普通高等院校大学数学系列教材

概率统计教程

李顺初　　主　编
华　巍　郑鹏社　副主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等院校大学数学系列教材

概率统计教程

李顺初　　主　编

华　巍　郑鹏社　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共9章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析. 每节后配有习题，每章后有本章内容概要与补充例题及总习题.

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述清楚、文字流畅、例题丰富、习题量较大，注重经济应用. 可供普通高等院校非数学专业本科生作为教材或教学参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计教程/李顺初主编. —北京：科学出版社，2009
(普通高等院校大学数学系列教材)
ISBN 978-7-03-025079-7

Ⅰ.概… Ⅱ.李… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第127514号

责任编辑：王 静 杨 然 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年8月第一次印刷 印张：18 1/2
印数：1—6 000 字数：360 000

定价：27.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是根据地方性高等院校非数学专业本科教学基础要求及教育部最新颁布的研究生入学考试大纲中数学一、二和三的相应内容编写的系列教材之一. 本书结合我们长期讲授该门课程的经验，适应一般院校非数学专业对数学教学要求越来越高的趋势，于2008年由西华大学大学数学课题组成员编写而成的. 本书继承和保持了在西华大学广泛使用多年且深受好评的《概率论与数理统计》(张文忠主编)教材的优点.

本书在结构体系、内容安排、习题配置等方面努力体现突出应用的特色：注意加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养；适当淡化纯理论性的推导而加强对学生“清晰的直觉和必要的推理”方面的训练；在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，在章节内容上注重说明有关内容的关联和地位，在概念的引入上注重从实际例子、几何直观出发并增加了有益的说明和注释，在讲解常用方法时清楚地列出程序化的步骤，做到了脉络清晰、化难为易；为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础.

本书共分9章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析. 第1～5章为概率论部分，由郑鹏社撰写，第6～9章为数理统计部分，由华巍撰写，李顺初负责全书的组稿、统稿、初审并参与了部分撰写工作. 秦昌明教授审阅了全书. 在编写与修改的过程中一直得到伊良忠教授、秦昌明教授的大力支持和帮助，在此一并致谢!

由于编者水平有限，加之时间也比较仓促，书中存在不妥之处在所难免，希望专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践的过程中不断完善.

编　者

2008年12月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

在自然界、生产实践、科学试验和日常生活中，人们所遇到的各种现象按其结果能否准确预言来划分，可以分为两大类：一类是必然现象；另一类是随机现象.

在一定条件下，必然出现(或者不出现)某一种结果的现象的一个共同特点就是可以事前预言，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是可以肯定的，或是根据它过去的状态，在相同的条件下完全可以预言将来的发展，我们把这类现象称为**必然现象**(或者确定性现象). 例如，在标准大气压下，纯水加热到 100℃必然沸腾；对于三角形，任意两边长度之和一定大于第三边；一批合格的产品中任意取一件，必定不是废品，等等. 几何、微积分、线性代数都是研究必然现象的数学工具.

另一类现象是在一定条件下可能出现多种不同的结果，但不能预先断言出现哪一种结果，即在相同的条件下，未来的发展事先不能肯定，这种现象称为**随机现象**. 例如，掷一枚一分的硬币，可能出现正面(有国徽的一面)向上，也可能出现反面向上，但是究竟出现哪一面向上，却不能事先预言；打靶时，弹着点离靶心的距离是某一个非负实数，但不能准确地预言这一距离的数值. 这类现象的共同特点就是：可以在相同条件下重复进行试验或者观察，而每次试验或者观察的可能结果不止一个，且事前不能预知确切结果，即试验结果呈现出不确定性. 人们经过长期实践并深入研究之后，发现虽然在个别试验或观察中，这类现象的结果呈现出不确定性，但是在大量观察或多次重复试验后，其结果往往呈现出某种客观规律并且这种客观规律是可以认识的.

概率论与**数理统计**就是研究和应用随机现象统计规律性的一门数学学科，但是各有侧重. **概率论**侧重于理论上的研究，介绍随机现象反映的基本概念，建立相应的定理和公式，找出计算统计规律的方法；而**数理统计**是以概率论为理论依据，研究如何设计试验并对试验结果进行整理和统计分析.

概率论的研究开始于意大利文艺复兴时期，源于赌博. 数理统计学是伴随着概率论而发展的，最早见于国家的人口统计中. 现在，概率论的理论和方法几乎遍及所有的科学技术领域以及工农业生产和国民经济各个部门. 在经济科学中，它是经济管理、质量控制、保险理论、系统论、经济预测和决策、计量经济学等的理论基础，是各类经济、管理专门人才不可缺少的数学工具.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验

对于随机现象，我们感兴趣的是那些在相同条件下可以重复观测的随机现象. 研究它们时，总要在一定条件下进行观察、测量或试验，为了叙述方便，以后把这些工作统称为试验. 如果试验具有以下的三个特点则称之为**随机试验**：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的所有可能结果都是事先知道的，而且结果不止一个；

(3) 试验之前不能确切预言会出现哪一个结果.

随机试验是一种含义较广的术语，它包括对随机现象进行观察、测量、记录或做科学实验等，以后简称**试验**. 下面是几个随机试验的例子.

例 1.1.1　掷一枚骰子，记录其点数.

例 1.1.2　将一枚硬币连续抛掷两次，观察正面 H，反面 T 出现的情况.

例 1.1.3　记录某大超市一天内进入的顾客人数.

例 1.1.4　在一大批电视机中任意抽取一台，测试其寿命.

例 1.1.5　向直角坐标平面上的圆形区域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上随机掷一个质点，观察其落点的位置.

1.1.2　样本空间

对于任一个随机试验，由于它必须满足特点(2)，因此随机试验的所有可能结果都是已知的. 我们将随机试验的所有可能的结果组成的集合称为**样本空间**，记作 Ω. Ω 中的元素，即随机试验的每个结果，称为**样本点**，样本点一般用 ω 表示. 对应于前面提到的几个随机试验可分别写出样本空间如下：

在例 1.1.1 中 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；

在例 1.1.2 中 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$；

在例 1.1.3 中 $\Omega=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$；

在例 1.1.4 中 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

在例 1.1.5 中 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$.

例 1.1.1 和例 1.1.2 中，样本点为有限多个，例 1.1.3 中样本点为可列个. 通常我们称样本点个数有限或可列的样本空间为**离散的样本空间**.

1.1.3　随机事件

在实践中，人们往往需要研究样本空间中满足某些条件的样本点组成的集合，

即关心满足某些条件的样本点在试验后是否会出现. 如在例 1.1.4 中,若规定电视机的寿命超过 10000h 为合格品,则我们关心的是电视机的寿命是否大于 10000h,满足这一条件的样本点组成此例中样本空间 Ω 的一个子集 $A=\{t \mid t>10000\}$,我们称 A 是此试验的一个随机事件.

一般地,称随机试验的样本空间 Ω 的子集为**随机事件**,简称**事件**. 通常用大写字母 A,B,C 等表示. 若试验后出现的结果 $\omega\in A$,则称事件 A 发生,否则称 A 不发生.

通常将只含有一个样本点 ω 的事件叫做**基本事件**. 将含有两个或两个以上样本点 ω 的事件叫做**复杂事件**. 样本空间 Ω 也是自己的子集,因而也是一个事件,由于它包含了试验的所有结果,所以在每次试验中它总会发生,因而它叫做**必然事件**;空集中不包含 Ω 中的任何元素,因此在每次试验中都不发生,将它叫做**不可能事件**. 以后我们用 Ω 表示必然事件,用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

如在例 1.1.1 中,设 A 表示"掷一枚骰子,出现的点数小于 7",则 $A=\Omega$ 是必然事件;设 B 表示"出现 8 点",则 B 是 Ω 中的空子集,因而是不可能事件,即 $B=\varnothing$;设 C 表示"出现奇数点",则 $C=\{1,3,5\}$,若实际掷出 3 点,我们便说事件 C 发生了;设 D 表示"掷出 3 点",则 $D=\{3\}$是基本事件.

概率论和数理统计是通过随机试验中的事件来研究随机现象的统计规律的.

注 由于必然事件与不可能事件的发生与否已失去了随机性,因而本质上它们不是随机事件. 但为了研究的方便,我们还是把必然事件和不可能事件当作是两种极端情况的随机事件.

1.1.4 事件的关系与运算

在同一条件下发生的各种随机事件,往往不是孤立的,而是彼此有联系、互相影响的. 按前面所述可知,事件的关系与运算和集合的关系与运算是相互对应的.

以后没有特别说明,总认为样本空间 Ω 已经给定,A,B,C 等为 Ω 中的事件,它们都是 Ω 的子集.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(图 1.1).

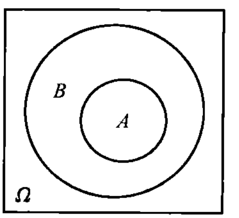


图 1.1

例如,在例 1.1.1 中,记 $A=\{2,4,6\}$,表示"出现偶数点",$B=\{2,3,4,5,6\}$,表示"出现的点数大于 1". 因为事件"出现偶数点"发生,则事件"出现的点数大于 1"必然发生,故 $A\subset B$.

注 (1)"A 发生必然导致 B 发生"意味着"属于 A 的样

本点 ω 必然属于 B”，即 A 是 B 的子集.

（2）因为不可能事件 $\varnothing$ 不包含任何样本点 ω，所以对于任一个事件 A，我们约定 $\varnothing \subset A$.

（3）因为必然事件 Ω 包含了全体样本点 ω，所以对于任一个事件 A，都有 $A \subset \Omega$.

2. 相等关系

若事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $A \subset B$ 且 $A \supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$. 它表示 A 与 B 在本质上是同一个事件.

例如，在例 1.1.1 中，记 $A=$“出现小于 5 的偶数”，$B=$“出现 2 或 4”，则 $A=B=\{2,4\}$.

3. 事件的和

事件 $A \cup B=\{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和**，显然事件 $A \cup B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 或者事件 B 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 至少有一个发生，如图 1.2 中的阴影部分表示.

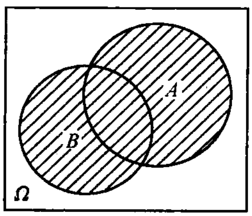


图 1.2

例如，在例 1.1.1 中，记 $A=\{2,4,6\}$，表示“出现偶数点”，$B=\{1,2,3\}$，表示“出现的点数小于 4”，则 $A \cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

注　（1）$A \cup \varnothing=A, A \cup A=A$.

（2）称“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”的事件为这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

（3）称“可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生”的事件为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 事件的积

事件 $A \cap B=\{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积**，也可简记为 AB，显然事件 $A \cap B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 同时发生，如图 1.3 中阴影部分所示.

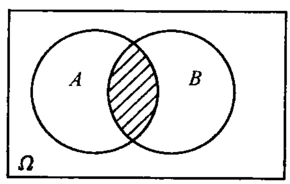


图 1.3

例如，某输油管长 100km，事件 $A=\{$前 50km 油管正常工作$\}$，事件 $B=\{$后 50km 油管正常工作$\}$，那么 $A \cap B=\{$整个油管正常工作$\}$.

注　（1）$A\varnothing=\varnothing, A\Omega=A, AA=A, AB \subset A$.

（2）称“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”的事件为这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记为 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3) 称"可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生"的事件为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积,记为 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 事件的差

事件 $A-B=\{\omega \mid \omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差,它表示"事件 A 发生而事件 B 不发生",如图 1.4 中阴影部分所示.

例如,在例 1.1.1 中,记 $A=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$,$B=\{$出现的点数大于 4$\}=\{5,6\}$,则 $A-B=\{2,4\}$,$B-A=\{5\}$.

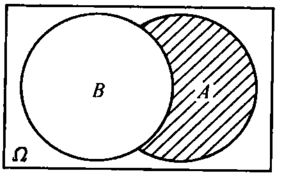


图 1.4

6. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B **互不相容**(或**互斥**),这时 A 与 B 没有公共的样本点. 互不相容的事件如图 1.5 所示.

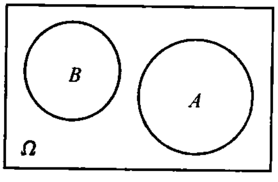


图 1.5

例如,在例 1.1.1 中,记 $A=\{$出现偶数点$\}$,$B=\{$出现 1 点或 3 点$\}$. 显然 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,所以 A 与 B 是互不相容事件.

注 若 $A\cap B=\varnothing$,则 $A\cup B$ 可记为 $A+B$,此时称 $A+B$ 为事件 A 与事件 B 的**直和**.

7. 对立事件

设 A 与 B 为两事件,若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为**互逆事件**(或**对立事件**),这时 B 叫做 A 的对立事件(或逆事件),记为 $\bar{A}$,即 $\bar{A}=\Omega-A$,显然有 $B=\bar{A}$,$A=\bar{B}$,如图 1.6 中阴影部分所示.

很明显,在一次试验中,事件 A 与事件 $\bar{A}$ 中必有一个发生,且仅有一个发生.

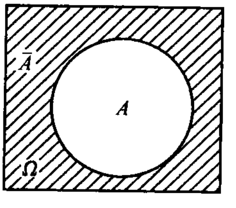


图 1.6

注 将一个事件分解成若干个事件之和或积的方法在概率论中经常应用. 另外,事件互不相容概念在应用中经常出现. 读者应对这些概念认真体会,准确把握. 以下一些等式在实际中是经常用到的:

$$A+\bar{A}=\Omega,\quad A\bar{A}=\varnothing,\quad \bar{\bar{A}}=A,\quad A-B=A-AB=A\bar{B},\quad A\cup\Omega=\Omega,$$
$$A+\varnothing=A,\quad A\cup A=A,\quad A\varnothing=\varnothing,\quad A\Omega=A,\quad AA=A,\quad AB\subset A.$$

下面将概率论中的事件和集合论中的集合的对应关系作比较，如表 1.1 所示.

表 1.1

符　号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	空间，全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件，样本点	元素，点
A	Ω 中的事件	Ω 中的子集
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件(逆事件)	集合 A 的补集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 B 与集合 A 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 B 与集合 A 的并集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 B 与集合 A 的差集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 B 与集合 A 并集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 B 与集合 A 无公共元素

正如集合的运算一样，事件的运算满足下列规则：

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA.$$

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (AB)C=A(BC).$$

(3) 分配律

$$(A\cup B)C=AC\cup BC,\quad (AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C).$$

(4) 对偶律

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},\quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

上述几条规则还可以推广到更多个事件. 比如 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的对偶律为

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n,\quad \overline{A_1A_2\cdots A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n.$$

根据事件的关系与运算规则可用一些简单的事件来表示较复杂的事件.

例 1.1.6　某灯泡厂取样检查出厂灯泡的寿命，设 A 表示“灯泡寿命大于 1500h”，B 表示“灯泡寿命在 1000～2000h”，请用集合的形式写出下列事件：$\Omega,A,B,A\cup B,AB,A-B,B-A$.

解　$\Omega=\{x|x\geqslant 0\}=[0,+\infty)$，　$A=\{x|x>1500\}=(1500,+\infty)$，

$B=\{x\mid 1000\leqslant x\leqslant 2000\}=[1000,2000]$，　$A\cup B=[1000,+\infty)$，

$AB=(1500,2000]$，　$A-B=(2000,+\infty)$，　$B-A=[1000,1500]$.

例 1.1.7　一个货箱中装有 12 只同类型的产品，其中 3 只是一等品，9 只是二

等品，从中随机地抽取两次，每次任取 1 只，$A_i(i=1,2)$表示第 i 次抽取的是一等品，试用字母及事件间的关系表示下列事件：

(1) 两只都是一等品；

(2) 两只都是二等品；

(3) 一只是一等品，另一只是二等品；

(4) 第二次抽取的是一等品.

解 由题意，用$\overline{A_i}$表示第 i 次抽取的是二等品($i=1,2$)则

(1) 两只都是一等品 $A_1\cap A_2$；

(2) 两只都是二等品$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$；

(3) 一只是一等品，另一只是二等品$\overline{A_1}A_2+A_1\overline{A_2}$；

(4) 第二次抽取的是一等品$\overline{A_1}A_2+A_1A_2$，或 A_2.

例 1.1.8 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以 A,B,C 分别表示甲、乙、丙命中目标，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件.

A_0："甲命中，乙和丙都没命中"$A\overline{B}\overline{C}$；

A_1："至少有一人命中目标"$A\cup B\cup C$；

A_2："恰有一人命中目标"$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

A_3："恰有两人命中目标"$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$；

A_4："最多有一人命中目标"$\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}$；

A_5："三人都命中目标"ABC；

A_6："三人均未命中目标"$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

注 事件的表示不是唯一的，例如，利用对偶律或事件的差，例 1.1.8 中事件 A_0 也可表示为如下几种形式：

$$A_0=A(\overline{B\cup C}),\quad A_0=A-(B\cup C),\quad A_0=A-B-C.$$

思 考 题

1. 怎样确定随机试验的样本空间？
2. 怎样理解样本空间与必然事件的关系？
3. 事件的对立与互不相容有何异同？试举例说明.

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 将一枚硬币连抛掷两次，观察正面出现的情况；

(2) 10 只同样的产品中有 3 只是次品，每次从中任取 1 只，取出后不放回，直到将 3 只次品都取出，记录抽取的次数；

(3) 一射手向一目标射击，直到命中为止，记录射击的次数.

2. 一袋内有白球 7 个，红球 3 个，试问：

(1) 若取出一球观察其颜色，则样本空间为何？

(2) 若依序抽出三球，取后不放回，则样本空间为何？

3. 设 A,B,C 是 Ω 中的三个事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 与 B 发生而 C 不发生；

(2) A 与 B 至少发生一个，C 不发生；

(3) A,B,C 至少发生两个；

(4) A,B,C 中不多于一个发生；

(5) A,B,C 中不多于两个发生.

4. 向指定目标射击 4 次，记事件 $A_i=\{$第 i 次击中目标$\}$，$i=1,2,3,4$. 试用 A_i 表示下列事件：

(1) 没有一次击中； (2) 至少有一次击中； (3) 只有一次击中； (4) 至少有三次击中；

(5) 恰好有三次没击中.

5. 在一批产品中有若干正品与次品，设事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次取到次品，试用文字叙述下列事件：

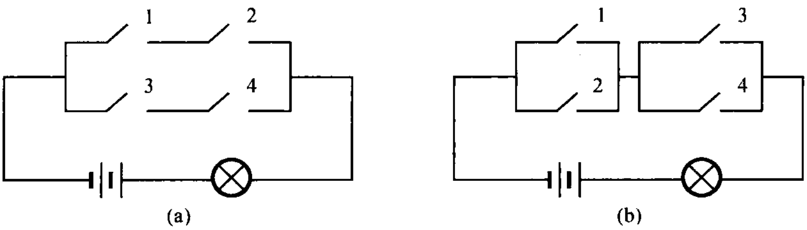
$$A_1\cup A_2,\quad A_1\cup A_2\cup A_3,\quad A_1A_2A_3,\quad \overline{A_2},\quad A_3-A_2,$$
$$\overline{A_1\cup A_2},\quad \overline{A_2}\cup\overline{A_3},\quad A_1A_2A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}.$$

6. 试回答下列问题：

(1) A,B 两事件对立与互不相容有何异同？

(2) A,B,C 三事件互不相容是否等同于 $ABC=\varnothing$？

7. 下面两个电路(题 7 图(a)、(b))都有 4 个开关和 1 个灯，设事件 $A_i=\{$第 i 个开关闭合$\}$，$i=1,2,3,4$，试用 A_1,A_2,A_3,A_4 的运算关系表示出事件 $B=\{$灯亮$\}$.



题 7 图

1.2 事件的概率

1.2.1 概率的统计定义

人们经过长期的实践发现，虽然一个随机事件在某次试验或观察中可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中，它发生的可能性大小却能呈现出某种规律

性.我们感兴趣的正是对这种规律性的探求.

1. 频率的稳定性

若事件 A 在 n 次试验中发生了 n_A 次,则称 n_A 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数,而比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**.

很早人们就注意到,在多次抛掷一枚质地均匀的硬币时,出现正面这一随机事件发生的频率会接近 1/2. 请看下面“抛掷硬币”试验的实例,见表 1.2.

表 1.2

试验人	抛掷次数	出现正面次数	频率（出现正面次数/抛掷次数）
德摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(Pearson)	24000	12012	0.5005

表 1.2 告诉我们:当试验的次数 n 增加时,正面向上的频率,即正面出现的次数 k 与总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$ 都在 $\frac{1}{2}$ 左右. 这表明:

(1) 频率是随机的,事先无法确定;

(2) 频率又“稳定”在一个常数的附近.

频率偏离这个常数很大的可能性虽然存在,但是试验的次数 n 越大,则频率偏离这个常数的可能性越小. 也就是说,**随机事件的每一次观察结果都是偶然的,但是多次观察某个随机现象可以知道,在大量的偶然事件中存在着必然的规律.**

通过大量的试验可知,在重复试验的次数 n 充分大时,事件的频率总在一个固定数值 p 附近摆动,我们将这种特性称为**频率的稳定性**. 频率的稳定性是一个客观存在,它不断地为人们所证实. 例如,多年医学研究表明,出生婴儿性别的数量比约为男∶女=1.06∶1;英语中字母 E,T,A 出现的频率要明显高于其他字母. 因此人们常用统计频率作为概率的近似值.

2. 频率的性质

频率具有下列性质:

性质 1.2.1　对于任一个事件 A,有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

性质 1.2.2　$f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$.

性质 1.2.3　$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)-f_n(AB)$.

特别地，若 A,B 互不相容，则有 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

性质 1.2.4　$f_n(\bar{A})=1-f_n(A)$.

性质 1.2.5　若 $A\subset B$，则 $f_n(A)\leqslant f_n(B)$，且 $f_n(B-A)=f_n(B)-f_n(A)$.

证　(1) 设 n_A 表示 n 次试验中 A 发生的次数，则有 $0\leqslant n_A\leqslant n$，从而 $0\leqslant\dfrac{n_A}{n}\leqslant 1$，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) 因 $n_\Omega=n, n_\varnothing=0$，故 $f_n(\Omega)=\dfrac{n_\Omega}{n}=1, f_n(\varnothing)=\dfrac{n_\varnothing}{n}=0$.

(3) 设 n_A, n_B 和 n_{AB} 分别为事件 A,B 和 AB 在 n 次试验中 A 发生的次数，显然事件 $A\cup B$ 发生的次数 n_{A+B} 为 $n_{A+B}=n_A+n_B-n_{AB}$，所以

$$\begin{aligned} f_n(A\cup B) &= \frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A+n_B-n_{AB}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}-\frac{n_{AB}}{n} \\ &= f_n(A)+f_n(B)-f_n(AB). \end{aligned}$$

(4) 因 $n_A+n_{\bar{A}}=n$，故 $n_{\bar{A}}=n-n_A$，从而 $f_n(\bar{A})=\dfrac{n_{\bar{A}}}{n}=1-\dfrac{n_A}{n}=1-f_n(A)$.

(5) 因 $A\subset B$，故 $n_A\leqslant n_B$，且事件 $B-A$ 发生的次数 $n_{B-A}=n_B-n_A$，所以

$$f_n(B-A)=\frac{n_{B-A}}{n}=\frac{n_B-n_A}{n}=\frac{n_B}{n}-\frac{n_A}{n}=f_n(B)-f_n(A).$$

注　性质 1.2.3 还可推广到更多个事件的情形. 特别地，若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容，则有

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

3. 概率的统计定义

定义 1.2.1　事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 随着重复试验的次数 n 的增大而稳定于某个常数 p，则称这个常数 p 为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

由频率的稳定性可知，任一个事件 A 的概率是客观存在的. 但在实际问题中，常常并不知道 $P(A)$ 为何值，此时可取试验次数 n 足够大时 A 出现的频率 $f_n(A)$ 为它的近似值，这正是统计定义的优点.

事件发生的概率既然是事件出现的频率的稳定值，那么，概率也应该具有与频率相应的几条性质.

性质 1.2.6　对于任一个事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.　(1.2.1)

性质 1.2.7　$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.　(1.2.2)

性质 1.2.8　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.　(1.2.3)

此性质称为**概率的加法公式**.

为了便于应用，上面性质 1.2.8 可以推广到三个事件求和的概率.

推论 1.2.1　设 A,B,C 为三个事件，则