12 之倍數,即 3 之倍數後,其餘數之列位數字之和爲 6,則餘數仍爲 3 之倍數,故本數又爲 3 之倍數.因而本數爲 $2\times3\times11=66$ 之倍數,然二位數中係 66 之倍數者,除 66 外更無他數,故本數爲 **66**.

58. 有二位數,自其平方減去其轉位數之平方,則得餘數 5940,求本數.

解 二位數之平方,等於其十位數字之平方之 100 倍,個位數字之平方與列位數字之積之 20 倍之和.於轉位數,亦復有同樣之關係.故此二數之平方差,即爲十位數字平方之 99 倍減去個位數字平方之 99 倍所得之差.因知 5940 爲各位數字平方差之 99 倍,故其平方差爲 $5940\div99=60$.然因各位數字均不大於 10,且十位數字之平方必大於 60,故十位數字爲 8 或 9.但 $9^2-60=21$,非爲完全平方數,故 9 不適用,若爲 8 時,則 $\sqrt{(8^2-60)}=2$,故知十位數字爲 8,個位數字爲 2,即所求之數

爲 **82**.

59. 在二位數中，其平方之十位數字爲 9 者，共有四種. 問各數爲何?

解 個位數字之平方未滿 10 者，則不適合所設條件，其理易明，因若設個位數字之平方未滿 10 時，則平方數之十位數字卽爲原數之列數字之積之 2 倍之末位數字，是乃偶數也，故個位數字不能爲 0, 1, 2, 3. 又 $5^2=25$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, 故個位數字又不能爲 5, 7, 8, 9, 以其平方之十位數字爲偶數故. 次，若設個位數字爲 4, 則 $4^2=16$, 故列數字之積之 2 倍之末位非爲 $9-1=8$ 不可，因知十位數字之 4×2 卽 8 倍之末位須爲 8, 故十位數字爲 1 或 6, 卽 14, 64 二數適合條件. 又若設個位數字爲 6, 則 $6^2=36$, 故十位數字之 6×2, 卽 12 倍之末位非爲 $9-3=6$ 不可，因知十位數爲 3 或 8. 故 36 及 86 又適合條件. 是知適合所設條件之數，限於 **14, 64, 36, 86** 四種.

H. 三 位 數

60. 問三位數共有幾個?

解 **1.** 三位數中最小者爲 100, 最大者爲 999, 是故可知所求之個數，爲自 100 至 999 之數目之個數，卽爲 $999-(100-1)=900$.

解 **2.** 一位，二位，三位之數，其總數共 999 個；一位，二位之數之總數已明知爲 99 個；故三位數之數目共 $999-99$, 卽 900 個.

61. 在三位數中，爲 17 之奇數倍者共幾個?

解 在三位數中，爲 17 之奇數倍者，以 $17\times7=119$ 爲最小，$17\times57=969$ 爲最大. 故 17 乘 7, 9, 11, 13, ……, 57 後所得之 17 之奇數倍均爲三位數，故所求之數，卽自 7 至 57 之奇數之數，卽爲 $(57-7)\div2+1$ $=$**26**.

62. 有三位數，本數爲 37 之倍數，其轉位數爲 3 之倍數，問本數爲何?

解 本數爲 37 之倍數，同時又爲 3 之倍數，因將 3 之倍數之數字位置更改排列所得之數，仍爲 3 之倍數，以其數字和仍爲 3 之倍數也，故本數爲 $37\times3=111$ 之倍數中之爲三位數者之一，卽 **111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999.**

63. 有三位數，其百位數字與以下之二位數字之和之比爲 2:3, 又下二位之數乘以十位數字，得積 270, 問本數爲何?

解 設將 270 分解爲一位與二位之數之因數，則 $270=3\times90=5\times54=6\times45=9\times30$, 故所求之下二位數爲 54. 而因 $5+4$ 與百位數字之比爲 3:2, 則 $3:2=5+4:x$, 故 $x=6$, 因知所求之數爲 **654**.

64. 任意之三位數，乘以 7 去其千位以上之數字，其餘數乘以 11 再去其千位以上之數字，復以 13 乘其餘數而去其千位以上之數字，則仍得原數，其證如何?

解 因 $7\times11\times13=1001$, 三位數先以 7 乘，次以 11 乘，復以 13 乘，其結果與以 1001 乘相等. 然千位之 1 乘三位數所得之部分積之末三位數均爲零，故以 1001 乘後，末尾三位之數仍得原數，其理甚明.