测绘科技专著出版基金资助
CEHUI KEJI ZHUANZHU CHUBAN JIJIN ZIZHU

INDUSTRIAL SURVEYING FITTING

工业测量拟合

王解先 季凯敏 著

测绘出版社

测绘科技专著出版基金资助

工业测量拟合

Industrial Surveying Fitting

王解先　季凯敏　著

测绘出版社

·北京·

内容简介

本书作者通过大量的工业测量实践，总结出了一些规律，从线性代数和解析几何的角度，论述了工业测量拟合方法。全书共分7章，第1章归纳总结了学习本书所需的线性代数基础知识；第2章简要讲述了测量平差基础理论；第3章讲述了设备表面点坐标的获取方法，不同测站观测数据的精确归算，全站仪精确观测数据的三维平差；第4章讲述了直线和平面拟合，包括平面和空间直线，长方形和长方体；第5章讲述了平面二次曲线拟合，包括对圆、椭圆等各种二次曲线的拟合方法；第6章讲述了二次曲面拟合，包括对球、椭球等各种特殊二次曲面的拟合；第7章以隧道盾构施工中的测量数据处理为例讲述本书模型的实际应用。

阅读本书需要较好的数学和测绘基础知识。本书适用于大地测量学与测绘工程专业的研究生和从事工业测量数据处理者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工业测量拟合/王解先，季凯敏著. —北京：测绘出版社，2008.12

ISBN 978-7-5030-1893-0

Ⅰ.工…　Ⅱ.①王…②季…　Ⅲ.工业仪表—工程测量—拟合　Ⅳ.TH7

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第187657号

责任编辑	田　力	封面设计	李　伟
出版发行	测绘出版社		
社　　址	北京西城区复外三里河路50号	邮政编码	100045
电　　话	010—68512386　68531609	网　　址	www.sinomaps.com
印　　刷	北京市通州次渠印刷厂	经　　销	新华书店
成品规格	169mm×239mm	印　　张	8.5
字　　数	200千字		
版　　次	2008年12月第1版	印　　次	2008年12月第1次印刷
印　　数	0001—2000	定　　价	24.00元

书　　号　ISBN 978-7-5030-1893-0

前　言

一些大型工业设备经过一段时间的使用，可能产生变形，因此需要对其表面点进行测量，计算其变形量，然后进行校正。还有一些设备需要通过测量表面点来确定其数学特征。在数据处理过程中，我们发现，针对一些特殊的项目，可以采取一些特殊的方法来实现，而目前对此类问题缺乏系统性的解决方法。

在数学描述中，线和面通常表示在正放的坐标系中，而且不顾及误差，从而可以用相对简单通用的函数表示。实际测量时，测量坐标系只能以水准面为基准。如一个椭球状设备，在空间其 3 个主轴的方向是任意的，只能通过对其表面离散点三维坐标的测量，在带有误差的情况下，求出椭球的 3 个主轴的指向和大小。本书通过大量的工业测量实践，总结出了一些规律，从线形代数和解析几何的角度，论述了工业测量拟合方法。

本书第 1 章归纳总结了学习本书所需的线性代数基础知识，介绍了利用雅可比数值方法处理矩阵的理论；第 2 章简要讲述了测量平差基础理论，主要包括了间接平差的数据处理流程，法方程求逆的方法等；第 3 章讲述了设备表面点坐标的获取方法，不同测站观测数据的精确归算，以及利用全站仪精确观测数据，将平面与高程一起计算的整体三维平差方法；第 4 章讲述了直线和平面拟合，包括平面和空间直线，长方形和长方体；第 5 章讲述了平面二次曲线拟合，包括圆、椭圆等各种二次曲线的拟合方法，总结了一般二次曲线拟合的多种模型和加条件式的方法；第 6 章讲述了二次曲面拟合，包括对球、椭球等各种特殊二次曲面的拟合，总结了一般二次曲面拟合的不同模型，根据特定的曲面条件拟合特定曲面的方法；第 7 章以隧道盾构施工中的测量数据处理为例讲述本书模型的实际应用，包括了盾构姿态的控制、管片选型的流程以及隧道断面检测的方法。

书中的拟合方法从线形代数和解析几何的角度出发，具有独特性，书中讲述的三维平差方法和不同测站坐标归算方法也具有独特性。有些文献提到过线和面的测量拟合方法，但未见到过同类书籍。

阅读本书需要较好的数学和测绘基础知识，适用于大地测量学与测绘工程专业的研究生和从事工业测量数据处理者阅读。

本书的出版得到测绘科技专著出版基金资助，测绘出版社为本书的编辑出版做了大量工作，在此深表感谢。

作　者

2008 年 6 月

目　　录

Contents

第1章　线性代数基础

§1.1　矩阵的特征根

1.1.1 矩阵与行列式

$m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）按确定的位置排成的矩形阵列，称为 $m\times n$ 阶矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

式中，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列的元素，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也表示成 $\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}}$，也可记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$。

$n\times n$ 阶矩阵称为方阵，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元。

零矩阵：所有元素均为零的矩阵。

对角矩阵：非对角元均为零的方阵。

单位矩阵：对角元均为 1，非对角元均为零的方阵，一般记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$。

矢量组线性相关：对于 n 维空间的一组矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，若存在一组不全为零的数 k_i（$i=1,2,\cdots,n$），使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n=0 \tag{1-2}$$

成立，则称这组矢量线性相关，否则称这组矢量线性无关。

①矢量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性相关充要条件是，至少其中一个矢量可用其他矢量线性组合来表示。

②包含零矢量的矢量组一定线性相关。

③矢量组中若有两个矢量相等，则矢量组一定线性相关。

④若矢量组线性相关，则增加若干个矢量仍然线性相关。若矢量组线性无关，则减去若干个矢量仍然线性无关。

⑤若矢量组线性无关，增加一个矢量后线性相关，则增加的矢量可表示为矢量组的线性组合。

矩阵任一行元素构成的 n 维矢量称为行矢量

$$\boldsymbol{a}^i=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{in})(i=1,2,\cdots,m) \tag{1-3}$$

矩阵任一列元素构成的 m 维矢量称为列矢量

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{1j} \quad a_{2j} \quad \cdots \quad a_{mj})^{\mathrm{T}} \ (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-4}$$

矩阵的秩:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列矢量中有 r 个线性无关,而所有大于 r 的列矢量组都线性相关,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r ,矩阵的行秩与列秩一定相等。

n 阶行列式:n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式记作 $|\boldsymbol{A}|$ 、$\det\boldsymbol{A}$ 或 $\det(a_{ij})$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \tag{1-5}$$

式中,$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是将序列 $1,2,\cdots,n$ 的元素次序交换 k 次所得到的一个序列,$\sum$ 表示对 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 取遍 $1,2,\cdots,n$ 的一切排列求和。

矩阵相等:若两个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的每个对应元素相等,则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 。

矩阵相加:两个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相加为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$,则对应元素 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,维数不同的矩阵不能相加。

矩阵数乘:一个数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘,即 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素与 k 相乘。

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、0(所有元素均为零的矩阵) 均为 $m \times n$ 阶矩阵,k、l 为数,则矩阵有下列线性运算:

① $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$;

② $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$;

③ $\boldsymbol{A} + 0 = \boldsymbol{A}$;

④ $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = 0$;

⑤ $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;

⑥ $k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$;

⑦ $(k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$;

⑧ $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$;

⑨ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$ 。

矩阵乘积:设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}$、$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times n}$,$c_{ij} = \sum_1^s a_{ik} b_{kj}$,且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时,才能相乘。

设 k 为一个数,矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 使以下各式能相乘,则

① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

② $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$;

③ $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$ 。

对于方阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}$，但 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$、$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$ 。

矩阵转置:把一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行依次改为列,所得到的 $n\times m$ 的矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,矩阵转置有以下性质:

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

③ $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

④ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 。

对称矩阵:若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即 $a_{ij}=a_{ji}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

矩阵的导数:对矩阵求导,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}}{\mathrm{d}t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}a_{m1}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{m2}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{mn}}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix} \tag{1-6}$$

矩阵的积分:对矩阵积分,得

$$\int\boldsymbol{A}\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int a_{11}\mathrm{d}t & \int a_{12}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1n}\mathrm{d}t\\ \int a_{21}\mathrm{d}t & \int a_{22}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{2n}\mathrm{d}t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \int a_{m1}\mathrm{d}t & \int a_{m2}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{mn}\mathrm{d}t\end{pmatrix} \tag{1-7}$$

矢量对矢量的导数:矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)^{\mathrm{T}}$ 对矢量 $\boldsymbol{b}=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)^{\mathrm{T}}$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}b_1} & \frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}b_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}b_n}\\ \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}b_1} & \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}b_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}b_1} & \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}b_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}b_n}\end{pmatrix} \tag{1-8}$$

矩阵分块:将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素分成小块(子阵 $\boldsymbol{B}_{11}$ 、$\boldsymbol{B}_{12}$ 、$\boldsymbol{B}_{21}$ 、$\boldsymbol{B}_{22}$),则有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{21} & \cdots & B_{22} \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

式中

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{23} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_{21}=(a_{31} \quad a_{32});$$

$$\boldsymbol{B}_{21}=(a_{33})。$$

矩阵求逆：对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵（非奇异矩阵，满秩矩阵），$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 。

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的性质：

① $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ ；

② $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ ；

③ $\det \boldsymbol{A}^{-1}=(\det \boldsymbol{A})^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$，$(a\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{a}\boldsymbol{A}^{-1}(a\neq 0)$，$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ 。

正交矩阵：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方阵。

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵，则

① $\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{AB}$ 仍然是正交矩阵；

② $\det\boldsymbol{A}=\pm 1$ ；

③ $\sum_k a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$，$\sum_k a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$。

1.1.2 矩阵的特征根

对 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-10}$$

和 n 维非零列矢量

$$\boldsymbol{a}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^{\mathrm{T}} \tag{1-11}$$

如果有一个数 λ，使得

$$\boldsymbol{A}\lambda = \lambda \boldsymbol{a}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根(特征值),$\boldsymbol{a}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 所对应的特征矢量。

$\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵定义为

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \tag{1-12}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式定义为

$$\varphi(\lambda) = |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| \tag{1-13}$$

方程 $\varphi(\lambda)=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。

矩阵的迹：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角元之和

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum\nolimits_1^n a_{ii} \tag{1-14}$$

特征方程 $\varphi(\lambda)=0$ 的 n 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,集合 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱,记作矩阵 ch$\boldsymbol{A}$ 。

线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{a}=0$ 的非零解 $\boldsymbol{a}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 对应的特征矢量。

特征值和特征矢量的性质：

①若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,则 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$ (k 为整数);$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$。

② n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和等于其迹,特征值之积等于其行列式

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为零。

③若 λ_i 是特征方程的 k 重根,则对应于 λ_i 的线性无关特征矢量的个数不大于 k 。若 λ_i 是特征方程的单根,则对应于 λ_i 的线性无关特征矢量只有一个。

④对应于不同特征值的特征矢量线性无关。

⑤实对称矩阵的特征值都是实数,并且有 n 个线性无关(且正交)的特征矢量。

⑥ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同。

1.1.3 代数方程的根

矩阵的特征根满足特征多项式等于零。特征多项式展开后,形式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1-15}$$

特征根满足

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1-16}$$

①二次方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根

$$\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-q} \tag{1-17}$$

②三次方程 $\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0$ 的根,令 $\lambda=x-\dfrac{b}{3}$,方程变为

$$y^3+py+q=0 \tag{1-18}$$

由卡尔丹公式,实根为

$$y_1=\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{1-19}$$

③四次方程 $\lambda^4+b\lambda^3+c\lambda^2+d\lambda+e=0$ 的根

其根与下面两个二次方程的根相同

$$\begin{cases}\lambda^2+(b+\sqrt{8y+b^2-4c})\dfrac{\lambda}{2}+\left(y+\dfrac{by-d}{\sqrt{8y+b^2-4c}}\right)=0\\[2ex]\lambda^2+(b-\sqrt{8y+b^2-4c})\dfrac{\lambda}{2}+\left(y-\dfrac{by-d}{\sqrt{8y+b^2-4c}}\right)=0\end{cases} \tag{1-20}$$

式中,y 是 $8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0$ 的实根。

阿贝尔定理证明五次及以上方程没有代数解。五次以上方程可以采用数值法求解和降阶,最常用的是二分法:

先找到 a 和 b,满足 $f(a)f(b)<0$,取中点$\dfrac{a+b}{2}$。若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$,则根为 $\lambda=\dfrac{a+b}{2}$;若 $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$,则取 $a=a,b=\dfrac{a+b}{2}$;若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)f(b)<0$,则取 $a=\dfrac{a+b}{2},b=b$。重复以上过程,直至 $|a-b|<\varepsilon$,根为 $\lambda=\dfrac{a+b}{2}$。

§1.2 雅可比数值方法求特征值

1.2.1 雅可比(Jacobi)数值方法求特征值的方法

设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则必存在一正交矩阵 $\boldsymbol{R}$,使得

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{1-21}$$

正交阵 $\boldsymbol{R}$ 可以用一系列旋转矩阵的积来逼近

$$\boldsymbol{R}=\prod\boldsymbol{U}_{pq} \tag{1-22}$$

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的非对角元中，对处于位置 $(p,q)(p \neq q)$ 的元素

$$\frac{1}{\tan(2\theta)} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \zeta$$

$$T = \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta + \sqrt{1+\zeta^2}}, & \zeta \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{\zeta - \sqrt{1+\zeta^2}}, & \zeta < 0, \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$$

定义旋转矩阵

$$\boldsymbol{U}_{pq} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (p) \\ \\ (q) \\ \\ \\ \end{array} \tag{1-23}$$

$\boldsymbol{U}_{pq}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{pq}$ 就可把 (p,q) 位置上的元素消去，而使对角元数值增大。

雅可比数值方法迭代步骤：

在第 k 次计算时，在矩阵 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 的非对角元中找出最大的一个，若处于 p 行 q 列，则

$$\boldsymbol{U}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta^{(k)} & & \sin\theta^{(k)} & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & -\sin\theta^{(k)} & & \cos\theta^{(k)} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (p) \\ \\ (q) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{(k+1)} = (\boldsymbol{U}^{(k)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{U}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{R}^{(k+1)} = \boldsymbol{R}^{(k)}\boldsymbol{U}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{R}^{(0)} = \boldsymbol{I}$$

若计算至 m 次时，非对角元中最大的元素 $|a_{pq}| < \varepsilon$，这时

$$\boldsymbol{R} \approx \boldsymbol{R}^{(m)}$$

$$\lambda_i \approx \boldsymbol{A}^{(m+1)}(i,i)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$$

正交矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的 i 列就是特征值 λ_i 对应的特征矢量，交换 $\boldsymbol{R}$ 的列，可以使得特征值 $\boldsymbol{\Lambda}$ 元素按特征值大小排列。

1.2.2 矩阵数值法求逆

矩阵求逆有多种方法，本节介绍雅可比数值求逆方法，它对于性能不好的矩阵求逆有好处，而本书后面部分涉及的求逆矩阵往往性能不好。

对 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，采用雅可比数值法可求得正交矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和特征值 $\boldsymbol{\Lambda}$，并调整 $\boldsymbol{R}$ 的列使得 $\boldsymbol{\Lambda}$ 按绝对值从大至小排列。

①若不存在零特征值，则有

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

②若有 m 个零特征值，则说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-m$，其秩亏数为 m。在 $\boldsymbol{A}$ 中全组合取出 $n-m$ 阶子阵 $\boldsymbol{A}'$，求其相应的正交矩阵 $\boldsymbol{R}'$ 和特征值 $\boldsymbol{\Lambda}'$，直至找到 $\boldsymbol{\Lambda}'$ 中不含零特征值。这时

$$\boldsymbol{A}'^{-1} = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{\Lambda}'^{-1}\boldsymbol{R}'^{\mathrm{T}} \tag{1-24}$$

1.2.3 算例

对于矩阵，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

按以上方法，求得特征向量矩阵为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.801\,967\,324\,609\,297 & 0.043\,378\,598\,571\,724\,4 & -0.595\,790\,825\,244\,028 \\ -0.350\,145\,189\,010\,854 & 0.842\,200\,747\,134\,64 & -0.409\,995\,424\,533\,503 \\ 0.483\,990\,451\,219\,401 & 0.537\,416\,224\,831\,189 & 0.690\,606\,287\,559\,441 \end{bmatrix}$$

特征值为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 4.712\,768 & 0 & 0 \\ 0 & -2.725\,644 & 0 \\ 0 & 0 & 14.012\,875 \end{bmatrix}$$

如果将特征根从大到小排列，则

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}14.012\,875 & 0 & 0\\ 0 & 4.712\,768 & 0\\ 0 & 0 & -2.725\,644\end{pmatrix}$$

相应的特征向量矩阵变为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}-0.595\,790\,825\,244\,028 & 0.801\,967\,324\,609\,297 & 0.043\,378\,598\,571\,724\,4\\ -0.409\,995\,424\,533\,503 & -0.350\,145\,189\,010\,854 & 0.842\,200\,747\,134\,64\\ 0.690\,606\,287\,559\,441 & 0.483\,990\,451\,219\,401 & 0.537\,416\,224\,831\,189\end{pmatrix}$$