高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

（二）

第二卷　常微分方程与积分方程

上　册

（初稿）

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

(二)

第二卷 常微分方程与积分方程

上册

(初稿)

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等数学(二)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体編成的两部主要基础課程的新教材中的一部。它是把以往的方程式論，綫代数，常微分方程，积分方程和数学物理方程等五門課程中有用的內容和若干新添的材料結合起来的一个有机整体。全书共分三卷：高等代数，常微分方程与积分方程，数学物理方程。第二卷常微分方程与积分方程包括綫性微分方程与差分方程，綫性微分方程組，微分方程的解的存在与唯一性，对称型方程組与一阶綫性偏微分方程，一阶非綫性偏微分方程，包括理論大意，常微分方程的数值解法，二阶方程的級数解法与特殊函数，积分方程等九章。前五章为上册，后四章为下册。上册主要是講各种可积分的方程以及解的存在性，唯一性和可微性。振动理論貫穿在整个这一卷的前后各章之中，俾使讀者能由此看出生产实踐如何向数学提出問題，以及理論的逐步提高如何回过来更好地解决实际問題。

本书可作为綜合大学数学，計算数学，力学等专业的教材。其他如物理，天文，气象等专业以及工科大学等均可参考。

简装本說明

目前 850×1168 公厘規格紙張較少，本書暫以 787×1092公厘規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

高 等 数 学

(二)

第二卷（上册） 常微分方程与积分方程

（初稿）

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

工人日报印書厂印装

新华书店科技发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·922 开本 787×1092 1/32 印張 8

字数 190,000 印数 00001—15,000 定价（6）¥0.65

1961 年 1 月第1版 1961 年 1 月北京第1次印刷

目　录

前 言

在大学的第一年中讀者已經学过两門数学基础課，第一門数学課“高等数学(一)”的主要內容是一元和多元函数的微积分学，它有下面我們已經学习过的两个主要的問題：

問題Ⅰ 已知变量 y 是諸变量 x_i 的函数，要找出 y 关于諸 x_i 的各阶导数，然后利用这些导数再来进一步研究原来的函数关系。

問題Ⅱ 已知变量 y 关于变量 x 的导数，并且后者可以表示为 x 的函数，問 y 是 x 的什么样的函数？

若用以前学过的一点点微分方程的术語来說，就是要解一个簡单的一阶微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

我們早已知道，問題Ⅱ要比問題Ⅰ困难一些。第二門数学課“高等数学(二)”所研究的主要問題之一是：

問題Ⅲ 已知 n 个量之間所滿足的 n 个代数式，要求确定这些量；已知 n 个量之間所滿足的少于 n 个的关系式，要研究这些量之間的相互依賴关系[①]。

从現在开始本課程所要研究的問題可以說是問題Ⅱ与Ⅲ的进一步提高。也就是：

問題Ⅳ 已知諸自变量 x_i，諸函数 y_j，以及后者关于前者的偏导数 $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k}$, ……之間所滿足的一些关系式，要由此来研究 y_j 与 x_i 之間的相互依賴关系。

---

① 后半部也是解析几何与微分学的主要对象之一。

容易看出，問題IV比問題II又要困难得多。首先，只要这些关系式略略复杂一些，就常常不能象(1)式那样把导数解出来表示为 x_i 与 y_j 的显函数。例如要由方程

$$y-x\frac{dy}{dx}+\frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=0 \tag{2}$$

解出$\frac{dy}{dx}$就不可能，因为消去根号以后得到$\frac{dy}{dx}$的五次方程，它的系数是 x, y 的函数。退一步說，即使能够解出$\frac{dy}{dx}$表示为 x, y 的函数：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3}$$

一般而論，(2)也不是象(1)一样可以分离变量，或者属于我們会解的齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

或綫性方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \tag{5}$$

的类型。例如方程

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{6}$$

(称为黎卡提(Riccati)方程)除了 p, q, r 是非常特殊的函数以外，早已在1841年被法国数学家柳微尔(Liouville)証明为不可积分的了，虽然它不过比(5)多了一項。以上所說的还是限于一个自变量 x 和一个未知函数 y 的最簡单情况，可以想象到，当自变量或未知函数多于一个时，問題只会更加复杂起来。

另一方面，若把問題IV和問題III比較，可以看出它也是更深入了一步。因为問題III的目的是决定一些常量，或是决定一部分变量为另一部分变量的，完全确定的函数。而在問題IV中，由于

出現了导数，以致在进行积分以后这种函数关系也不可能完全确定，而是带有某种任意性了。实际上，如我們所已知道的，方程(1),(4),(5)的解都具有

$$y=g(x,C) \tag{7}$$

的形式，其中C是任意常数，而(7)称为微分方程的通解。給C以各种不同的值，就可以得到方程的一切的解。以后可以証明，方程(3)，或更一般的方程

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{8}$$

(称为一阶常微分方程)，都具有形如(7)的通解。推而广之，可以証明n阶常微分方程

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0, \tag{9}$$

或是含一个自变量，n个未知函数的一阶常微分方程組：

$$F_i\left(x,y_1,\cdots,y_n,\frac{dy_1}{dx},\cdots,\frac{dy_n}{dx}\right)=0,\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

的通解都含有n个的任意常数。至于自变量多于一个的方程(称为偏微分方程)，則其解的任意性就更大了。例如二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \tag{11}$$

的解显然是

$$z=f(x)+g(y), \tag{12}$$

其中f是x的任意連續可微函数(可以包含随便几个任意常数)，g是y的任意連續可微函数。

由此可見，在問題 IV 中情况要复杂得多。当然，一开始我們总希望能求到代表解的最一般形式的通解，再在其中选择更适合具体需要的特解，但是經过数学工作者的努力探索研究，在一百多年以前就已經知道可以求得通解的常微分方程是比較少見的。除

了我們已經知道的(1),(4),(5)等类型的一阶方程以外,还有一些特殊类型的方程(8),(9)与(10)(它們的解法将在本书第三章中講到)。此外就是綫性常系数高阶方程:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x) \tag{13}$$

(其中 a_i 是常数)和綫性常系数方程組:

$$\frac{dy_i}{dx}=a_{i_1}y_1+a_{i_2}y_2+\cdots+a_{in}y_n+f_i(x),\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

(实际上,(13)可以化为(14)的形状)。这一些我們将在第一,二两章中講到。至于变系数綫性方程(即当(13)中的 a_i 或(14)中的 a_{ij} 是 x 的函数时),那就只能討論它的解的性質和通解的結构,因为在一般情况通解还是求不出来的。若再談到偏微分方程的話,情况就更复杂了,一般而論,連通解的定义也是不明确的;我們只能求到滿足某些附加条件的特解,而且只有在一些极其簡单的情况下才能得到特解的解析表达式。

根据以上所說的,就可以知道在微分方程課中我們要做的事情有以下几件:

1) 对于某些可以求通解的方程我們要找出它的通解来;如果通解不一定求得出,但能根据方程的形状把通解的性質先研究清楚,那也是值得做的事情。

2) 对于可以証明通解存在但不一定是可积分的方程,我們要想出其他的方法来研究它的解的一般性質,或是求其滿足一定条件的特解。

3) 对于通解的定义不明确的方程,我們应重新考慮如何根据客观实际适当的提出問題,然后設法加以解决。

关于第一个問題上面已經提到,这是第一,二两章和第三章一部分的主要研究对象。关于第二个問題我們首先将在第三章 §2 中

証明几个常微分方程的解的存在与唯一性定理，以及由特解选通解的方法；然后在第六，七，八三章中講述研究这种方程的定性方法，数值方法和解析方法。至于第三个問題則是第三卷数学物理方程的研究对象，在那里我們将对物理学和力学中經常遇到的若干类型的偏微分方程提出适当的定解問題，研究它的解法以及相应的物理意义。

看到这里，讀者也許会发生这样的疑問：旣然問題Ⅳ一般講来是这样的困难，为什么我們一开始不把問題提成問題Ⅲ的形式呢？假如能办到这一点，解决起来不就更容易些了嗎？要解答这个疑問，讀者只要回头再看看高等数学(一)中微分方程部分以及本課程第二，三两卷中許多联系实际的問題就清楚了。出現于实际問題中并要求我們把它找出来的函数关系往往是比較隐晦的，复杂的。在絕大多数情况下，我們只能通过物理学，力学和几何学上的定律或定理，近似地得出当一些变量作极微小的改变时，另一些变量的变化規律，因此要用数学的語言来描写这些变化規律就非用导数和积分不可，从而所得出的原始关系式也就不可避免地一定要出現微分或积分方程了。正因为这样，所以讀者在学习微分方程的时候不但要能掌握解微分方程問題的一切重要方法，同时还应注意如何由实际問題中把微分方程建立起来，以及微分方程的理論如何反映客观情况。上述二者任缺其一都是不可以的。

为了更好地説明生产实践，工程技术如何向数学提出問題，以及数学理論的提高与深入如何回过头来一次比一次更完善的解决实际問題，在这一卷以及下一卷中我們特别着重地研究了工程上和无綫电电子学中所常遇見的振动問題。从第一章第一节的一个自由度的振动系統开始，在第二章第四节講了多个自由度的振动系統，第三章第一节講了多維震蕩器方程和单摆方程，第四章第三节講了广义守恒系統，第六章第三节講了一个自由度的非綫性固

有振动的位速軌綫图的作法，范德坡方程存在极限环的証明，第七章第三节講了二阶含小参数的非綫性方程的近似解法，第九章第一节和第五节講了彈性体振动問題的积分方程的建立和求解，第七节講了非綫性积分方程在非綫性振动理論中的应用，最后在第三卷第二章講了用富里哀方法解彈性体的振动問題。在編写教材时主观上希望尽可能做到前后密切联系，使讀者对这一問題的处理方法以及与之有关的数学理論能获得虽然是初步的，但却是比較全面的理解。当然，微分方程联系实际的方面非常多，振动問題只是其中之一而已；并且即使在这一个方面我們也还是初次嘗試，对于理論如何很好的联系实际一定是做得很不够的。但是我們深信这是一条值得嘗試去走的道路，并且在以后修訂本书时将在这方面继續进行努力。

—

第一章 綫性微分方程与差分方程

§1. 一个自由度的振动系統

1.1 引言 在这一章里我們将要研究一种最簡单的、但也是最常用的微分方程，就是 n 阶綫性微分方程。它的形状是：

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=F(x)$$

其中包含未知函数 y 的最高阶导数是 n 阶，并且对于 y 及其各阶导数来說都是綫性的。关于这种方程的解的性质和結构有比較完整的理論。特别，当系数 $a_i(x)$ 都是常数时，方程的解法也非常簡单而方便。在高等数学(一)第一篇第一章一元函数的微积分学中我們已經研究过綫性方程中最簡单的，即一阶綫性非齐次方程

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=q(t),$$

并已証明它的通解是

$$y=e^{-\int p(t)dt}\left[\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt+C\right]=Y+Ce^{-\int p(t)dt},$$

其中 Y 是原方程的一个特解，而 $Ce^{-\int p(t)dt}$ 是对应的齐次方程

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=0$$

的通解。不难看出，这一和綫性代数方程組理論中完全类似的性质并不限于对上面所写的这个具体的特解 Y 才成立。就是說，一般只要能用任何方法找到非齐次綫性方程的一个特解，那末它的通解就可以由这个特解加上对应的齐次方程的通解而得到。对于 n 阶綫性微分方程这个性质也是成立的，我們将在 §2 中証明它。

关于常系数綫性方程在一元函数的微积分学中已經講过二阶齐次方程的解法。在这一节里我們将要用一个自由度的振动系統

导出一般的二阶常系数方程，再根据它的解的性質回头来解释振动系統在各种不同情况下所出現的現象，从而使我們能够初步看到微分方程的理論和客观現实之間的联系是如何密切。

自然，在沒有講过微分方程的通解的正确定义，解的存在与唯一性定理和綫性方程的一般理論以前，我們的叙述在有些地方总免不了有些不严密；但理論上的缺陷在不久的将来都会得到补足，目前的重点不在于理論的严密性与系統性，而在于理論如何反映客观实际。为了这个目的，也为了使讀者在微分方程課的一开始就能对于理論联系实际得到一个比較深刻的印象，我們認为把这一节放在本章的开头講比放在本章的最后講更为恰当些。

1.2 自由振动 在力学、电学、光学、声学等部門中有許多看起来似乎是迥然不同的現象，但它們却可以用形式完全相同的微分方程来描述，这些現象在力学上通常表現为振动或摆动的形式，因此我們就总称之为振动。如果这个振动系統的状态只需用一个变量 x 便能够表明的話，就称它为具有一个自由度的振动系統；而 x 称为广义坐标。当振动現象只依靠系統本身的能量来維持，并且也沒有能量的耗散，我們就称它为自由振动。这里先举三个例子，并且为了形象化起見，本节都以力学上的振动現象来說明一个自由度的振动系統的各种特性。

例 1 悬挂重物而本身质量微小的彈簧作鉛直方向的振动时，如果忽略彈簧的质量不計，則系統的形态只要用重物的位移便可以完全决定了。

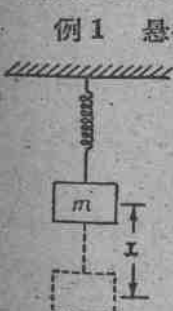

图 1.1

如图 1.1，假設彈簧末端在彈性限度內突然受到一个拉力，則当外力除去时，彈簧就开始上下振动。以 x 代表重物离开平衡位置在鉛直方向的位移，向下为正。此时，彈簧中的張力等于 $F=$ $=mg+cx$，其中 c 表示彈簧的剛度，就是使彈簧

产生单位伸长所需要加的力。当$|x|$很小时，根据虎克定律，彈簧的恢复力为cx在图(1)的位置时F向上。現在，作用在物体上还有重力mg，方向向下(略去空气的阻力)。根据牛頓运动定律就得到重物的运动微分方程为

$$m\ddot{x}=mg-(mg+cx),$$

即

$$m\ddot{x}+cx=0.$$

令

$$k^2=\frac{c}{m},$$

則得

$$\ddot{x}+k^2x=0.$$

例 2 設有上端固定的一根鉛直的細軸，軸的下端附有一个水平的重圓盘，如图 1.2 所示。如果这个装置在圓盘所在平面上突然受到一个力偶作用，那末当作用力除去时圓盘就发生扭振。忽略軸的轉动慣量不計，则系統的形态只要用圓盘的旋轉角度φ就可完全决定了。

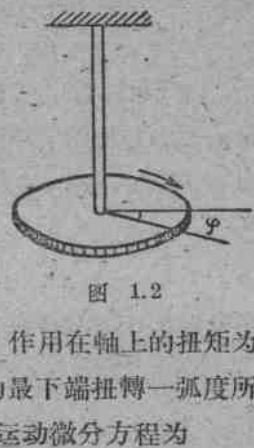

图 1.2

以I代表圓盘对于轉动軸的轉动慣量，φ表示圓盘的扭轉角，則当$|\varphi|$很小时，作用在軸上的扭矩为$b\varphi$，其中b表示軸的抗扭剛度，就是使軸的最下端扭轉一弧度所需要的扭矩。于是和例 1 一样，得到圓盘的运动微分方程为

$$I\ddot{\varphi}=-b\varphi,$$

即

$$I\ddot{\varphi}+b\varphi=0.$$

令

$$k^2=\frac{b}{I},$$

則得

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0.$$

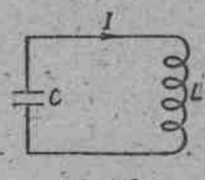

图 1.3

例 3 設有一电容器C的两个极板与自感L接通，如图 1.3，假定綫路的电阻很小，可以略去不計，在某一开始时刻使电容器的

极板有一电位差 V，然后把电源除去，我們来研究电流沿着导綫的流动情况。由于电路中的电位降落为 V，而自感电动势为 $-L\frac{dI}{dt}$，故得电流强度 I 所滿足的方程为

$$V=-L\frac{dI}{dt}.$$

以 $I=\frac{dQ}{dt}$，$V=\frac{Q}{C}$ 代入，卽得电荷 Q 所滿足的方程为

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{C}=0.$$

令 $k^2=\frac{Q}{LC}$，則上面的方程可写成

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+k^2Q=0 \text{ 或 } \ddot{Q}+k^2Q=0.$$

由此可以看出三个例中所得到的方程的形式相同，虽然其中的 x，φ 与 Q 表示着不同的物理量。因此我們現在就来研究一般的，平衡位置附近的微小自由振动方程

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+cq=0,\quad (a>0)$$

其中 q 表示广义坐标，$\frac{1}{2}a\dot{q}^2=T$ 是系統的动能，$\frac{1}{2}cq^2=U$ 是系統的势能，平衡位置是 $q=0$（所謂平衡位置就是这样一个位置，当給定的初速是 $\dot{q}(0)=0$ 时，則系統保持不动。在例 1 中平衡位置是 $x=0$，卽重物靜止不动时的位置，例 2 与例 3 也与此相彷）。下面就 $c>0$ 和 $c<0$ 两种情况来討論振动的一般形式。

1. 当 $c>0$，令 $k^2=\frac{c}{a}$，則得

$$\ddot{q}+k^2q=0 \tag{1}$$

(1)的特征方程为 $p^2+k^2=0$，它的两根是 $p=\pm ki$。

故(1)的通解为

$$q=B\cos kt+C\sin kt=A\sin(kt+\alpha). \tag{2}$$

因此，不論 B、C 取什么数值，q 都是 t 的周期函数，它就是我們平时在彈簧的振动和单摆的摆动中所观察到的往复现象的数学表示。(2)式中的 A 称为振幅，k 称为角頻率，α 称为初相；$kt_1+\alpha$ 称为在 t_1 时的位相，而 $\tau=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}$ 称为振动的周期，$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{a}}$ 称为振动的頻率。为了要确定任意常数 B、C 或 A、α，可給 q 与 $\dot{q}$ 以初始值：

$$q(0)=q_0,\quad \dot{q}(0)=\dot{q}_0 \tag{3}$$

則得

$$B=q_0,\quad C=\frac{\dot{q}_0}{k},\quad A=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k^2}},\quad \alpha=\tan^{-1}\frac{kq_0}{\dot{q}_0}.$$

于是

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}\sin\left(kt+\tan^{-1}\frac{kq_0}{\dot{q}_0}\right). \tag{4}$$

由此可以看出振动的振幅与初相須由初始条件来决定。而振动的周期則与初始条件无关。因为 q_0 与 $\dot{q}_0$ 可以任意給定，所以(1)的通解中的两个任意常数的物理意义在这里就意味着是两个任意选定的初值 q_0 与 $\dot{q}_0$。

2. 当 $c<0$，可令 $k^2=-\frac{c}{a}$，$(k>0)$ 則得方程(1′)

(1)′ 的特征方程为 $p^2=k^2$，它的两根是 $p=\pm k$。

故(1)′ 的通解为

$$q=Be^{kt}+Ce^{-kt}. \tag{4′}$$

因此現在 q 与 $\dot{q}$ 已經不是 t 的周期函数了。它們同时随着 t 的增加而趋向于零或无穷大，由 B 是否等于零来决定，而 B 和 C 的值又可由給定的初始条件(3)确定下来。

回头来看前面所举的三个例子，立刻发現它們都属于 $c>0$ 的情况，这时由(4)式可以看出不論初始条件如何，振动的振幅常

保持为有界(由(4)式看来，当 $t\to\infty$ 时振幅也不应減小，这里理論和实际就发生了矛盾。所以会产生这个矛盾，乃是由于我們在推导方程的时候忽略了空气阻力的緣故)，这种平衡位置我們称它是稳定的；另一方面，若 $C<0$，则由(4′)可以看出只要 $B\neq 0$ 就有

图 1.4

$\lim\limits_{t\to+\infty}|q|=+\infty$，这时，我們称平衡位置 $q=0$ 是不稳定的，具体的例子可以看图 1.4。摆球处于支点 A 的正上方也是一个平衡位置。以 θ 表示从这个位置量起的角度，那末容易算出在这个位置附近的摆动方程是

$$\ddot{\theta}-\frac{g}{l}\theta=0,$$

因此它属于 $C<0$ 的情况，而 $\theta=0$ 是个不稳定平衡位置。根据常識判断我們也知道只要摆球略略离开这个位置，θ 就将不断增大，并且此后摆动将在 $\theta=\pi$ 附近进行，而不是在 $\theta=0$ 附近进行了。但是(4′)并不能反映“摆动将在 $\theta=\pi$ 附近进行”这一事实，这里主要是由于：上面所写的摆动方程只是在 $|\theta|$ 很小的时候才能較准确地反映客观情况的緣故，关于单摆方程的詳細討論我們放在第三章 §1 和第六章 §3 中。

1.3 阻尼振动　当系統振动时如果受到外界的阻力，如空气或液体的阻力，固体之間的摩擦力，电路中的电阻等等，那末我們就得到所謂阻尼振动。生产实际問題中所出現的一切振动总是受有阻尼力的，只因有时阻尼力非常小，可以忽略不計，就把它作为无阻尼的自由振动来討論了。

通常如果在空气或粘性液体中运动，且速度不大时，阻力的大小与速度成正比，而方向则与速度方向相反。故可用 $-\alpha\dot{q}\ (\alpha>0)$ 来表示阻力(电阻也是如此，在例 3 中若考虑到电阻 R，则由它所产生的电位降落是 RI 或 $R\dot{Q}$)，这时运动方程变成为